GH. SIREȚCHI

CALCUL DIFERENȚIAL ȘI INTEGRAL

VOLUMUL I

Noțiuni fundamentale

EDITURA ȘTIINȚIFICĂ ȘI ENCICLOPEDICĂ
București, 1985

PREFAȚĂ

Cartea de față are la bază cele patru volume de Analiză matematică, publicate de autor într-un tiraj redus, la Centrul de Multiplicare al Universității din București, în mai multe ediții, începînd din 1974 și pînă în 1985 (v. [21]—[24] Bibliografie).

Cartea cuprinde principalele rezultate teoretice clasice de calcul diferențial și integral, pe dreapta reală, prezentate într-un spirit modern. În fiecare capitol am inclus numeroase exemple, dezvoltate detaliat, care au drept scop să ilustreze fiecare concept fundamental și care constituie în același timp aplicații concrete ale teoriei din capitolul respectiv.

Menționăm faptul că generalizarea unor rezultate clasice, simplificarea sau realizarea unor noi demonstrații care au fost incluse în text precum și numeroase probleme constituie contribuția autorului. Citățm în acest sens afirmațiile: T. 9.4.20., T. 9.4.12., P.8.1.11. Cor. 2, P.7.3.8., P.7.3.9., P.7.3.10., demonstrația T. 3.3.5. etc.

Prin caracterul său elementar, cartea se adresează unei largi categorii de cititori: elevilor din ultimele două clase de liceu, candidaților la admitere în învățămîntul superior, studenților din anul I din universități (facultățile de matematică, fizică, geologie-geografie), institute tehnice, economice, cît și profesorilor de matematică din licee în munca lor la catedră, pentru pregătirea gradelor didactice sau pentru cursurile de perfecționare.

Cartea este astfel concepută, încît cititorul să poată face o trecere mai ușoară de la analiza matematică predată în liceu la cea predată în învățămîntul superior. Pentru aceasta am folosit experiența didactică dobîndită de-a lungul anilor cu studenți din anul I ai Facultății de Matematică a Universității din București.

Recomandăm cititorilor ca parcurgerea fiecărui capitol din volumul I să fie făcută în paralel cu capitolul corespunzător de exerciții din volumul II.

August 1985 *GH. SIREȚCHI*

Cuprins

Notaţii utilizate 9

CAP. 1. **Noţiuni de teoria mulţimilor** 13

1.0. Noţiuni de logică 13
1.1. Mulţimi. Operaţii cu mulţimi 14
1.2. Produs cartezian, relaţie binară, funcţie 15
1.3. Relaţie de ordine şi de echivalenţă 20
1.4. Mulţimi finite, infinite, numerabile 22

CAP. 2. **Numere reale. Şiruri de numere reale. Numere complexe** 28

2.1. Numere reale (prezentare axiomatică). Proprietăţi generale 28
2.2. Mulţimi mărginite şi intervale în R 41
2.3. Şiruri de numere. Proprietăţi generale 46
2.4. Şiruri particulare remarcabile de numere 61
2.5. Limite extreme ale unui şir de numere reale 65
2.6. Numere complexe 71

CAP. 3. **Serii şi produse infinite de numere** 76

3.1. Serii convergente. Proprietăţi generale 76
3.2. Criterii de convergenţă pentru serii 82
3.3. Serii semiconvergente şi comutativ convergente 92
3.4. Produsul convolutiv a două serii 94
3.5. Serii remarcabile de numere 96
3.6. Produse infinite de numere 102

CAP. 4. **Funcţii reale de o variabilă reală** 108

4.1. Funcţii reale de o variabilă reală. Generalităţi 108
4.2. Funcţii reale monotone 117
4.3. Funcţii cu proprietatea Darboux 120
4.4. Funcţii pare şi funcţii impare 122
4.5. Funcţii periodice 123
4.6. Funcţii mărginite. Extreme 123
4.7. Funcţii liniare 126
4.8. Funcţii cu punct fix 128
4.9. Funcţii polinomiale 128

CAP. 5. **Noţiuni de topologie pe R** 132

5.1. Mulţimi închise, deschise şi conexe 132
5.2. Mulţimi compacte 143
5.3. Limita unei funcţii într-un punct 148
5.4. Limite laterale ale unei funcţii într-un punct 159
5.5. Funcţii continue 161
5.6. Funcţii continue concrete 177
5.7. Funcţii uniform continue 186

CAP. 6. **Calcul diferențial real** 191

6.1. Funcții derivabile. Operații cu funcții derivabile 191
6.2. Derivate de ordin superior 200
6.3. Teoremele lui Rolle, Lagrange, Cauchy, Darboux și consecințele lor 202
6.4. Înlăturarea formelor nedeterminate : Regula lui L'Hospital 216
6.5. Formula lui Taylor cu restul lui Lagrange. Extreme 221
6.6. Funcții diferențiabile de o variabilă reală 224

CAP. 7. **Aplicații ale calculului diferențial** 226

7.1. Funcții convexe 226
7.2. Reprezentarea grafică a funcțiilor. Exemple 232
7.3. Inegalități remarcabile. Complemente 246

CAP. 8. **Primitive** 260

8.1. Primitive. Proprietăți generale 260
8.2. Metode de calcul al primitivelor 267
8.3. Calculul primitivelor din funcții raționale 279
8.4. Calculul primitivelor din funcții iraționale 285
8.5. Calcul primitivelor din funcții rațional-trigonometrice 290
8.6. Calculul unor primitive diverse 301

CAP. 9. **Integrabilitate** 308

9.1. Funcții integrabile. Criterii de integrabilitate 308
9.2. Proprietăți generale ale funcțiilor integrabile 323
9.3. Metode de integrare a funcțiilor 335
9.4. Exemple și contraexemple. Inegalități integrale. Complemente 345

CAP. 10. **Aplicații ale calculului integral** 366

10.1. Calculul ariilor 366
10.2. Calculul lungimilor 369
10.3. Calculul volumelor corpurilor de rotație 373
10.4. Calculul ariilor suprafețelor de rotație 375

CAP. 11. **Integrale improprii** 379

11.1. Integrale improprii. Proprietăți generale 379
11.2. Criterii de convergență a integralelor improprii 387
11.3. Exemple de integrale improprii integrale. Complemente 394

CAP. 12. **Șiruri și serii de funcții** 410

12.1. Șiruri de funcții 410
12.2. Serii de funcții 422
12.3. Serii de puteri 429
12.4. Dezvoltarea unei funcții în serie Taylor 438
12.5. Dezvoltarea în serie Taylor a funcțiilor elementare. Aplicații 441

CAP. 13. **Metode numerice în analiza matematică** 453

13.1. Calculul cu aproximație. Exemple 453
13.2. Separarea rădăcinilor unei ecuații 457
13.3. Rezolvarea numerică a ecuațiilor algebrice 463
13.4. Aproximarea funcțiilor (polinoame de interpolare) 478
13.5. Integrarea numerică a funcțiilor 487

Indice de termeni 499

Bibliografie 503

Notaţii utilizate

$\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$: operatori logici (conective); $\vee$ (conjuncţia), $\wedge$ (disjuncţia), $\rightarrow$ (implicaţia), $\leftrightarrow$ (echivalenţa).

$p \vee q, p \wedge q, p \rightarrow q, p \leftrightarrow q$: $p \vee q$ (p sau q), $p \wedge q$ (p şi q), $p \rightarrow q$ (dacă p atunci q), $p \leftrightarrow q$ (p dacă şi numai dacă q).

$p \Rightarrow q$: propoziţia $p \rightarrow q$ este adevărată.

$p \Leftrightarrow q$: propoziţia $p \leftrightarrow q$ este adevărată.

$(\forall)$: cuantificatorul universal (oricare ar fi).

$(\exists)$: cuantificatorul existenţial (există).

$\neg(\exists)\ x \in A$: nu există nici un element x în mulţimea A.

$x \in A$, $A \ni x$: elementul x aparţine mulţimii A.

$x \notin A$, $A \not\ni x$: elementul x nu aparţine mulţimii A.

$\mathfrak{P}(X)$, 2^X ; mulţimea tuturor părţilor mulţimii X.

$\cup$, $\cap$: semnul pentru reuniune resp. intersecţie de mulţimi.

$A \subseteq B$, $B \supseteq A$: mulţimea A este inclusă în mulţimea B.

$A \setminus B$: diferenţa dintre mulţimea A şi mulţimea B.

$A \times B$: produsul cartezian al mulţimii A cu mulţimea B, adică mulţimea perechilor ordonate (a, b) cu $a \in A$ şi $b \in B$.

$A \sim B$: A şi B sînt echipotente, adică există $f : A \rightarrow B$ bijectivă.

$\{x \in A\,;\, P\}$: mulţimea elementelor din A care au proprietatea P.

$\emptyset$: mulţimea vidă.

$\{x_1, x_2, \ldots, x_n \ldots\}$: mulţimea formată din elementele $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$

$\mathbf{N}, \mathbf{Z}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}, \mathbf{C}$: mulţimea numerelor naturale resp. întregi, raţionale, reale, complexe, unde $\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$, $\mathbf{Z} = \mathbf{N} \cup \{0\} \cup (-\mathbf{N})$ etc.

$\mathbf{K}$: mulţimea $\mathbf{R}$ sau $\mathbf{C}$

$\overline{\mathbf{R}}$: dreapta completată, adică mulţimea $\mathbf{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$.

A_-, A_+ : mulţimea $\{x \in A\,;\, x \leqslant 0\}$, resp. $\{x \in A\,;\, x \geqslant 0\}$.

A' sau A' [$\mathbf{R}$]; A' [$\overline{\mathbf{R}}$] : derivata mulţimii A în $\mathbf{R}$, resp. în $\overline{\mathbf{R}}$.

A'^s, A'^d, A'^b: derivata la stînga, la dreapta, resp. bilaterală a mulţimii A.

$\mathbf{N}_0$: mulţimea $\mathbf{N} \cup \{0\}$, adică $\mathbf{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$.

$\mathbf{R}_+^*$: mulţimea $\mathbf{R}_+ \setminus \{0\}$ a numerelor reale strict pozitive.

$\mathbf{Q}_+^*$: mulţimea $\mathbf{Q}_+ \setminus \{0\}$ a numerelor raţionale strict pozitive.

$i = \overline{1, n}$: i parcurge toate numerele naturale de la 1 la n.

inf A, sup A : marginea inferioară resp. superioară a mulţimii A.

min A, max A : maximul, resp. minimul mulţimii A.

I : interval în $\mathbf{R}$.

n : un număr întreg (element din $\mathbf{Z}$).

$n \geqslant 1$: un număr întreg mai mare ca 1, adică un număr natural.

$[x]$, $[x]_*$ sau $E(x)$: partea întreagă a numărului real x.

$\{x\}$: mulțimea redusă la elementul x sau distanța de la x la cel mai apropiat întreg ($x \in \mathbf{R}$).

$(p, q) = 1$: fracția $\frac{p}{q}$, cu $pq \neq 0$, este ireductibilă.

$\sum_{i=1}^{n} a_i$: suma $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, unde $a_i \in \mathbf{C}$.

$\prod_{i=1}^{n} a_i$: produsul $a_1\, a_2 \ldots a_n$, unde $a_i \in \mathbf{C}$.

$\sum_{n} a_n$, $\sum_{n\geqslant 1} a_n$: seria de termen general a_n sau suma seriei.

$\prod_{n} a_n$, $\prod_{n\geqslant 1} a_n$: produsul infinit de termen general a_n sau valoarea produsului infinit.

$\sum_{n\geqslant 1} a_n \ll \sum_{n\geqslant 1} b_n$: seria $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ este majorată de seria $\sum_{n\geqslant 1} b_n$.

$\sum_{n\geqslant 1} a_n \sim \sum_{n\geqslant 1} b_n$: seria $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ este echivalentă cu seria $\sum_{n\geqslant 1} b_n$.

sign : funcția signum , $f(x) = 1$, dacă $x > 0$, $f(0) = 0$ și $f(x) = -1$, dacă $x < 0$.

$f : X \to Y : x \mapsto f(x)$, $x \in X$; $x \overset{f}{\mapsto} y$, $x \in X$: funcția f este definită pe X și cu valori în Y.

G_f, Γ_f : graficul funcției $f : X \to Y$, adică mulțimea $\{(x, f(x)) ; x \in X\}$.

$A \subset_{\rightarrow} X$: injecția canonică a lui A în X, cînd $A \subseteq X$.

$f|_A$: restricția funcției $f : X \to Y$ la mulțimea $A \subseteq X$.

$\mathbf{1}_X$, $\mathbf{1}$: aplicația identică pe X, adică $\mathbf{1}_X(x) = x$, $(\forall)\ x \in X$.

$f = c$, $f = \mathbf{0}$: funcția f este constantă, respectiv identic nulă.

f^{-1} : funcția inversă a funcției bijective f.

$g \circ f$: compunerea funcțiilor $f : X \to Y$ cu $g : Y \to Z$, adică funcția $(g \circ f)(x) := g(f(x))$, $(\forall)\ x \in X$.

$f \leqslant g$, $f < g$: Dacă $f, g : X \to \mathbf{R}$ și $f(x) \leqslant g(x)$, $(\forall)\ x \in X$, resp. $f(x) < g(x)$, $(\forall)\ x \in X$.

$\varphi = \min\{f, g\}$, $\psi = \max\{f, g\}$: Dacă $f, g : X \to \mathbf{R}$, atunci $\varphi(x) := \min\{f(x), g(x)\}$ $(\forall)\ x \in X$ și $\psi(x) = \max\{f(x), g(x)\}$, $(\forall) x \in X$.

f^+, f^- $|f|$: dacă $f : X \to \mathbf{R}$, atunci $f^+ := \max\{f, 0\}$, $f^- := \max\{-f, 0\}$, $|f|(x) := |f(x)|$ $(\forall)\ x \in X$.

$\|f\|_\infty$: dacă $f : X \to \mathbf{R}$, atunci $\|f\|_\infty := \sup_{x\in X} |f(x)|$.

$f(x) = o(g(x))$, $x \to a$; $f(x) = O(g(x))$, $x \to a$: simbolurile lui Landau

D_f : domeniul maxim de definiție al funcției elementare f.

Z_f : zerourile funcției f, adică mulțimea $\{x \in D_f ; f(x) = 0\}$.

$f(A)$: mulțimea valorilor funcției $f : X \to Y$ pe mulțimea A, adică mulțimea $\{y \in Y ;\ (\exists)\ x \in A$ a.î. $f(x) = y\}$.

$f^{-1}(B)$: imaginea reciprocă a mulțimii $B \subseteq Y$ prin aplicația f $X \to Y$, adică mulțimea $\{x \in X ; f(x) \in B\}$, în particular $f^{-1}(\{y\})$ cu $y \in Y$.

$\inf f(A)$, $\inf_{x\in A} f(x)$: marginea inferioară a funcției f pe mulțimea A.

$\sup f(A)$, $\sup_{x\in A} f(x)$: marginea superioară a funcției f pe mulțimea A.

$\min f(A)$, $\min_{x\in A} f(x)$: minimul funcției f pe mulțimea A.

$\max f(A)$, $\max_{x\in A} f(x)$: maximul funcției f pe mulțimea A.

$(x_n)_{n\geqslant 1}$, $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$: șirul de termen general x_n.

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$; $x_n \to x$; $x_n \to x (n \to \infty)$: şirul numeric $(x_n)_{n\geqslant 1}$ are limita x.

$x_n \nearrow x$, $x_n \searrow x$: şirul $(x_n)_{n\geqslant 1}$ de numere reale este monoton crescător (resp. descrescător) şi are limita x.

$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$, $\overline{\lim\limits_{x\to\infty}} x_n$: limita inferioară resp. superioară a şirului numeric $(x_n)_{n\geqslant 1}$.

$L(x_n)_{n\geqslant 1}$: mulţimea tuturor punctelor limită ale şirului $(x_n)_{n\geqslant 1}$ de numere reale.

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$: limita funcţiei f în punctul x_0 : $\lim\limits_{A\ni x\to x_0} f(x) := \lim\limits_{x\to x_0} (f|_A)(x)$.

$\lim\limits_{x\nearrow x_0} f(x)$; $f(x_0-)$: limita la stînga a funcţiei f în punctul x_0.

$\lim\limits_{x\searrow x_0} f(x)$; $f(x_0+)$; limita la dreapta a funcţiei f în punctul x_0.

$f'(x_0)$: derivata funcţiei f în punctul x_0.

$f^{(n)}$: derivata de ordinul n a funcţiei f.

$f'_d(x_0)$, $f'_s(x_0)$: derivata la dreapta resp. la stînga a funcţiei f în punctul x_0.

$D_s f(x_0)$: derivata simetrică a funcţiei f în punctul x_0

$\mathbf{R}[X]$: $\mathbf{Q}[X]$, $\mathbf{Z}[X]$: mulţimea polinoamelor cu coeficienţi în $\mathbf{R}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{Z}$ respectiv.

$\mathbf{R}_n[X]$: mulţimea polinoamelor cu coeficienţi în $\mathbf{R}$ şi de grad $\leqslant n$.

trig : una din funcţiile trigonometrice sin, cos, tg, cotg.

sh, ch, th : funcţiile trigonometrice hiperbolice sinus, cosinus, resp. tangenta hiperbolică

ln, log, lb, $\log_a$: logaritm în baza e (neperian), în baza 10 (zecimal), în baza 2 (binar), resp. în baza a cu $a \in \mathbf{R}_+^* \setminus \{1\}$.

$\exp_a$ exp : funcţia exponenţială de bază a, resp. de bază e.

$|I|$: lungimea intervalului I.

$\mathring{A}$, int A : interiorul mulţimii A.

$\bar{A}$, $\bar{A}[\mathbf{R}]$, ad A : aderenţa mulţimii A (în $\mathbf{R}$).

$\bar{A}[\overline{\mathbf{R}}]$, $\mathrm{ad}_{\overline{\mathbf{R}}}(A)$: aderenţa mulţimii A în $\overline{\mathbf{R}}$.

$0!, n!, n!!$: $0! = 1$, $n! = 1.2 \ldots, n$, $n!! = \begin{cases} 2.4 \ldots n, & (n - \text{par}) \\ 1.3.5 \ldots n, & (n - \text{impar}) \end{cases}$

Δx_n : $\Delta x_n = x_{n+1} - x_n$, unde x_n este termenul general al unui şir.

$\mathcal{C}^n(A)$: mulţimea funcţiilor $f : A \to \mathbf{R}$, derivabile pînă la ordinul n şi cu $f^{(n)}$ continuă.

$\mathcal{C}(X)$: mulţimea tuturor funcţiilor continue $f : X \to \mathbf{R}$, unde $X \subseteq \mathbf{R}$.

$\sim$, $\equiv$: relaţie de echivalenţă.

$\preccurlyeq$, $\prec$, $\leqslant$, $<$: relaţie de ordine.

$\mathcal{F}(X, Y)$ sau Y^X : mulţimea tuturor funcţiilor $f : X \to Y$.

$\mathcal{F}(X)$: mulţimea $\mathcal{F}(X, \mathbf{K})$.

$\mathcal{M}(X)$: mulţimea tuturor funcţiilor mărginite $f : X \to \mathbf{K}$.

$\mathcal{D}_a(I)$: mulţimea funcţiilor $f : I \to \mathbf{R}$ cu proprietatea Darboux

$\mathcal{B}(X)$: mulţimea tuturor funcţiilor continue şi mărginite $f : X \to \mathbf{R}$, unde $X \subseteq \mathbf{R}$

$f_n \overset{s}{\underset{B}{\to}} f$: şirul $f_n \in \mathcal{F}(A)$, $(n \geqslant 1)$ converge simplu pe mulţimea $B \subseteq A$, la funcţia $f \in \mathcal{F}(A)$.

$f_n \overset{u}{\underset{B}{\to}} f$: şirul $f_n \in \mathcal{F}(A)$ $(n \geqslant 1)$ converge uniform pe mulţimea $B \subseteq A$, la funcţia $f \in \mathcal{F}(A)$.

$f_n \overset{s}{\to} f$: şirul $f_n \in \mathcal{F}(A)$ $(n \geqslant 1)$ converge simplu pe A, la funcţia $f \in \mathcal{F}(A)$.

$f_n \overset{u}{\to} f$: şirul $f_n \in \mathcal{F}(A)$, $(n \geqslant 1)$ converge uniform pe A, la funcţia $f \in \mathcal{F}(A)$.

$\overset{\frown}{\nearrow}$: funcţia este crescătoare şi concavă resp. convexă.

$\overset{\smile}{\searrow}$: funcţia este descrescătoare şi convexă resp. concavă.

$\left(\int f\right)(x)$, $x \in I$; $\int f(x)\mathrm{d}x$, $x \in I$; primitiva funcţiei f pe intervalul I, $I \subset \mathbf{R}$.

$\sigma_f(\Delta, \xi_\Delta)$: suma Riemann asociată funcţiei f, diviziunii Δ şi mulţimii ξ_Δ de puncte intermediare asociată lui Δ.

$\mathfrak{T}_{[a,b]}$: mulţimea tuturor diviziunilor intervalului $[a, b]$.

$\int_a^b f, \int_a^b f(x)\mathrm{d}x, \int_a^b f\mathrm{d}x$: Integrala Riemann a funcţiei f pe intervalul $[a,b]$.

$s_f(\Delta)$, $S_f(\Delta)$: suma Darboux, inferioară, respectiv suma Darboux superioară, asociată funcţiei f şi diviziunii Δ.

$\underline{\int_a^b} f$, $\overline{\int_a^b} f$: integrala Darboux inferioară, respectiv superioară.

ξ_Δ mulţimea de puncte intermediare asociată diviziunii Δ.

Ξ_Δ : familia tuturor mulţimilor de puncte intermediare asociată lui Δ.

Abreviaţiuni : Ex. (exerciţiu) ; cf. (conform) ; T. th. (teoremă) ; Cor . (corolar) ; D., Def. (definiţie) ; Cap. (capitol) ; v. (vezi) : a.î. (astfel încît) ; Ind. (indicaţie) ; i.e. (id est) = adică ; a.p.t. (aproape peste tot).

Alfabetul grec : α, A (alfa) ; β, B (beta) ; γ, Γ (gamma) ; δ, Δ (delta) ; ε, E (epsilon) ; ζ, Z (zeta) ; η, H (eta) ; θ, Θ (theta) ; i, I (iota) ; k, K(kappa) ; λ, Λ (lambda) ; μ, M (miu) ; ν, N(niu) ; ξ, Ξ (csi) ; o, O (omicron) ; π, Π (pi) : ρ, P (rho) ; σ, Σ (sigma) ; τ, T (tau) ; υ, Υ (ipsilon) ; φ, Φ (phi) ; ψ, Ψ (psi) ; $\varkappa$, X (chi) ; ω, Ω (omega).

CAPITOLUL 1

NOȚIUNI DE TEORIA MULȚIMILOR

1.0. Noțiuni de logică

Noțiunea de *propoziție* o considerăm primară. Vom nota propozițiile cu $p, q, r, \ldots$ Să asociem fiecărei propoziții p un simbol notat cu $|p|$, numit *valoare de adevăr* a lui p, egal cu 1 sau 0 ; propoziția p se numește *adevărată*, dacă $|p| = 1$ și *falsă*, dacă $|p| = 0$.

Operatori logici (conective) : $\neg$ (negație), $\vee$ (disjuncția), $\wedge$ (conjuncția), $\rightarrow$ (implicația) și $\leftrightarrow$ (echivalența).

Cu ajutorul operatorilor logici din propozițiile $p, q, \ldots$ putem forma *propoziții compuse*.

Fie, p, q două propoziții fixate. Definim propozițiile $\neg p$, $p \vee q$, $p \wedge q$. $p \rightarrow q$, $p \leftrightarrow q$ prin valorile lor de adevăr, după tabelul :

p	q	$\neg p$	$p \vee q$	$p \wedge q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0	0
0	1	1	1	0	1	0
0	0	1	0	0	1	1

Propozițiile nou formate se citesc astfel : $\neg p$ (non p), $p \vee q$ (p sau q), $p \wedge q$ (p și q), $p \rightarrow q$ (dacă p atunci q), $p \leftrightarrow q$ (p dacă și numai dacă q).

Dacă propoziția $p \rightarrow q$ este adevărată, vom scrie $p \Rightarrow q$ și vom spune că p este o condiție *suficientă* pentru q sau că q este o condiție *necesară* pentru p.

Dacă propoziția $p \leftrightarrow q$ este adevărată, vom scrie $p \Leftrightarrow q$ și vom spune că p este o condiție *necesară* și *suficientă* pentru q.

O propoziție compusă se numește *tautologie*, dacă este adevărată oricare ar fi valoarea de adevăr a propozițiilor componente.

1.0.1. Propoziție. *Fie p, q două propoziții. Atunci avem tautologiile* :

1° $p \vee p \leftrightarrow p$; $p \wedge p \leftrightarrow p$ (*idempotența*)

2° $p \vee (\neg p)$ (*princip. terțiului exclus*)

3° $\neg \neg p \leftrightarrow p$ (*princip. dublei negații*)

4° $\left.\begin{array}{l} \neg(p \vee q) \leftrightarrow (\neg p) \wedge (\neg q) \\ \neg(p \wedge q) \leftrightarrow (\neg p) \vee (\neg q) \end{array}\right\}$ (*princip. dualității*)

Se numește *predicat* (*funcție propozițională*) o propoziție care depinde de unul sau mai multe simboluri variabile. Ele se notează cu $p(x)$ (*unare*), $p(x, y)$ (*binare*) ...

Cuantificatori : ($\forall$) (cuantificatorul *universal*) și ($\exists$) (cuantificatorul *existențial*).

Cu ajutorul cuantificatorilor ($\forall$) și ($\exists$) putem forma dintr-un predicat dat $p(x)$, propoziții noi :

$$(\forall x)\ p(x) \quad \text{(oricare ar fi } x,\ p(x)\text{)}$$

$$(\exists x)\ p(x) \quad \text{(există } x \text{ a.î. } p(x)\text{)}$$

Vorbind intuitiv putem spune că propoziția $(\forall x)\ p(x)$ este echivalentă cu propoziția :

$$p(a) \wedge p(b) \wedge p(c) \wedge \ldots,$$

unde a, b, c, ... sînt obiecte individuale.

Analog propoziția $(\exists x)\ p(x)$ este echivalentă cu propoziția

$$p(a) \vee p(b) \vee p(c) \vee \ldots,$$

unde a, b, c, ... sînt obiecte individuale.

Din definițiile date rezultă tautologiile :

$$(\forall x)\ p(x) \rightarrow (\exists x)\ p(x)$$

$$\neg(\forall x)\ p(x) \leftrightarrow (\exists x)\ \neg p(x)$$

$$\neg(\exists x)\ p(x)) \leftrightarrow (\forall x)\ \neg p(x)$$

1.1. Mulțimi. Operații cu mulțimi

Noțiunea de mulțime o considerăm primară (colecție, grămadă), cîștigată în urma unui lung proces de abstractizare.

Vom nota *mulțimile* cu litere mari : X, Y, Z, ... ; A, B, C, ... iar *elementele* din care este formată o mulțime le vom nota cu litere mici : $x, y, z, \ldots$; $a, b, c, \ldots$ Mulțimea *vidă* se notează cu $\emptyset$. *Familiile de mulțimi* le vom nota cu litere mari ronde : $\mathscr{X}$, $\mathscr{Y}$, $\mathscr{Z}$, ... ; $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$, $\mathscr{C}$, ...

Dacă X este o mulțime, vom nota cu $\mathscr{P}(X)$ *mulțimea tuturor părților* lui X. Dacă mulțimea X este formată din elementele x, y, z, ... vom scrie $X = \{x, y, z, \ldots\}$. Dacă elementul x *aparține* mulțimii X, vom scrie $x \in X$ sau $X \ni x$, iar în caz contrar, vom scrie $x \notin X$ sau $X \not\ni x$. Dacă $p(x)$ este o funcție propozițională, atunci mulțimea tuturor punctelor x din X pentru care $p(x)$ este adevărată se notează cu $\{x \in X\,;\ p(x)\}$.

1.1.1. Definiție. Fie A și B două mulțimi. Atunci vom scrie :

$A \subseteq B \Leftrightarrow ((\forall x)\ x \in A \Rightarrow x \in B)$ (A este *inclusă* în B) ;

$A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$ (A este *egală* cu B) ;

$A \subset B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge A \neq B$ (A este *inclusă strict* în B) ;

$A \cup B = \{x\,;\ x \in A \vee x \in B\}$ (*reuniunea* lui A cu B) ;

$A \cap B = \{x\,;\ x \in A \wedge x \in B\}$ (*intersecția* lui A cu B) ;

$B \setminus A = \{x\,;\ x \in B \wedge x \notin A\}$ (*diferența* dintre B și A).

Dacă $A \subseteq B$, mulțimea $B \setminus A$ se numește *complementara* lui A față de B și se mai notează cu $\mathbf{C}_B A$ sau $\mathbf{C}\, A$ dacă nu există nici o posibilitate de confuzie.

1.1.2. Definiție. O mulțime de mulțimi A_i, $i \in I$ se numește *familie* de mulțimi I—indexată și se notează cu $(A_i)_{i \in I}$. Familia $(A_j)_{j \in J}$ cu $J \subseteq I$ se numește

subfamilie a familiei date. Familia $(A_i)_{i\in I}$ se numeşte *finită* dacă mulţimea I este finită.

Definiţia reuniunii şi intersecţiei dată în 1.1.1. se generalizează de la două mulţimi la o familie arbitrară de mulţimi.

1.1.3. Definiţie. Fie $(A_i)_{i\in I}$ o familie de mulţimi. Atunci vom scrie:

$$\bigcup_{i\in I} A_i = \{x;\ (\exists)\ i\in I \text{ a.î. } x\in A_i\}\ (\textit{reuniunea familiei } (A_i)_{i\in I})$$

$$\bigcap_{i\in I} A_i = \{x;\ x\in A_i\ (\forall)\ i\in I\}\ (\textit{intersecţia familiei } (A_i)_{i\in I})$$

1.1.4. Propoziţie (Relaţiile lui De Morgan). *Fie X o mulţime şi $(A_i)_{i\in I}$ o familie de submulţimi din X. Atunci avem relaţiile:*

$1^\circ\ \complement(\bigcup_{i\in I} A_i) = \bigcap_{i\in I} (\complement A_i)$; $2^\circ\ \complement(\bigcap_{i\in I} A_i) = \bigcup_{i\in I} (\complement A_i)$.

Dem. $1^\circ\ x\in \complement(\bigcup_i A_i) \Leftrightarrow x\notin \bigcup_i A_i \Leftrightarrow x\notin A_i\ (\forall)\ i\in I \Leftrightarrow x\in \complement A_i\ (\forall)\ i\in I \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x\in \bigcap_i (\complement A_i)$

2° Se obţine din 1°, înlocuind A_i prin $\complement A_i$.

1.1.5. Propoziţie. *Fie $(A_i)_{i\in I}(B_j)_{j\in J}$ două familii de mulţimi şi A o mulţime. Atunci avem relaţiile:*

$1^\circ\ A\cap(\bigcup_{i\in I} A_i) = \bigcup_{i\in I}(A\cap A_i)$; $2^\circ\ A\cup(\bigcap_{i\in I} A_i) = \bigcap_{i\in I}(A\cup A_i)$;

$3^\circ\ (\bigcup_{i\in I} A_i)\cap(\bigcup_{j\in J} B_j) = \bigcup_{(i,j)\in I\times} (A_i\cap B_j)$;

$4^\circ\ (\bigcap_{i\in I} A_i)\cup(\bigcap_{j\in J} B_j) = \bigcap_{(i,j)\in I\times J} (A_i\cup B_j)$;

$5^\circ\ (\bigcup_{i\in I} A_i)\times(\bigcup_{j\in J} B_j) = \bigcup_{(i,j)\in I\times J} (A_i\times B_j)$;

$6^\circ\ (\bigcap_{i\in I} A_i)\times(\bigcap_{j\in J} B_j) = \bigcap_{(i,j)\in I\times J} (A_i\times B_j)$;

7° *Dacă $I = J$ avem* $(\bigcap_{i\in I} A_i)\times(\bigcap_{i\in I} B_i) = \bigcap_{i\in I}(A_i\times B_j)$.

Dem. Evidentă. Să arătăm spre exemplu 1°

$$x\in A\cap(\bigcup_i A_i) \Leftrightarrow x\in A\wedge x\in\bigcup_i A_i \Leftrightarrow x\in A\wedge(\exists)\ i_0\in I,\ x\in A_{i_0} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\exists)\ i_0\in I,\ x\in A\cap A_{i_0} \Leftrightarrow x\in\bigcup_i (A\cap A_i)$$

1.2. Produs cartezian, relaţie binară, funcţie

1.2.1. Definiţie. Se numeşte *produs cartezian* al lui X cu Y şi se notează $X\times Y$ mulţimea tuturor perechilor ordonate (x, y) cu $x\in X$ şi $y\in Y$.

1.2.2. Definiţie. Se numeşte *relaţie binară* (relaţie) de la mulţimea X la mulţimea Y, o submulţime ρ a lui $X\times Y$. O submulţime a lui $X\times X$ se numeşte *relaţie* pe X. Dacă $(x, y)\in\rho\subseteq X\times Y$, vom scrie $x\,\rho\,y$ şi vom spune că *x este în relaţia ρ cu y*.

1.2.3. Definiţie. O relaţie binară f de la mulţimea X la mulţimea Y se numeşte *funcţie* (aplicaţie) *definită pe X cu valori în Y*, dacă:

1° $D_f := \{x\in X;\ (\exists)\ y\in Y$ a.î. $(x, y)\in f\}$ coincide cu X;

2° f este *univocă* i.e. $(\forall)\ (x, y)\in f$ şi $(x, y')\in f \Rightarrow y = y'$.

Vom scrie atunci $y = f(x)$ în loc de $(x, y)\in f$ şi vom spune că $f(x)$ este *imaginea* lui x prin f sau *valoarea funcţiei* f în x.

O funcție f definită pe X cu valori în Y se notează astfel :

$$f : X \to Y : X \xrightarrow{f} Y ; X \ni x \mapsto f(x) \in Y ; y = f(x), x \in X.$$

Observația 1. Vom face o distincție netă între *funcția* f și $f(x)$ *valoarea funcției* f în *punctul* x.

Observația 2. Dacă notăm funcția $f : X \to Y$ sub forma $y = f(x)$, $x \in X$, atunci în locul lui x (*variabilă independentă*) sau a lui y (*variabilă dependentă*) putem scrie orice altă literă, deci avem :

$$\{y = f(x) \ x \in X\} \equiv \{z = f(t), \ t \in X\} \equiv \{u = f(v), \ v \in X\}.$$

1.2.4. Definiție. Fie $f : X \to Y$ o funcție. Se numește *graficul* lui f și se notează cu G_f mulțimea $\{(x, f(x)) ; x \in X\}$ inclusă în $X \times Y$.

1.2.5. Definiție. Fie $f : X \to Y$ și $g : Y \to Z$ două funcții. Funcția $h : X \to Z$ definită prin relația $h(x) = g(f(x))$ $(\forall)$ $x \in X$ se numește *compunerea* lui g cu f și se notează cu $g \circ f$.

Observație. Fie $f, g : X \to X$ două funcții. Atunci $f \circ g$ nu este numaidecît egală cu $g \circ f$.

Contraexemplu. Fie $f(x) = 2^x$, $x \in \mathbf{R}$ și $g(x) = x^3$, $x \in \mathbf{R}$. Atunci $(g \circ f)(x) = 2^{3x}$ $(\forall)$ $x \in \mathbf{R}$ și $(f \circ g)(x) = 2^{x^3}$, $(\forall)$ $x \in \mathbf{R}$, deci $g \circ f \neq f \circ g$.

1.2.6. Definiție. Fie $f : X \to Y$ o funcție și $A \subseteq X$ o mulțime. Vom nota cu $f(A)$ mulțimea $\{y \in Y ; (\exists)\ x \in A, f(x) = y\}$ și o vom numi *imaginea* lui A prin f sau *mulțimea valorilor* lui f pe A. Dacă $B \subseteq Y$, vom nota cu $f^{-1}(B)$ mulțimea $\{x \in X ; f(x) \in B\}$ și o vom numi *preimaginea* lui B prin f sau *imaginea reciprocă* a lui B prin f. Funcția $g : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(Y)$ definită astfel $g(A) = f(A)$ $(\forall)$ $A \in \mathcal{P}(X)$ se numește *extensia lui* f *la mulțimea părților* în timp ce funcția $h : \mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(X)$ definită astfel $h(B) = f^{-1}(B)$ $(\forall)$ $B \in \mathcal{P}(Y)$ se numește *extensia reciprocă a lui* f *la mulțimea părților*.

Așadar avem :

1° $y \in f(A) \Leftrightarrow (\exists)$ $x \in a$ a.î. $f(x) = y$; 2° $x \in f^{-1}(B) \Leftrightarrow f(x) \in B$;

3° $f^{-1}(f(A)) \supseteq A$: 4° $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$.

1.2.7. Definiție. Fie $f : X \to Y$ și $f_1 : X_1 \to Y_1$ două funcții. Vom spune că f și f_1 sînt *egale* și vom scrie $f = f_1$ dacă $X = X_1$, $Y = Y_1$ și $f(x) = f_1(x)$, $(\forall)$ $x \in X$.

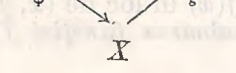
Observație. Uneori vom identifica funcția $f : X \to Y$ cu funcția $f_0 : X \to f(X)$ unde $f_0(x) = f(x)$ $(\forall)$ $x \in X$.

1.2.8. Definiție. Fie X o mulțime și $A \subseteq X$. Atunci funcția $f : A \to X$ definită prin relația $f(x) = x$ $(\forall)$ $x \in A$ se numește *injecția canonică* a lui A în X și se notează prin $A \hookrightarrow X$.

1.2.9. Definiție. Funcția $f : X \to X$ definită prin relația $f(x) = x$, $(\forall) x \in X$ se numește *funcția identitate* pe X și se notează cu $\mathbf{1}_X$ sau id_X.

1.2.10. Definiție. Fie A, X, Y trei mulțimi cu $A \subseteq X$ și $f : A \to Y, g : X \to Y$ două funcții. Vom spune că f este *restricția* lui g la mulțimea A sau că g este o *prelungire* a lui f la mulțimea X, dacă $g(x) = f(x)$ $(\forall)$ $x \in A$. Funcția f se notează $f|_A$ sau f_A.

Așadar avem diagrama : $A \xrightarrow{f = g|_A} Y$ $\boxed{g \circ \varphi = f}$



Exemple.

1. Fie $\mathbf{R}$ mulțimea numerelor reale și ρ o relație pe $\mathbf{R}$ definită astfel: $x \rho y \Leftrightarrow |x| + |y| = 1$. Atunci ρ nu definește o funcție pe $\mathbf{R}$. Într-adevăr $D_\rho = [-1, 1]$ și în plus avem că $(0,1) \in \rho \wedge (0, -1) \in \rho$ nu implică $1 = -1$.

Graficul relației ρ este reprezentat în fig. 1.

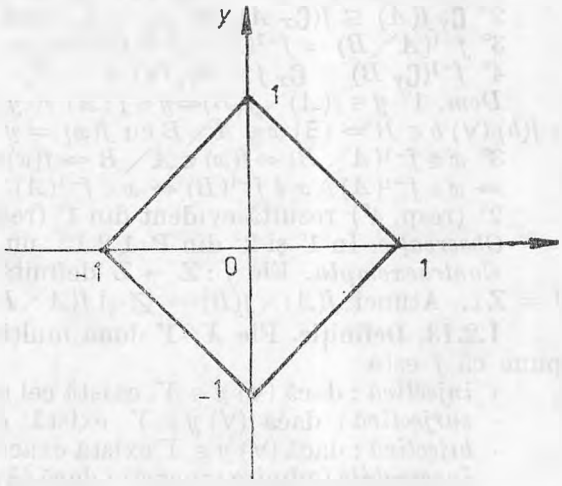


Fig. 1

2. Fie ρ o relație pe $\mathbf{R}$ definită astfel: $x \rho y \Leftrightarrow x - y + 1 = 0$. Atunci ρ definește o funcție de la $\mathbf{R}$ la $\mathbf{R}$ și anume funcția: $x \mapsto 1 + x$, $x \in \mathbf{R}$.

3. Fie $f(x) = \frac{x}{x}$ $(\forall)$ $x \in \mathbf{R}^*$ și $g(x) = 1$, $(\forall)$ $x \in \mathbf{R}$. Atunci $f \neq g$; f este restricția lui g la $\mathbf{R}^*$.

4. Fie $f(x) = \sqrt{x^2}$, $x \in \mathbf{R}$ și $g(x) = |x|$, $(\forall)$ $x \in \mathbf{R}$. Atunci $f = g$.

5. Fie $f(x) = \lg x^2$, $x \in \mathbf{R}^*$ și $g(x) = 2 \lg x$, $x \in \mathbf{R}_+^*$. Atunci $f \neq g$; g este restricția lui f la $\mathbf{R}_+^*$.

6. Fie $f, g : (0,1) \to (0,1)$ două funcții definite sastfel:

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in \left(0, \frac{1}{2}\right) \\ x, & x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right) \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} 2x, & x \in \left(0, \frac{1}{4}\right] \\ \frac{1}{2}, & x \in \left(\frac{1}{4}, 1\right) \end{cases}$$

$$\text{Atunci } (g \circ f)(x) = \begin{cases} 2x^2, & x \in \left(0, \frac{1}{2}\right) \\ \frac{1}{2}, & x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right) \end{cases}, \quad (f \circ g)(x) = \begin{cases} 4x^2, & x \in \left(0, \frac{1}{2}\right) \\ \frac{1}{2}, & x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right) \end{cases}$$

7) Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ o funcție definită astfel $f(x) = x^2$. Atunci $f([0,1]) = f([-1,1]) = [0,1]$, $f^{-1}([0,2]) = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$, $f^{-1}(\{1\}) = \{-1, +1\}$.

1.2.11. Propoziție. *Fie $f : X \to Y$ o funcție. Atunci au loc relațiile:*

1° $f(\bigcup_i A_i) = \bigcup_i f(A_i)$; $f(\bigcap_i A_i) \subseteq \bigcap_i f(A_i)$, $(\forall)$ $A_i \subseteq X$ $(i \in I)$;

2° $f^{-1}(\bigcup_i B_i) = \bigcup_i f^{-1}(B_i)$; $f^{-1}(\bigcap_i B_i) = \bigcap_i f^{-1}(B_i)$, $(\forall)$ $B_i \subseteq Y (i \in I)$.

Dem. 1° $y \in f(\bigcup_i A_i) \Leftrightarrow (\exists)$ $x \in \bigcup_i A_i$ cu $y = f(x) \Leftrightarrow (\exists)$ $i_0 \in I$, $(\exists)$ $x \in A_{i_0}$, cu $y = f(x) \Leftrightarrow (\exists)$ $i_0 \in I$ cu $y \in f(A_{i_0}) \Leftrightarrow y \in \bigcup_i f(A_i)$.

$y \in f(\bigcap_i A_i) \Leftrightarrow (\exists)$ $x \in \bigcap_i A_i$ cu $y = f(x) \Leftrightarrow (\exists)$ $x \in X$ cu $x \in A_i$ $(\forall)$ $i \in I \wedge f(x) = y \Rightarrow y \in f(A_i)$ $(\forall)$ $i \in I \Leftrightarrow y \in \bigcap_i f(A_i)$;

2° $x \in f^{-1}(\bigcup_i B_i) \Leftrightarrow f(x) \in \bigcup_i B_i \Leftrightarrow (\exists)$ $i_0 \in I$ cu $f(x) \in B_{i_0} \Leftrightarrow (\exists)$ $i_0 \in I$ cu $x \in f^{-1}(B_{i_0}) \Leftrightarrow x \in \bigcup_i f^{-1}(B_i)$

$x \in f^{-1}(\bigcap_i B_i) \Leftrightarrow f(x) \in \bigcap_i B_i \Leftrightarrow f(x) \in B_i\ (\forall)\ i \in I \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \in f^{-1}(B_i)\ (\forall)\ i \in I \Leftrightarrow x \in \bigcap_i f^{-1}(B_i)$

1.2.12. Propoziție. *Fie $f : X \to Y$ o aplicație. Atunci au loc relațiile :*

1° $f(A) \setminus f(B) \subseteq f(A \setminus B)$, $(\forall)\ A,\ B \subseteq X$;

2° $\complement_Y f(A) \subseteq f(\complement_X A)$, $(\forall)\ A \subseteq X$, *dacă* $f(X) = Y$;

3° $f^{-1}(A \setminus B) = f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B)$, $(\forall)$, $A, B \subseteq Y$;

4° $f^{-1}(\complement_Y B) = \complement_X f^{-1}(B)$, $(\forall)\ B \subseteq Y$.

Dem. 1° $y \in f(A) \setminus f(B) \Leftrightarrow y \in f(A) \wedge y \notin f(B) \Leftrightarrow (\exists)\ x \in A$ cu $f(x) = y \wedge y \neq f(b)\ (\forall)\ b \in B \Rightarrow (\exists)\ x \in A \setminus B$ cu $f(x) = y \Leftrightarrow y \in f(A \setminus B)$;

3° $x \in f^{-1}(A \setminus B) \Leftrightarrow f(x) \in A \setminus B \Leftrightarrow f(x) \in A \wedge f(x) \notin B \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \in f^{-1}(A) \wedge x \notin f^{-1}(B) \Leftrightarrow x \in f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B)$.

2° (resp. 4°) rezultă evident din 1° (resp. 3°).

Observație. În 1° și 2° din P. 1.2.12. nu avem numaidecît egalitate.

Contraexemplu. Fie $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ definită astfel $f(x) = x^2$ și fie $A = \mathbf{Z}$ și $B = \mathbf{Z}_+$. Atunci $f(A) \setminus f(B) = \varnothing$ și $f(A \setminus B) = \mathbf{N}$.

1.2.13. Definiție. Fie X, Y două mulțimi și $f : X \to Y$ o aplicație. Vom spune că f este

- *injectivă* : dacă $(\forall)\ y \in Y$, există cel mult un $x \in X$ cu $f(x) = y$;
- *surjectivă* : dacă $(\forall)\ y \in Y$ există cel puțin un $x \in X$ cu $f(x) = y$;
- *bijectivă* : dacă $(\forall)\ y \in Y$ există exact un $x \in X$ cu $f(x) = y$;
- *inversabilă* (admite inversă) : dacă $(\exists)\ g : Y \to X$ a.î. $g \circ f = \mathbf{1}_X$ și $f \circ g = \mathbf{1}_Y$; funcția g astfel definită se numește *inversa* lui f și se notează cu f^{-1}.

Se numește *permutare* a mulțimii X, o aplicație bijectivă de la X la X.

Observația 1. Fie $X, Y \subseteq \mathbf{R}$ și $f : X \to Y$ o funcție. Dacă f este inversabilă, atunci f și f^{-1} au graficele simetrice față de prima bisectoare.

Observația 2. Dacă funcția $f : X \to Y$ este injectivă și nu este bijectivă, vom vorbi uneori de *inversa lui f pe imagine* i.e. de funcția $g : f(X) \to X$ definită astfel: $g(f(x)) = x\ (\forall)\ f(x) \in f(X)$.

1.2.14. Propoziție. *Fie $f : X \to Y$ o aplicație. Atunci :*

1° *f injectivă* $\Leftrightarrow (\forall)\ x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$, *rezultă* $f(x_1) \neq f(x_2)$;

2° *f surjectivă* $\Leftrightarrow f(X) = Y$;

3° *f bijectivă* $\Leftrightarrow$ *f injectivă și surjectivă* ;

4° *Dacă f este inversabilă, atunci inversa lui f este unic determinată de f.*

Dem. Evidentă.

1.2.15. Propoziție. *Fie $f : X \to Y$ o aplicațeie. Atunci :*

1° *f injectivă* $\Leftrightarrow (\exists)\ g : Y \to X$ (*surjectivă*) *a.î.* $g \circ f = \mathbf{1}_X$;

2° *f surjectivă* $\Leftrightarrow (\exists)\ g : Y \to X$ (*injectivă*) *a.î.* $f \circ g = \mathbf{1}_Y$;

3° *f bijectivă* $\Leftrightarrow$ *f inversabilă.*

Dem. 1° ($\Rightarrow$) Fie $g_0 : f(X) \to X$ o aplicație definită astfel $g_0(f(x)) = x$, $(\forall)\ x \in X$. Prelungim g_0 pe Y punînd, spre exemplu, g constant pe $Y \setminus f(X)$. Atunci $g(f(x)) = g_0(f(x)) = x$, $(\forall)\ x \in X$.

($\Leftarrow$) Fie $g : Y \to X$ cu $g \circ f = \mathbf{1}_X$ și $x_1, x_2 \in X$ cu $f(x_1) = f(x_2)$. Atunci $x_1 = g(f(x_1)) = g(f(x_2)) = x_2$, deci f injectivă.

2° ($\Rightarrow$) $(\forall)\ y \in Y$ mulțimea $A_y := f^{-1}(\{y\})$ este nevidă ; fie $x_y \in A_y$ fixat. Punem $g(y) = x_y$, $y \in Y$. Aplicația g este injectivă, deoarece $A_y \cap A_{y'} = \varnothing$ $(y \neq y')$. Evident avem $f(g(y)) = f(x_y) = y$, $(\forall)\ y \in Y$.

($\Leftarrow$) Fie $g : Y \to X$ cu $f \circ g = \mathbf{1}_Y$ și $y \in Y$ fixat. Atunci $f(x) = y$ pentru $x = g(y)$, deci f este surjectivă.

3° ($\Rightarrow$) $(\forall)\ y \in Y$ mulțimea $f^{-1}(\{y\})$ conține exact un punct ; să-l notăm cu $g(y)$. Obținem o funcție $g : Y \to X$ care satisface evident relațiile : $g \circ f = \mathbf{1}_X$ și $f \circ g = \mathbf{1}_Y$, deci f este inversabilă.

Implicația ($\Leftarrow$) rezultă din 1° și 2°.

Corolar 1. *Fie* $f : X \to X$ *o funcție cu proprietatea că* $f \circ f = 1_X$. *Atunci* f *este bijectivă.*

1.2.16. Propoziție. *Fie* $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ *două funcții. Atunci*

1° f *și* g *injective (resp. surjective)* $\Rightarrow g \circ f$ *injectivă (resp. surjectivă);*

2° f *și* g *bijective* $\Rightarrow g \circ f$ *bijectivă și avem* $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

Dem. 1° Fie $x_1, x_2 \in X$ cu $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$. Funcția g fiind injectivă, rezultă $f(x_1) = f(x_2)$, deci f fiind injectivă, avem $x_1 = x_2$, prin urmare $g \circ f$ este injectivă.

Fie acum $z \in Z$ fixat. Funcția g fiind surjectivă, $(\exists)\ y \in Y$ cu $g(y) = z$. Cum f este și ea surjectivă $(\exists)\ x \in X$ cu $f(x) = y$, deci $(g \circ f)(x) = z$ etc.

2° Bijectivitatea lui $g \circ f$ rezultă din 1° și 2°, deci (P.1.2.15.) $g \circ f$ este inversabilă. Evident avem :

$$(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = 1_X,\ (g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = 1_Z,$$

deci $f^{-1} \circ g^{-1}$ este inversa lui $g \circ f$ i.e. $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

1.2.17. Propoziție. *Fie* $f : X \to Y$ *o funcție. Atunci cond.* 1°—3° *sînt echivalente* :

1° f *injectivă*;

2° $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B), (\forall)\ A, B \subseteq X$;

3° $f(A \setminus B) = f(A) \setminus f(B), (\forall)\ A, B \subseteq X$.

Dem. $1° \Rightarrow 2°$. Dacă $y \in f(A \cap B)$, $(\exists)\ x \in A \cap B$ cu $f(x) = y$, deci $y = f(x) \in f(A)$ și $y = f(x) \in f(B)$ și deci $y \in f(A) \cap f(B)$. Reciproc, dacă $y \in f(A) \cap f(B)$, $(\exists)\ x_1 \in A$, $(\exists)\ x_2 \in B$ cu $f(x_1) = y \wedge f(x_2) = y$. Funcția f fiind injectivă, avem $x_1 = x_2 \in A \cap B$, deci $(\exists)\ x \in A \cap B$ cu $f(x) = y$ și deci $y \in f(A \cap B)$.

$2° \Rightarrow 1°$ Fie $x_1, x_2 \in X$ cu $f(x_1) = f(x_2)$. Punem $A = \{x_1\}$ și $B = \{x_2\}$. Atunci $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B) = f(A) \neq \emptyset$, deci $A \cap B \neq \emptyset$ și deci $x_1 = x_2$. Prin urmare f injectivă etc.

Exemple.

1. Fie $f : \mathbf{N} \to \mathbf{Z}$ definită astfel $f(n) = (-1)^n E\left(\frac{n}{2}\right)$. Atunci f este bijectivă (Observăm că $f(2n) = n$ și $f(2n+1) = -n$, $(\forall)\ n \in \mathbf{N}$).

2. Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definită astfel $f(x) = ax^2 + bx + c$. Atunci f este bijectivă $\Leftrightarrow a = 0$ și $b \neq 0$.

3. Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definită astfel $f(x) = ax^3 + b$. Atunci f bijectivă $\Leftrightarrow a \neq 0$.

4. Funcția $\sin : \mathbf{R} \to [-1,1]$ este surjectivă și nu este injectivă ($\sin 0 = \sin \pi$). Funcția $\sin\Big|_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}$ aplică bijectiv $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ pe $[-1,1]$. Inversa acestei funcții se notează cu arc sin. Așadar avem :

$$\text{arc sin} = (\sin\Big|_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]})^{-1} : [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

Arc sin $y := \sin^{-1}\{y\} = (-1)^k \text{ arc sin } y + \pi \mathbf{Z}, (\forall)\ y \in [-1, 1]$.

Altfel spus :$(\forall)\ y \in [-1, 1]$, arc sin y este egal cu *unicul* element x din intervalul $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ care verifică relația $\sin x = y$, în timp ce Arc sin y este *mulțimea* tuturor elementelor x din $\mathbf{R}$ care verifică relația $\sin x = y$. Observăm că

$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ este o submulțime maximală a lui $\mathbf{R}$ pe care funcția sin este injectivă. Analog avem

$$\text{arc cos} = (\cos|_{[0,\pi]})^{-1}, \text{ arc tg} = (\text{tg}|_{(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})})^{-1} \text{ etc.}$$

1.3. Relație de ordine și de echivalență

1.3.1. Definiție. Fie X o mulțime și ρ o relație binară pe X. Atunci ρ se numește:

1° *reflexivă*: dacă $x \rho x$ $(\forall)$ $x \in X$;
2° *ireflexivă*: dacă $x \rho x$, $(\forall)$ $x \in X$;
3° *simetrică*: dacă $(\forall)$ $x, y \in X$, $x \rho y \Rightarrow y \rho x$;
4° *antisimetrică*: dacă $(\forall)$ $x, y \in X$, $x \rho y \wedge y \rho x \Rightarrow x = y$;
5° *tranzitivă*: dacă $(\forall)$ $x, y \in X$, $x \rho y \wedge y \rho z \Rightarrow x \rho z$;
6° *totală (liniară)*: dacă $(\forall)$ $x, y \in X \Rightarrow x \rho y \vee y \rho x$;
7° *de preordine*: dacă ρ este reflexivă și tranzitivă;
8° *de ordine*: dacă ρ este reflexivă, antisimetrică și tranzitivă;
9° *de ordine strictă*: dacă ρ este ireflexivă și tranzitivă;
10° *de echivalență*: dacă ρ este reflexivă, simetrică și tranzitivă.

O relație de ordine (resp. de ordine strictă) pe o mulțime X se notează cu $\leqslant$, $\preccurlyeq$ (resp. $<$, $\prec$), iar o relație de echivalență pe X se notează cu $\sim$ sau $\equiv$.

1.3.2. Definiție. O mulțime X pe care s-a definit o relație de (pre)ordine $\leqslant$ se notează cu X $[\leqslant]$ sau $(X, \leqslant)$ și se numește *(pre)ordonată*.

1.3.3. Definiție. Dacă $\leqslant$ (resp. $<$) este o relație de ordine (resp. ordine strictă) pe o mulțime X, atunci: relația $<$ (resp. $\leqslant$) pe X, definită astfel:

$$x < y \Leftrightarrow x \leqslant y \wedge x \neq y \quad (\text{resp. } x \leqslant y \Leftrightarrow x < y \vee x = y)$$

se numește *relația de ordine strictă* (resp. *relația de ordine*) *asociată* relației $\leqslant$ (resp. $<$).

Exemple.

1. Dacă $n, m \in \mathbf{N}$ punem $n \preccurlyeq m \Leftrightarrow D(n) \leqslant D(m)$, unde $D(k)$ este numărul divizorilor lui k. Atunci relația $\preccurlyeq$ este reflexivă, tranzitivă, totală și nu este simetrică sau antisimetrică.

2. $(\forall)$ $z = (x, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ și $z' = (x', y') \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ să punem: $z \preccurlyeq z' \Leftrightarrow x \leqslant x' \wedge y = y'$. Atunci relația $\preccurlyeq$ este o relație de ordine pe $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$.

3. Dacă $A, B \in \mathcal{Z}(\mathbf{R})$ să punem $A \prec B \Leftrightarrow a < b$ $(\forall)$ $a \in A$ și $b \in B$. Atunci relația $\prec$ este o relație de ordine strictă în $\mathcal{Z}(\mathbf{R})$.

4. Fie X o mulțime, $\mathcal{Z}(X)$ mulțimea părților lui X și pentru $(\forall)$ $A, B \in \mathcal{Z}(X)$ să punem $A \sim B \Leftrightarrow (\exists)$ $f: A \to B$ o funcție bijectivă. Atunci relația $\sim$ este o relație de echivalență pe mulțimea $\mathcal{Z}(X)$.

5. $\forall z = (x,y)$ și $z' = (x,y)$ din $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ punem $z \leqslant z' \Leftrightarrow x < x'$ sau $x = x'$ și $y = y'$. Atunci relația $\leqslant$ este o relație de ordine pe mulțimea $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ *(ordinea lexicografică)*.

6. Fie X o mulțime și $\mathcal{F}(X) = \{f; f: X \to \mathbf{R}\}$. Dacă $f, g \in \mathcal{F}(X)$ să punem: $f \prec g \Leftrightarrow (\exists)$ $A \subseteq X$ finită a.î. $f(x) \leqslant g(x)$, $(\forall) x \in \complement A$. Atunci relația $\prec$ este reflexivă și tranzitivă pe $\mathcal{F}(X)$.

Dacă punem $f \prec g \Leftrightarrow f(x) \leqslant g(x)$, $(\forall)$ $x \in X$, atunci relația $\prec$ este reflexivă, antisimetrică și tranzitivă.

1.3.4. Definiție. Fie $X[\leqslant]$ o mulțime ordonată și $A \subseteq X$. Vom spune că M (resp. m) $\in X$ este un *majorant* (resp. *minorant*) al mulțimii A dacă $x \leqslant M$ (resp. $m \leqslant x$), $(\forall)\ x \in A$. O mulțime care posedă majoranți și minoranți se numește *mărginită*. Un minorant (resp. majorant) al mulțimii A care aparține lui A se numește *prim element*, *cel mai mic element* sau *minim* (resp. *ultim element*, *cel mai mare element* sau *maxim*) al lui A și se notează cu $\min A$ (resp. $\max A$). Cel mai mic majorant (resp. cel mai mare minorant) al mulțimii A se numește *margine superioară* (resp. *margine inferioară*) a mulțimii A și se notează cu $\sup A$, $\sup\limits_{x\in A} x, \ldots$, (resp. $\inf A$, $\inf\limits_{x\in A} x, \ldots$). Mulțimea $X[\leqslant]$ se numește *bine ordonată*, dacă orice submulțime nevidă a sa posedă prim element. Un element $m \in X$ se numește *maximal* (resp. *minimal*), dacă orice element x din X comparabil cu m este mai mic (resp. mai mare) sau egal cu m, adică : $x \in X \wedge x \geqslant m$ (res . $x \leqslant m$) $\Rightarrow x = m$.

Exemple.

1. Mulțimea $\mathbf{N}$ nu posedă majoranți ; $\min \mathbf{N} = \inf \mathbf{N} = 1$.

2. Fie X o mulțime și $\mathcal{F}(X) = \{f : X \to \mathbf{R}\}$. Dacă $f, g \in \mathcal{F}(X)$ să punem : $f \leqslant g \Leftrightarrow f(x) \leqslant g(x)$, $(\forall)\ x \in X$. Atunci relația $\leqslant$ este o relație de ordine pe mulțimea $\mathcal{F}(X)$ și orice mulțime finită $H \subseteq \mathcal{F}(X)$ admite margine inferioară și marginea superioară : $(\sup H)(x) = \sup\limits_{f\in H} f(x)$, $(\inf H)(x) = \inf\limits_{f\in H} f(x)$, $(\forall)\ x \in X$.

3. Fie X o mulțime și $\mathcal{Q}(X)$ mulțimea părților lui X, ordonată prin relația de incluziune $\subseteq$, adică $(\forall)\ A, B \in \mathcal{Q}(X)$, avem $A \leqslant B \Leftrightarrow A \subseteq B$. Atunci $\emptyset$ (resp. X) este prim (resp. ultim) element al mulțimii $(\mathcal{Q}(X), \leqslant)$. Dacă $A_i \in \mathcal{Q}(X)$ $(i \in I)$, atunci avem :

$$\inf_{i\in I} A_i = \bigcap_{i\in I} A_i \text{ și } \sup_{i\in I} A_i = \bigcup_{i\in I} A_i$$

4. Fie X o mulțime nevidă și $\mathcal{Q}^*(X)$ mulțimea tuturor părților nevide ale lui X, ordonată prin incluziune $\subseteq$. Atunci $(\forall)\ x \in X$, mulțimea $\{x\}$ este un element minimal în $\mathcal{Q}^*(X)$.

1.3.5. Definiție. Fie X o mulțime și $\sim$ o relație de echivalență pe X. Pentru $(\forall)\ x \in X$ să notăm cu $\dot{x}$, $\hat{x}$ sau C_x mulțimea $\{y \in X ; y \sim x\}$ și să o numim *clasă de echivalență* definită de x. Mulțimea tuturor claselor de echivalență distincte între ele se notează prin $X/\sim$ și se numește *mulțimea cît* (factor) a lui X prin relația $\sim$.

Exemple.

1. Fie p un număr prim și pentru $(\forall)\ m, n \in \mathbf{Z}$ să punem : $n \sim m \Leftrightarrow n - m$ este multiplu de p. Atunci relația $\sim$ este o relație de echivalență pe $\mathbf{Z}$, iar mulțimea $\mathbf{Z}/_\sim$ este formată din clasele $\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \ldots, \widehat{p-1}$.

2. Fie X planul euclidian și pentru orice două puncte $P(x, y)$, $P'(x', y')$ din X să punem $P \sim P' \Leftrightarrow y = y'$. Atunci relația $\sim$ este o relație de echivalență pe X și $X/_\sim$ este formată din mulțimea tuturor dreptelor paralele cu axa Ox.

3. Fie $f : X \to Y$ o funcție. Dacă $x, x' \in X$, să punem : $x \sim x' \Leftrightarrow f(x) = f(x')$. Atunci relația $\sim$ este o relație de echivalență pe X și avem $\hat{x} = f^{-1}(f(x))$, $(\forall)\ x \in X$.

1.3.6. Propoziție. *Fie X o mulțime și $\sim$ o relație de echivalență pe X. Atunci mulțimea factor $X/_\sim$ constituie o partiție a lui X.*

Dem. Fie C_x clasa de echivalență definită de x din X. Atunci $(\forall)\ x \in X$, avem $x \sim x$, deci $x \in C_x$ încît $C_x \neq \emptyset$ și $\bigcup\limits_{x\in X} C_x = X$. Mai departe $(\forall)\ x, y \in X$ avem : $C_x = C_y \Leftrightarrow x \sim y$ (1). Într-adevăr, dacă $C_x = C_y$, rezultă $x \in C_x = C_y$, deci $x \sim y$. Reciproc, dacă $x \sim y$ și $x' \in C_x$, rezultă $x' \sim x$, deci relația $\sim$ fiind

tranzitivă, deducem $x' \sim y$ și deci $x' \in C_y$ încît $C_x \subseteq C_y$; analog $C_y \subseteq C_x$, deci $C_x = C_y$. Fie acum $C_x, C_y \in X/\sim$ arbitrare; presupunem că $C_x \cap C_y \neq \emptyset$, deci $(\exists)\ z \in C_x \cap C_y$. Atunci $z \sim x$ și $z \sim y$, deci $x \sim y$ și deci $(cf(1))\ C_x = C_y$.

Așadar două clase distincte sînt disjuncte, prin urmare $X/\sim$ este o partiție a lui X.

Corolar 1. *Fie X o mulțime și $\sim$ o relație de echivalență pe X. Atunci* $(\exists)\ (A_i)_{i\in I}$ *o partiție a lui X cu proprietățile* : $1°\ (\forall)\ i \in I, (\forall)\ x, y \in A_i$, *avem* $x \sim y$; $2°\ (\forall)\ x, y \in X, x \sim y\ (\exists)\ i \in I$ *cu* $x, y \in A_i$.

1.3.7. Propoziție. Fie $X\ [\leqslant]$ *o mulțime preordonată. Dacă* $x, y \in X$ *să punem* : $x \sim y \Leftrightarrow x \leqslant y \wedge y \leqslant x$. *Atunci relația $\sim$ este o relație de echivalență pe X; fie $X/\sim$ mulțimea cît a lui X prin $\sim$. Dacă $\hat{x}, \hat{y} \in X/\sim$ să punem $\hat{x} \preccurlyeq \hat{y} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (\exists)\ x' \in \hat{x}, (\exists)\ y' \in \hat{y}$ a.î. $x' \leqslant y'$. Relația $\preccurlyeq$ astfel definită este o relație de ordine pe $X/\sim$.*

Dem. Evident relația $\sim$ este reflexivă și simetrică. Fie mai departe $x, y, z \in X$ cu $x \sim y$ și $y \sim z$. Atunci avem $x \leqslant y \wedge x \leqslant x$ și $y \leqslant z \wedge z \leqslant y$, de unde din tranzitivitatea relației $\leqslant$, rezultă că $x \leqslant z \wedge z \leqslant x$, deci $x \sim z$ și deci relația $\sim$ este tranzitivă. Așadar relația $\sim$ este de echivalență pe X.

Să arătăm că $\preccurlyeq$ este o relație de ordine pe $X/\sim$. Observăm în prealabil că $\preccurlyeq$ este bine definită. Într-adevăr, fie $x' \in \hat{x}, y' \in \hat{y}$ fixați. Atunci $x' \leqslant x \wedge x \leqslant x''$ și $y' \leqslant y \wedge y \leqslant y'$, deci $x' \leqslant y' \Leftrightarrow x \leqslant y$ și deci relația $\preccurlyeq$ este coerent definită.

Evident $\preccurlyeq$ este reflexivă și tranzitivă. În fine, fie $\hat{x}, \hat{y} \in X/\sim$ cu $\hat{x} \preccurlyeq \hat{y} \wedge \hat{y} \preccurlyeq \hat{x}$. În acest caz $x \leqslant y \wedge y \leqslant x$, deci $x \sim y$ și deci $\hat{x} = \hat{y}$, încît $\preccurlyeq$ este antisimetrică prin urmare o relație de ordine.

1.4. Mulțimi finite, infinite, numerabile

Mulțimea numerelor naturale stă la baza întregei matematici. Să definim axiomatic numerele naturale.

1.4.1. Definiție (Axiomele lui Peano). Se numește *mulțime a numerelor naturale* o mulțime A pe care s-a definit o aplicație $A \ni x \mapsto x^* \in A$, numită *lege de succesiune* pe A și care satisface proprietățile :

Axioma I. În A s-a distins un element numit *prim element* al lui A, notat cu 1 (sau 0).

Axioma II. Legea de succesiune pe A este o injecție a mulțimii A în mulțimea $A \setminus \{1\}$.

Axioma III. Fie $B \subseteq A$ o mulțime cu proprietățile : (i) $1 \in B$; (ii) $x \in B \Rightarrow$ $\Rightarrow x^* \in B$. Atunci $B = A$.

Observația 1. Pînă în prezent nu s-a demonstrat dacă sistemul de axiome dat de Peano este *independent* și *necontradictoriu*.

Observația 2. Fie $A^* = \{x^*;\ x \in A\}$ și $B = A^* \cup \{1\}$. Evident $B \subseteq A$, $1 \in B$ și $(\forall)\ x \in B$ rezultă $x^* \in B$. Atunci din axioma III rezultă că $B = A$ și cum din axioma II avem că $1 \notin A^*$, rezultă că $A^* = A \setminus \{1\}$, prin urmare legea de succesiune pe A este o bijecție a mulțimii A pe mulțimea $A \setminus \{1\}$.

Observația 3. Fie $(A, f, 1)$ și $(A', f', 1')$ două mulțimi de numere naturale, în care legea de succesiune și primul element sînt f și 1 respectiv f' și $1'$. Atunci $(\exists !)\ \varphi : A \to A'$ bijectivă a.î. $\varphi(1) = 1'$ și $\varphi \circ f = f \circ \varphi$. Așadar mulțimea numerelor naturale este *unic determinată* pînă la o funcție φ cu proprietățile de mai sus.

Un exemplu intuitiv de mulțime cu succesor este următorul :

$$\{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\{\emptyset\}\}\}, \ldots$$

în care legea de succesiune asociază mulțimii M, mulțimea $\{M\}$.

Fixăm o mulțime de numere naturale odată pentru totdeauna și o notăm cu $\mathbf{N}$; elementele sale se notează cu $n, m, p, q, \ldots$ Succesorul lui 1 se notează cu 2, a lui 2 cu 3 etc. Așadar vorbind *intuitiv* putem spune că $\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$

1.4.2. Definiție. Se numește *funcție propozițională* o aplicație care asociază fiecărui număr natural n o propoziție, notată $P(n)$.

Exemple.

1. $P(n)$: $2n + 1$ *se divide la* 3.

Observăm că $P(1)$ este adevărată, $P(2)$ este falsă, $P(3)$ este falsă, $P(4)$ adevărată.

2. $P(n)$: $2^n > n$.

Observăm că P(1) este adevărată, P(2) este adevărată, P(3) este adevărată.

Din exemplul 2) se vede că apare problema : cînd o funcție propozițională este adevărată pentru orice număr natural n?

1.4.3. Teoremă (Principiul inducției matematice). *Fie* $n \mapsto P(n)$, $n \in \mathbf{N}$, *o funcție propozițională. Să presupunem că* P *satisface proprietățile* :

1° $P(1)$ *este adevărată*;

2° $(\forall)$ $n \geqslant 1$ *cu* $P(n)$ *adevărată, rezultă* $P(n+1)$ *adevărată.*

Atunci $P(n)$ *este adevărată,* $(\forall)$ $n \geqslant 1$.

Dem. Fie $A = \{n \in \mathbf{N};\ P(n) \text{ adev.}\}$. Atunci $1 \in A$ (cf. 1°) și $(\forall)$ $n \in A$ rezultă $n + 1 \in A$ (cf. 2°).

Din axioma III a lui Peano rezultă că $A = \mathbf{N}$, deci $P(n)$ este adevărată, $(\forall)$ $n \geqslant 1$.

Observația 1. În practică, principiul inducției se aplică, cel mai adesea, sub forma :

1° $(\exists)$ $n_0 \geqslant 1$ cu $P(n_0)$ adevărată;

2° $(\forall)$ $n \geqslant n_0$ cu $P(n)$ adevărată $\Rightarrow$ $P(n+1)$ adevărată.

Concluzie : $P(n)$ adevărată, $(\forall)$ $n \geqslant n_0$.

Observația 2. Condiția 2° din T. 1.4.3. exprimă faptul că $P(n+1)$ este adevărată condiționat i.e. ea este adevărată, dacă $P(n)$ este adevărată. Concluzia exprimă faptul că $P(n)$ este adevărată *necondiționat*.

★

Se arată imediat, utilizînd principiul inducției, că funcția succesor induce pe $\mathbf{N}$ o *structură algebrică* și o relație de *ordine totală* $\leqslant$, definită, astfel :

Punem $n + 1 := n^*$, $(\forall)$ $n \in \mathbf{N}$, apoi $n + (m+1) := (n+m)^*$, $n \cdot 1 := n$, $n(m+1) := nm + n$, $(\forall)$ $n, m \in \mathbf{N}$ și în fine $(\forall)$ $n, m \in \mathbf{N}$ punem $n < m \Leftrightarrow (\exists)$ $p \in N$ a.î. $n + p = m$.

Cu ajutorul lui $\mathbf{N}$ se poate defini mulțimea numerelor *întregi* $\mathbf{Z} := \{\ldots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ cu ajutorul căreia se poate defini mulțimea numerelor *raționale* $\mathbf{Q} := \{p/q;\ p, q \in \mathbf{Z},\ q \neq 0\}$ cu care se definește, în fine, mulțimea numerelor *reale* $\mathbf{R}$ (v. Cap. 2).

Deoarece $\mathbf{N} = \{n \in \mathbf{Z};\ n \geqslant 1\}$, vom scrie adeseori „$n \geqslant 1$" în loc de „$n \in \mathbf{N}$". Mulțimea $\mathbf{N} \cup \{0\}$ se notează cu $\mathbf{N}_0$.

Exemplul 1. Să se arate identitatea lui Catalan :

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots - \frac{1}{2n} = \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n},\ (\forall)\ n \geqslant 1.$$

Notăm cu $P(n)$ identitatea din enunț, n fixat. Atunci

$$P(1) \text{ adevărată} : 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{1+1}.$$

Fie $n \geqslant 1$ cu $P(n)$ adevărată. Atunci avem

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\ldots-\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+2}=\left(\frac{1}{n+1}+\ldots+\frac{1}{2n}\right)+$$

$$+\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+2}=\left(\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}\right)+\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+2}+$$

$$+\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}.$$

deci $P(n+1)$ este adevărată.

Prin urmare $P(n)$ este adevărată, $(\forall)\ n \geqslant 1$.

Exemplul 2. *Să se arate inegalitatea*:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{2n+1}{2n} \leqslant \frac{1}{\sqrt{3n+1}},\ (\forall)\ n \geqslant 1.$$

Notăm cu $P(n)$ inegalitatea din enunț, $n \geqslant 1$.

P(1) adevărată: $\frac{1}{2}=\frac{1}{\sqrt{3\cdot 1+1}}$.

Fie $k \geqslant 1$ pentru care $P(k)$ este adevărată. Atunci

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{2k-1}{2k}\cdot\frac{2k+1}{2k+2} \leqslant \frac{1}{\sqrt{3k+1}}\cdot\frac{2k+1}{2k+2}.$$

Rămîne să arătăm că

$$\frac{1}{\sqrt{3k+1}}\cdot\frac{2k+1}{2k+2} \leqslant \frac{1}{\sqrt{3k+4}} \tag{1}$$

Or,

$$(1) \Leftrightarrow \frac{2k+1}{2k+2} \leqslant \sqrt{\frac{3k+1}{3k+4}} \Leftrightarrow (2k+1)^2\cdot(3k+4) \leqslant (2k+2)^2(3k+1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 12k^3+28k^2+19k+4 \leqslant 12k^3+28k^2+20k+4.$$

Aşadar (1) este adevărată, deci $P(k+1)$ este adevărată.

Prin urmare $P(n)$ este adevărată, $(\forall)\ n \geqslant 1$.

Exemplul 3. *Să se arate inegalitatea*:

$$\sqrt[n+1]{n+1} < \sqrt[n]{n},\ (\forall)\ n \geqslant 3 \tag{1}$$

Inegalitatea (1) este echivalentă cu inegalitatea

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < n,\ (\forall)\ n \geqslant 3 \tag{2}$$

Evident $\left(1+\frac{1}{3}\right)^3 < 3$, deci P(3) este adevărată.

Fie $k > 3$ pentru care $P(k-1)$ este adevărată. Deoarece

$$\frac{1+\frac{1}{k}}{1+\frac{1}{k-1}} < 1, \text{ avem } \frac{\left(1+\frac{1}{k}\right)^k}{\left(1+\frac{1}{k-1}\right)^{k-1}} < 1+\frac{1}{k-1},$$

deci

$$\left(1+\frac{1}{k}\right)^k < \frac{k}{k-1}\left(1+\frac{1}{k-1}\right)^{k-1} < \frac{k}{k-1}\cdot(k-1) = k.$$

Aşadar $P(k)$ este adevărată şi deci $P(n)$ este adevărată, $(\forall)\ n \geqslant 3$.

Prin urmare inegalitatea (2) şi deci (1) este adevărată.

1.4.4. Definiţie. Două mulţimi A şi B se numesc *echipotente* şi se scrie $A \sim B$, dacă $(\exists)\ f: A \to B$ bijectivă. Se numeşte *cardinalul* unei mulţimi A, un simbol asociat lui A, notat cu card A, a.î. card A = card $B \Leftrightarrow A \sim B$. Fie A şi B două mulţimi; vom scrie card $A \leqslant$ card B, dacă $A \sim B_1 \subseteq B$ şi card $A <$ $<$card B, dacă $A \sim B_1 \subseteq B$, iar A neechipotent cu B. Cardinalul mulţimii vide se notează cu 0; cardinalul mulţimii $\{1, 2, \ldots, n\}$, unde $n \in \mathbf{N}$, se notează cu n; cardinalul mulţimii $\mathbf{N}$ se notează cu $\aleph_0$ (alef zero). O mulţime A se numeşte: *finită*, dacă $A = \emptyset$ sau $(\exists)\ n \in \mathbf{N}$ cu $A \sim \{1, 2, \ldots, n\}$; *infinită*, dacă A nu este finită; *numerabilă*, dacă A este echipotentă cu $\mathbf{N}$ i.e. $A \sim \mathbf{N}$; *cel mult numerabilă*, dacă A este finită sau numerabilă i.e. $A \sim N_1 \subseteq N$. Dacă A este numerabilă i.e. $A \sim \mathbf{N}$ şi $f: A \to \mathbf{N}$ este o bijecţie, iar $f(n)$ îl notăm cu $a_n (n \in \mathbf{N})$, atunci vom scrie $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$ şi vom spune că am realizat o *enumerare* a mulţimii A. Analog, dacă $A \sim \{1, 2, \ldots, n\}$ şi $k \leftrightarrow a_k$ $(k = \overline{1, n})$, vom scrie $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ şi vom spune că am realizat o *enumerare* a mulţimii A.

1.4.5. Teoremă (C a n t o r). *Fie A o mulţime arbitrară. Atunci* card $A <$ $<$card $\mathcal{P}(A)$.

Dem. Dacă $A = \emptyset$, avem: card $A = 0 < 1 =$ card $\mathcal{P}(A)$. Presupunem $A = \emptyset$. Deoarece aplicaţia $A \ni x \mapsto \{x\} \in \mathcal{P}(A)$ este injectivă, avem card $A \leqslant$ $\leqslant$ card $\mathcal{P}(A)$. Presupunem card $A =$ card $\mathcal{P}(A)$, deci $(\exists)\ f: A \to \mathcal{P}(A)$ bijectivă; notăm $f(x)$ prin $A_x (x \in A)$. Considerăm mulţimea $M := \{x \in A;\ x \notin A_x\}$. Cum $M \in \mathcal{P}(A)$, $(\exists)$, $x_0 \in A$ cu $A_{x_0} = M$. Dacă $x_0 \in A_{x_0}$, avem $x_0 \notin M = A_{x_0}$, absurd, iar dacă $x_0 \notin A_{x_0}$, avem $x_0 \in M = A_{x_0}$, din nou absurd. Rămîne că card $A \neq$ $\neq$ card $\mathcal{P}(A)$, deci card $A <$ card $\mathcal{P}(A)$.

1.4.6. Definiţie. Se numeşte *şir* de elemente din mulţimea X, o funcţie $f: \mathbf{N} \to X$ şi se notează cu $f = (f(n))_{n \geqslant 1}$ sau $f = (x_n)_{n \geqslant 1}$, unde $x_n = f(n)$, $(\forall)$ $n \geqslant 1$. Se numeşte *subşir* al şirului $f = (x_n)_{n \geqslant 1}$, şirul $f \circ g: \mathbf{N} \to X$, unde $g: \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ este strict crescătoare; notînd $k_n = g(n)$, $(\forall)\ n \geqslant 1$, avem $(f \circ g)(n) =$ $= f(k_n) = x_{k_n}$, $(\forall)\ n \geqslant 1$, deci $f \circ g = (x_{k_n})_{n \geqslant 1}$.

1.4.7. Definiţie. Se numeşte *şir finit* de elemente din mulţimea X, o funcţie $f: \{1, 2, \ldots, n\} \to X$ şi se notează cu $(f(k))_{k=\overline{1,n}}$ sau $(x)_{k=\overline{1,n}}$, unde $x_k = f(k)$, $(\forall)\ k = \overline{1,n}$. Se numeşte *subşir* al unui şir finit $(x_k)_{k=\overline{1,n}}$ şirul finit $(x_{k_j})_{j=\overline{1,m}}$ unde $1 \leqslant k_1 < k_2 < \ldots < k_m \leqslant n$.

1.4.8. Definiţie. Un şir $(x_n)_{n \geqslant 1}$ se numeşte: *staţionar* dacă există $n_0 \in \mathbf{N}$ a.î. $x_n = x_{n_0}$, $(\forall)\ n \geqslant n_0$; *constant* dacă $x_n = x_1$, $(\forall)\ n \geqslant 1$; *periodic* dacă există $k \in \mathbf{N}$ a.î. $x_{n+k} = x_n$, $(\forall)\ n \geqslant 1$.

Observaţii. 1. Elementele unui şir pot fi egale unele cu altele.

2. Nu trebuie confundat *un şir* cu *mulţimea elementelor din care este format şirul.*

3. Nu trebuie confundat *un şir* cu o *mulţime numerabilă*. Şirul este o funcţie definită pe $\mathbf{N}$; mulţimea numerabilă este o mulţime echipotentă cu $\mathbf{N}$, deci alecărei elemente pot fi enumerate („înşiruite").

4. În loc de „$(x_n)_{n\geq 1}$ este un şir cu elemente din X" vom scrie uneori impropriu „$(x_n)_{n\geq 1} \subseteq X$".

1.4.9. Definiţie. Fie X [$\leq$] o mulţime ordonată. Un şir $(x_n)_{n\geq 1}$ din X se numeşte *majorat* (resp. *minorat*) dacă există M (resp. m) $\in X$ a.î. $x_n \leq M$ (resp. $m \leq x_n$) $(\forall)$ $n \geq 1$. Un şir majorat şi minorat se numeşte *mărginit*. Cel mai mic majorant (resp. cel mai mare minorant) al şirului $(x_n)_{n\geq 1}$ se numeşte *margine superioară* (resp. *margine inferioară*) a şirului $(x_n)_{n\geq 1}$ şi se notează cu $\sup\limits_{n\geq 1} x_n$ (resp. $\inf\limits_{n\geq 1} x_n$).

1.4.10. Definiţie. Se numeşte *şir de mulţimi* din X, un şir cu elemente din mulţimea $P(X)$ a tuturor părţilor lui X şi se notează cu $(A_n)_{n\geq 1}$. Vom spune că şirul $(A_n)_{n\geq 1}$ este *ascendent* (resp. *descendent*) dacă $A_n \subseteq A_{n+1}$ (resp. $A_n \supseteq A_{n+1}$) $(\forall)$ $n \geq 1$.

1.4.11. Propoziţie. *Mulţimea* $\mathbf{N}$ *este bine ordonată.*

Dem. Fie $A \subseteq \mathbf{N}$ nevidă. Presupunem că A nu are prim element şi fie $B := \{n \in \mathbf{N};\ \{1, 2, \ldots, n\} \cap A = \emptyset\}$. Evident $1 \in B$, altfel $1 = \min A$. Fie mai departe $n \in \mathbf{N}$ fixat, deci $\{1, 2, \ldots, n\} \cap A = \emptyset$. Dacă $\{1, 2, \ldots, n+1\} \cap A \neq \emptyset$, atunci $n+1 \in A$ şi deoarece $x > n$ $(\forall)$ $x \in A$, rezultă că $n+1 = \min A$, absurd. Rămîne că $\{1, 2, \ldots, n+1\} \cap A = \emptyset$, deci $n+1 \in B$. Din D.1.4.1. (III) deducem că $B = \mathbf{N}$, deci $A = \emptyset$, absurd. Prin urmare A posedă prim element.

1.4.12. Propoziţie. *Orice submulţime infinită a unei mulţimi numerabile, este numerabilă.*

Dem. Evident putem presupune mulţimea numerabilă egală cu $\mathbf{N}$; fie deci $A \subseteq \mathbf{N}$ infinită. Notăm (P.1.4.11.) $a_1 = \min A$, $a_2 = \min (A \setminus \{a_1\})$; observăm că $A \setminus \{a_1\}$ este nevidă, fiind infinită. În acest mod construim prin inducţie un şir $(a_n)_{n\geq 1}$ cu elemente din A a.î. $a_{n+1} = \min (A \setminus \{a_1, \ldots, a_n\})$, $(\forall)$ $n \geq 1$, observînd că mulţimea $A \setminus \{a_1, \ldots, a_n\}$ este nevidă, fiind infinită.

Fie $p \in A$ fixat. Mulţimea $\{a \in A;\ a \leq p\}$ este finită şi conţine cel mult p elemente, deci $p \in \{a_1, a_2, \ldots, a_p\}$. Aşadar şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ epuizează A, deci $A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$ şi deci A este numerabilă.

Corolar 1. *Orice submulţime a unei mulţimi cel mult numerabilă, este cel mult numerabilă.*

Corolar 2. *Imaginea surjectivă a unei mulţimi numerabile, este cel mult numerabilă.*

Dem. Fie A numerabilă, B arbitrară şi $f: A \to B$ o aplicaţie surjectivă. Atunci (P.1.2.15) $(\exists)$ $g: B \to A$ injectivă a.î. $f \circ g = \mathbf{1}_B$. Cum $g(B) \subseteq A$ şi A numerabilă, avem (Cor. 1) $g(B)$ cel mult numerabilă. Însă $B \sim g(B)$, deci B este cel mult numerabilă.

Corolar 3. *Mulţimea* $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ *este numerabilă.*

Dem. Fie $f: \mathbf{N} \times \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ definită astfel: $f(n, m) = 2^n \cdot 3^m$. Atunci f este injectivă: $f(n, m) = f(n', m') \Leftrightarrow 2^n \cdot 3^m = 2^{n'} 3^{m'} \Leftrightarrow 2^{n-n'} = 3^{m-m'} \Leftrightarrow n - n' = 0 \wedge m - m' = 0 \Leftrightarrow (n, m) = (n', m')$. Aşadar $\mathbf{N} \times \mathbf{N} \sim f(\mathbf{N} \times \mathbf{N}) \subseteq \mathbf{N}$, deci (Cor. 1) $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ este cel mult numerabilă. Cum evident $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ este infinită, concludem că $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ este numerabilă.

1.4.13. Propoziţie. *Fie* $(A_n)_{n\geq 1}$ *un şir de mulţimi numerabile. Atunci* $A = \bigcup\limits_{n\geq 1} A_n$ *este numerabilă.*

Dem. $(\forall)\ n \geqslant 1$, fie $\{a_1^n, a_2^n, a_3^n, \ldots\}$ o enumerare a mulțimii A_n și fie $f: \mathbf{N} \times \mathbf{N} \to A$ o aplicație definită astfel $f(n, m) = a_m^n$. Evident f este surjectivă și A este infinită ($A \supseteq A_n$ infinită), deci $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ fiind numerabilă (P.1.4.12. Cor. 3), rezultă (P.1.4.12 Cor. 2) A numerabilă.

Corolar 1. *Fie $A_1, A_2, \ldots, A_n$ n mulțimi numerabile. Atunci mulțimile $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ și $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ sînt numerabile.*

Dem. 1° Aplicăm P.1.4.13. pentru șirul $A_1, A_2, \ldots, A_n, A_n, A_n, \ldots$

2° Fie $\{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$ o enumerare a lui A_1. Atunci $A_1 \times A_2 = \bigcup_{k \geqslant 1} \{x_k\} \times A_2$ și $\{x_k\} \times A_2$ este numerabilă, fiind echipotentă cu A_2, deci (P.1.4.13) $A_1 \times A_2$ este numerabilă. Aplicăm mai departe principiul inducției.

Corolar 2. *Mulțimea $\mathbf{Q}$ a numerelor raționale este numerabilă.*

Dem. Deoarece mulțimea $A_n := \left\{\frac{n}{1}, \frac{n}{2}, \frac{n}{3}, \ldots\right\}$ este numerabilă și avem $\mathbf{Q}_+^* = \bigcup_{n \geqslant 1} A_n$, rezultă (P.1.4.13.) că $\mathbf{Q}_+^*$ este numerabilă. Ținem mai departe seama că $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_-^* \cup \{0\} \cup \mathbf{Q}_+^*$ și $\mathbf{Q}_-^* \sim \mathbf{Q}_+^*$.

1.4.14. Definiție. Fie $X\ [\leqslant]$, $Y[\leqslant]$ două mulțimi ordonate și $f: X \to Y$ o funcție. Vom spune că f este *strict crescătoare* (resp. *strict descrescătoare*) pe mulțimea $A \subseteq X$ dacă:

$$(\forall)\ x_1, x_2 \in A,\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)\ \text{(resp. } f(x_1) > f(x_2)).$$

Dacă înlocuim semnul $<$ (resp. $>$) prin $\leqslant$ (resp. $\geqslant$), funcția f se numește *monoton crescătoare* (resp. *monoton descrescătoare*) pe A. Dacă f este strict crescătoare sau (strict descrescătoare) (resp. monoton crescătoare sau monoton descrescătoare) pe A, vom spune că f este *strict monotonă* (resp. *monotonă*) pe A. Dacă f este strict crescătoare, monoton crescătoare, monotonă, ... pe mulțimea X, vom spune că f este *strict crescătoare*, *monoton crescătoare*, *monotonă* ...

Să particularizăm Definiția 1.4.14. în cazul cînd f este definită pe $\mathbf{N}$.

1.4.15. Definiție. Un șir $(x_n)_{n \geqslant 1}$ cu elemente dintr-o mulțime ordonată $X\ [\leqslant]$ se numește *crescător* sau *strict crescător* (resp. *descrescător* sau *strict descrescător*) dacă $x_n < $ (resp. $>$) x_{n+1}, $(\forall)\ n \geqslant 1$. Dacă înlocuim semnul $<$ (resp. $>$) prin $\leqslant$ (resp. $\geqslant$), șirul $(x_n)_{n \geqslant 1}$ se numește *monoton crescător* (resp. *monoton descrescător*). Dacă șirul $(x_n)_{n \geqslant 1}$ este strict crescător sau strict descrescător (resp. monoton crescător sau monoton descrescător), vom spune că $(x_n)_{n \geqslant 1}$ este *strict monoton* (resp. *monoton*).

Exemple.

1. Șirul $\left(\frac{n}{n+1}\right)_{n \geqslant 1}$ este strict crescător, iar șirul $\left(\frac{n}{n^2+1}\right)_{n \geqslant 1}$ este strict descrescător.

2. Fie a rațional. Atunci șirul $1, a, a^2, \ldots, a^n, \ldots$, este strict crescător dacă $a > 1$; strict descrescător și minorat de 0, dacă $0 < a < 1$; nu este monoton dacă $a < 1$.

3. Șirurile $((-1)^n)_{n \geqslant 1}$, $\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)_{n \geqslant 1}$ și $((-1)^{n^2-2n+1})_{n \geqslant 1}$ nu sînt monotone.

4. Fie $X\ [\leqslant]$ o mulțime total ordonată și $(x_n)_{n \geqslant 1}$ un șir cu elemente din X. Punem $y_n := \min\{x_1, x_2, \ldots x_n\}$, $z_n := \max\{x_1, x_2, \ldots x_n\}$ $(n \geqslant 1)$. Atunci $(y_n)_{n \geqslant 1}$ este monoton descrescător, $(z_n)_{n \geqslant 1}$ este monoton crescător și avem $y_n \leqslant x_n \leqslant z_n$ $(\forall)\ n \geqslant 1$.

CAPITOLUL 2

NUMERE REALE. ȘIRURI DE NUMERE REALE. NUMERE COMPLEXE

2.1. Numere reale (prezentare axiomatică). Proprietăți generale

Mulțimea numerelor reale este mulțimea de bază în întreaga analiză matematică. Conceptul de număr real este cunoscut încă din antichitate. Definiția lui riguroasă a fost însă dată abia în a doua jumătate a sec. XIX de către Weierstrass, Dedekind, Cantor, Meray etc.

Există mai multe moduri de a defini numărul real. În Cap. 1 am definit mulțimea $\mathbf{N}$ a numerelor naturale (axiomele lui Peano). Cu ajutorul lui $\mathbf{N}$ se definește, prin extensiune, mulțimea $\mathbf{Z}$ a numerelor întregi, care se extinde apoi la mulțimea $\mathbf{Q}$ a numerelor raționale; așadar avem $\mathbf{N} \subseteq \mathbf{Z} \subseteq \mathbf{Q}$. Mulțimea $\mathbf{Q}$, deși este corp ordonat, este încă destul de săracă în proprietăți. Spre exemplu, ecuația $x^2 - 2 = 0$ (1) nu are soluții în $\mathbf{Q}$. Or, dacă acceptăm că diagonala într-un pătrat de latură 1 are lungime, aceasta trebuie să verifice ec. (1), deci trebuie legitimate ca „numere" și elemente din afara lui $\mathbf{Q}$. Apare astfel în mod natural nevoia de a extinde, în continuare, și mulțimea $\mathbf{Q}$. Acest lucru poate fi realizat în mai multe moduri: cu ajutorul *șirurilor Cauchy* (construcția lui Cantor), cu ajutorul *tăieturilor* (construcția lui Dedekind), cu ajutorul *fracțiilor zecimale* etc. Se obține astfel, de fiecare dată un *corp complet ordonat* K, $K \supset \mathbf{Q}$, numit *corp al numerelor reale* și notat cu $\mathbf{R}$. Așadar, fiecare construcție curentă dată mulțimii numerelor reale conduce spre o „copie" a unui corp complet ordonat (cf. T. 2.1.6.). Se poate arăta: $\mathbf{R}$ este cel mai mic corp ordonat care are proprietățile: (i) $\mathbf{R} \supseteq \mathbf{Q}$: (ii) orice șir Cauchy cu elemente din $\mathbf{Q}$ este convergent în $\mathbf{R}$. Altfel spus, $\mathbf{R}$ este intersecția tuturor corpurilor ordonate care au proprietățile (i) —(ii). Evident, dacă K este un corp ordonat arbitrar, care are proprietățile (i) —(ii), atunci $\overline{\mathbf{Q}}$ (aderenta în K) coincide (i.e. este izomorfă) cu $\mathbf{R}$.

Noi însă vom proceda aici invers; vom defini încă de la început mulțimea $\mathbf{R}$ a *numerelor reale* ca fiind un *corp complet ordonat* K, deci o mulțime abstractă înzestrată cu anumite proprietăți (axiome), după care vom defini $\mathbf{N}$, $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$ ca fiind submulțimi particulare în $\mathbf{R}$. Procedeul este mai puțin natural însă este mai economic și mai ușor de reținut. În fine, să observăm că din punct de vedere pur matematic sînt *echivalente* afirmațiile: 1) Există o mulțime de numere naturale (axiomele lui Peano); 2) Există un corp complet ordonat. Prin urmare a construi numerele reale $\mathbf{R}$ plecînd de la $\mathbf{N}$ sau a defini axiomatic $\mathbf{R}$ ca fiind un corp complet ordonat, este, din punct de vedere matematic, același lucru.

2.1.1. Definiție. Fie G o mulțime nevidă. Se numește *lege de compoziție* (internă) pe G o funcție $f: G \times G \to G$; dacă $(x, y) \in G$, elementul $f(x, y)$ se notează cu $x * y$, $x \cdot y$, $x + y$ etc și se numește *compunerea* lui x cu y. Se numește *grup* o mulțime nevidă G pe care s-a definit o lege de compoziție $G \times G \ni (x, y) \mapsto x * y \in G$ cu proprietățile:

(G_1) $(x * y) * z = x * (y * z)$, $(\forall)$ $x, y, z \in G$ (*asociativitate*)

(G_2) $(\exists)$ $e \in G$ a.î. $x * e = e * x = e$, $(\forall)$ $x \in G$ *(element neutru)*

(G_3) $(\forall)$ $x \in G$, $(\exists)$ $x' \in G$ a.î. $x' * x = x * x' = e$ (x' *simetricul* lui x). Un grup $(G, *)$ se numește *comutativ*, dacă $x * y = y * x$ $(\forall)$ $x, y \in G$.

Dacă legea de compoziție G este notată cu „$+$" *(aditiv)* (resp. „$\circ$" (multiplicativ)), atunci elementul neutru e se notează cu 0 (elementul *nul*) (resp. 1 (element *unitate*)) iar x', simetricul lui x, se notează cu $-x$ (*opusul* lui x) (resp. x^{-1} sau $\frac{1}{x}$ (*inversul* lui x)).

Fie $(G, +)$ un grup aditiv și $x, y \in G$ fixați. Atunci elementul $x + (-y)$ se notează cu $x - y$; elementul $x + x$ se notează cu $2x$; elementul $x + x + x$ se notează cu $3x$ etc. Analog dacă $(G, \cdot)$ este un grup multiplicativ și $x, y \in G$, atunci $x.y$ se notează cu xy; $x.x$ se notează cu x^2; $x.x.x$ se notează cu x^3 etc.

2.1.2. Definiție. Se numește *corp*, o mulțime nevidă K pe care s-au definit două legi de compoziție „$+$" (adunarea) și „$\cdot$" (înmulțirea), având proprietățime:

(K_1) $(K, +)$ este grup comutativ;

(K_2) $(K \setminus \{0\}, .)$ grup;

(K_3) $x(y + z) = xy + xz$, $(x + y)z = xz + yz$ $(\forall)$ $x, y, z \in K$.

Un corp $(K, +, \cdot)$ se numește *comutativ* dacă $xy = yx$ $(\forall)$ $x, y \in K$.

2.1.3. Definiție. Se numește *corp ordonat* o mulțime nevidă K pe care s-au definit două legi de compoziție „$+$", „$\cdot$" și o relație binară $\leqslant$, având proprietățile:

(KO_1) $(K, +, \cdot)$ este corp comutativ;

(KO_2) $(K, \leqslant)$ este mulțime total ordonată;

(KO_3) $(\forall)$ $x, y \in K$, $x \leqslant y$, rezultă $x + z \leqslant y + z$, $(\forall) z \in K$ și $xz \leqslant yz$, $(\forall)$ $x \in K$, $z \geqslant 0$.

2.1.4. Definiție. Un corp ordonat $(K, +, \cdot, \leqslant)$ se numește *complet ordonat* dacă orice mulțime majorată din K posedă margine superioară i.e. $(\forall)$ $A \subseteq K$, A majorată $\Rightarrow$ $(\exists)$ sup A. Un corp complet ordonat se numește *sistem (corp) de numere reale* și se notează cu $\mathbf{R}$; un element x din $\mathbf{R}$ se numește *număr real*. Vom nota cu $\mathbf{R}_+ := \{x \in \mathbf{R};\ x \geqslant 0\}$ — mulțimea numerelor reale *nenegative*, $\mathbf{R}_- := \{x \in \mathbf{R};\ x \leqslant 0\}$ — mulțimea numerelor reale *nepozitive*, $\mathbf{R}_+^* := \mathbf{R}_+ \setminus \{0\}$, $\mathbf{R}_-^* := \mathbf{R}_- \setminus \{0\}$ și $\mathbf{R}^* := \mathbf{R} \setminus \{0\}$.

Așadar $\mathbf{R} := (\mathbf{R}, +, \cdot, \leqslant)$, unde $\mathbf{R} \neq \emptyset$, $+, \cdot$ sînt două legi de compoziție pe $\mathbf{R}$ și $\leqslant$ o relație binară pe $\mathbf{R}$, având proprietățile:

Axiomele adunării $(+)$

(A_1) $x + (y + z) = (x + y) + z$, $(\forall)$ $x, y, z \in \mathbf{R}$;

(A_2) $(\exists)$ $0 \in \mathbf{R}$ a.î. $x + 0 = 0 + x = x$, $(\forall)$ $x \in \mathbf{R}$;

(A_3) $(\forall)$ $x \in \mathbf{R}$, $(\exists) - x \in \mathbf{R}$ a.î. $x + (-x) = (-x) + x = 0$;

(A_4) $x + y = y + x$, $(\forall)$ $x, y \in \mathbf{R}$

Axiomele înmulțirii $(\cdot)$

(M_1) $x(yz) = (xy)z$, $(\forall)$ $x, y, z \in \mathbf{R}$;

(M_2) $(\exists)$ $1 \in \mathbf{R}$ a.î. $1.x = x.1 = x$, $(\forall)$ $x \in \mathbf{R}$;

(M_3) $(\forall)$ $x \in \mathbf{R}$, $x \neq 0$, $(\exists)$ $x^{-1} \in \mathbf{R}$ a.î. $x.x^{-1} = x^{-1}.x = 1$;

(M_4) $xy = yx$, $(\forall)$ $x, y \in \mathbf{R}$

Axiomă de legătură între $+$ *și* $\cdot$

(AM) $x(y + z) = xy + xz$, $(\forall)$ $x, y, z \in \mathbf{R}$

Axiomele relației binare $\leqslant$

(O_1) $x \leqslant x$, $(\forall)$ $x \in \mathbf{R}$;

(O_2) $(\forall)$ $x, y \in \mathbf{R}$, $x \leqslant y \wedge y \leqslant x \Rightarrow x = y$;

(O_3) $(\forall)\ x, y, z \in \mathbf{R},\ x \leqslant y \wedge y \leqslant z \Rightarrow x \leqslant z$;

(O_4) $(\forall)\ x, y \in \mathbf{R} \Rightarrow x \leqslant y \vee y \leqslant x$.

Axiomă de legătură între $+$ *şi* $\leqslant$

(AO) $(\forall)\ x, y \in \mathbf{R},\ x \leqslant y \Rightarrow x + z \leqslant y + z,\ (\forall)\ z \in \mathbf{R}$;

Axiomă de legătură între $\cdot$ *şi* $\leqslant$

(MO) $(\forall)\ x, y \in \mathbf{R},\ x \leqslant y \Rightarrow xz \leqslant yz,\ (\forall)\ z \in \mathbf{R},\ z \geqslant 0$.

Axioma marginii superioare

(S) $(\forall)\ A \subseteq \mathbf{R}$, A majorată $\Rightarrow (\exists)$ sup A.

2.1.5. Definiţie. Fie $(K, +, \cdot, \leqslant)$ şi $(K', +, \cdot, \leqslant)$ două corpuri ordonate. O funcţie $f : K \to K'$ se numeşte *izomorfism* (de corpuri ordonate) dacă

1° f *aditivă* : $f(x + y) = f(x) + f(y)$ $(\forall)\ x, y \in K$;

2° f *multiplicativă* : $f(xy) = f(x) f(y)$ $(\forall)\ x, y \in K$;

3° f *bijectivă*;

4° f strict crescătoare : $(\forall)\ x, y \in K,\ x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$.

2.1.6. Teoremă. Fie $(K, +, \cdot, \leqslant)$ şi $(K', +, \cdot, \leqslant)$ două corpuri *complet ordonate*. Atunci $(\exists\,!)\ f : K \to K'$ *un izomorfism* (*de corpuri ordonate*).

Dem.[23].

Aşadar, un sistem de numere reale este unic determinat pînă la un izomorfism (de corpuri ordonate). Prin urmare este suficient să construim analiza matematică pe un *anume* corp complet ordonat, fie el abstract sau unul dintre modelele clasice (Dedekind, Cantor etc.) semnalate mai sus.

2.1.7. Definiţie. Fie $K = (K +, \cdot)$ un corp. Dacă $A, B \subseteq K$ vom scrie : $A \pm B := \{a \pm b;\ a \in A,\ b \in B\}$ şi $A.B := \{ab;\ a \in A,\ b \in B\}$. Dacă $A \subseteq K \setminus \{0\}$, vom scrie $A^{-1} := \{a^{-1};\ a \in A\}$. O submulţime $K_0 \subseteq K$ se numeşte *subcorp*, dacă adunarea şi înmulţirea din K induc pe K_0 o structură de corp i.e. $K_0 - K_0 \subseteq K_0$ şi $K_0 \cdot (K_0 \setminus \{0\})^{-1} \subseteq K_0$. Dacă $x_1, x_2, \ldots, x_n \in K$, vom scrie $\sum_{i=1}^{n} x_i$ în loc de $x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ şi $\prod_{i=1}^{n} x_i$ în loc de $x_1 . x_2 \ldots x_n$. Dacă $a, b \in K$, $b \neq 0$, elementul $a.b^{-1}$ se notează cu $\frac{a}{b}$.

2.1.8. Propoziţie. *Fie* $K = (K, +, \cdot)$ *un corp comutativ, în particular* $K = \mathbf{R}$. *Atunci au loc afirmaţiile* :

1° *Elementul nul, elementul unitate, opusul fiecărui element şi inversul fiecărui element nenul din* K, *sînt unic determinate.*

2° $(\forall)\ x, y \in K^*$, *avem* $(xy)^{-1} = x^{-1}y^{-1}$.

Dem. 1° Fie $0, 0' \in K$ a.î. $x + 0 = x$ şi $x + 0' = x$, $(\forall)\ x \in K$.

Atunci $0' = 0' + 0 = 0 + 0' = 0$, deci elementul nul este unic etc.

2° $(y^{-1}x^{-1}) \cdot (xy) = y^{-1}(x^{-1} \cdot x) \cdot y = y^{-1} \cdot y = 1$,

deci inversul fiind unic determinat, avem $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$.

2.1.9. Propoziţie. *Fie* $K = (K, +, \cdot)$ *un corp comutativ, în particular* $K = \mathbf{R}$. *Atunci au loc afirmaţiile* :

1° $(\forall)\ x, y, a \in K$, *avem* : $x + a = y + a \Leftrightarrow x = y$;

2° $(\forall)\ x, y, a \in K,\ a \neq 0$, *avem* $xa = ya \Leftrightarrow x = y$;

3° $(\forall)\ a, b \in K, (\exists\,!)\ x \in K$ *a.î.* $a + x = b$ *şi anume* $x = b - a$;

4° $(\forall)\ a, b \in K,\ a \neq 0,\ (\exists\,!)\ x \in K$ *a.î.* $ax = b$ *şi anume* $x = a^{-1}b$;

5° $(\forall)\ x, y, z \in K$, *avem* $(x + y) - z = x + (y - z)$, $x - (y + z) = (x - y) - z$; *în particular* $-(x + y) = -x - y$;

6° $(\forall)\ x, y \in K$, *avem* $(-x)y = x(-y) = -(xy)$, $(-x)(-y) = xy$; *în particular* $-x = (-1)x$;

7° $(\forall)\ x, y, z \in K$, *avem* $x(y - z) = xy - xz$; *în particular* $x.0 = 0$;
8° $(\forall)\ x, y \in K,\ xy = 0 \Rightarrow x = 0 \vee y = 0$;
9° $(\forall)\ a, b, c, d \in K,\ c \neq 0,\ d \neq 0$, *avem*:

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{d} = \frac{ad + bc}{cd}, \frac{a}{c} \cdot \frac{b}{d} = \frac{ab}{cd}, \frac{a}{c} - \frac{b}{d} = \frac{ad - bc}{cd};$$

10° $(\forall)\ a \in K,\ (\forall)\ b, c, d \in K \setminus \{0\}$, *avem*: $\dfrac{\dfrac{a}{b}}{\dfrac{c}{d}} = \dfrac{ad}{bc}$;

11° $(\forall)\ a, b \in K$ *avem* $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$.

Dem. Evidentă. Să arătăm cîteva dintre ele:

1° $x + a = y + a \Rightarrow x = (x + a) + (-a) = (y + a) + (-a) = y$ etc.

2° $xa = ya \Rightarrow x = (xa)a^{-1} = (ya)a^{-1} = y$ etc.

3° Avem $b + (-a) \in K$ și $a + (b + (-a)) = a + (-a) + b = b$, deci $(\exists)\ x \in K$ a.î. $a + x = b$. Presupunem că $(\exists)\ x, x' \in K$ cu $a + x = b$ și $a + x' = b$. Atunci $a + x = a + x'$, deci (cf. 1°) $x = x'$ etc.

4° Avem $a^{-1}b \in K$ și $a(a^{-1}b) = b$, deci $(\exists)\ x \in K$ a.î. $ax = b$. Presupunem că $(\exists)\ x, x' \in K$ cu $ax = b$ și $ax' = b$, deci $ax = ax'$ și deci (cf. 2°) $x = x'$ etc.

6° $(-x)y + xy = ((-x) + x)y = 0.y = 0$, deci $(-x)y = -(xy)$;

8° Fie $xy = 0$ și $x \neq 0$. Atunci $xy = x.0$, deci (cf. 2°) $y = 0$;

9° $\dfrac{a}{c} + \dfrac{b}{d} = ac^{-1} + bd^{-1} = (ad)c^{-1}d^{-1} + (bc)c^{-1}d^{-1} = (ad+bc)c^{-1}d^{-1} = (ad+bc) \cdot cd^{-1} = \dfrac{ad + bc}{cd}$.

2.1.10. Propoziție. *Fie* $K = (K, +, \cdot, \leqslant)$ *un corp complet ordonat, în particular* $K = \mathbf{R}$. *Atunci au loc afirmațiile*:

1° $(\forall)\ x, y \in K$, *avem*: $x \leqslant y \Leftrightarrow -y \leqslant -x$;

2° $(\forall)\ x \in K$, *avem*: $0 \leqslant x \Leftrightarrow -x \leqslant 0$;

3° $(\forall)\ x, y, x_1, y_1 \in K,\ x \leqslant x_1 \wedge y \leqslant y_1 \Rightarrow x + y \leqslant x_1 + y_1$;

4° $(\forall)\ x, y \in K,\ x \geqslant 0 \wedge y \leqslant 0 \Rightarrow xy \leqslant 0$;

5° $(\forall)\ x, y \in K,\ x \leqslant 0 \wedge y \leqslant 0 \Rightarrow xy \geqslant 0$,

6° $(\forall)\ x, y, x_1, y_1 \in K_+ \cup \{0\},\ x \leqslant y \wedge x_1 \leqslant y_1 \Rightarrow xx_1 \leqslant yy_1$

7° $(\forall)\ x, y, z \in K,\ x \leqslant y \wedge z \leqslant 0 \Rightarrow xz \geqslant yz$;

8° $(\forall)\ x \in K,\ x \neq 0 \Rightarrow x^2 \geqslant 0$;

9° $1 > 0$;

10° $(\forall)\ x, y \in K,\ (x, y) \neq (0, 0) \Rightarrow x^2 + y^2 > 0$;

11° $(\forall)\ x \in K$, *avem*: $x > 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{x} > 0$; $x < 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{x} < 0$; $0 < x < 1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{x} > 1$;

12° *Peste tot putem înlocui inegalitățile în sens larg, prin inegalități stricte.*

Dem. Evidentă. Să arătăm cîteva dintre ele:

1° $x \leqslant y \Rightarrow 0 = x + (-x) \leqslant y + (-x) \Rightarrow -y \leqslant (-y) + y + (-x) = -x$, etc.

3° $x \leqslant x_1 \wedge y \leqslant y_1 \Rightarrow x + y \leqslant x_1 + y \leqslant x_1 + y_1$;

4° $x \geqslant 0 \wedge y \leqslant 0 \Rightarrow xy = yx \leqslant 0.x = 0$;

$6°\ 0 \leqslant x \leqslant y \wedge 0 \leqslant x_1 \leqslant y_1 \Rightarrow xx_1 \leqslant yx_1 \leqslant yy_1$;

$7°\ x \leqslant y \wedge z \leqslant 0 \Rightarrow x(-z) \leqslant y(-z) \overset{1°}{\Rightarrow} -xz \leqslant -yz \overset{1°}{\Leftrightarrow} yz \leqslant xz$;

8° Dacă $x > 0 \Rightarrow x^2 \geqslant 0 . x = 0 \wedge x^2 \neq 0$. Dacă $x < 0$, avem (cf. 5°) $x^2 \geqslant 0$ și evident $x^2 \neq 0$, deci $x^2 > 0$;

9° $1 \neq 0$, altfel $(K \setminus \{0\}, \cdot)$ este un grup vid, absurd.

Dacă $1 < 0$, avem (cf. 5°) $1 = 1^2 \geqslant 0$, absurd. Rămîne $1 > 0$.

$10°\ (x, y) \neq (0, 0) \Rightarrow x \neq 0 \vee y \neq 0 \overset{8°}{\Rightarrow} x^2 > 0 \vee y^2 > 0 \Rightarrow x^2 + y^2 > 0$.

11° Dacă, spre exemplu, $x < y \wedge z > 0$, atunci $xz \leqslant yz$; presupunînd, că $xz = yz$, rezultă $x = y$, absurd. Rămîne $xz < yz$. Fie acum $0 < x < y \wedge 0 < x_1 < y_1$. Atunci $xx_1 < yx_1 < yy_1$.

2.1.11. Propoziție. *Fie A_0 intersecția tuturor submulțimilor lui* $\mathbf{R}$ *care au proprietățile* : (i) $1 \in A$; (ii) $1 + A \subseteq A$. *Atunci A satisface axiomele lui Peano, în care primul element este* 1 *și funcția succesor este $f(x) = x + 1$, $x \in A_0$.*

Dem. Am văzut că $1 > 0$, deci $1 \in \mathbf{R}_+^*$. Dacă $x \in \mathbf{R}_+^*$, avem $x + 1 > 1 > 0$, deci $x + 1 \in \mathbf{R}_+^*$ și deci $\mathbf{R}_+^*$ satisface proprietățile (i)-(ii). Așadar $A_0 \subseteq \mathbf{R}_+^*$. Este clar că A_0 are proprietățile (i)—(ii), deci $1 \in A_0$ și $f(A_0) \subseteq A_0$. Cum f este, evident, injectivă, rămîne să arătăm că $1 \notin f(A_0)$; altfel din $1 \in f(A_0)$, rezultă că $(\exists)\ x \in A_0 \subseteq \mathbf{R}_+^*$ cu $1 + x = 1$, deci $x = 0$, absurd. Cu aceasta axiomele I și II au fost verificate. În fine, fie $B \subseteq A_0$ cu proprietățile : $1 \in B$ și $f(B) \subseteq B$. Atunci B are proprietățile (i)—(ii), deci $A_0 \subseteq B$ și deci $B = A_0$. Axioma III este verificată.

Corolar 1. *Mulțimea numerelor naturale este cea mai mică submulțime* $\mathbf{N} \subseteq \mathbf{R}$ *cu proprietățile* : $1 \in \mathbf{N}$; $(\forall)\ x \in \mathbf{N} \Rightarrow 1 + x \in \mathbf{N}$.

Observație. Într-o definiție axiomatică a lui $\mathbf{R}$, Cor. 1 constituie o definiție a mulțimii numerelor naturale.

2.1.12. Definiție. Mulțimea $\mathbf{Z} := \mathbf{N} \cup \{0\} \cup (-\mathbf{N})$, unde $-\mathbf{N} := \{-n ;\ n \in \mathbf{N}\}$, se numește mulțimea *numerelor întregi.* Mulțimea $\mathbf{Q} := \left\{\frac{m}{n} ;\ m, n \in \mathbf{Z},\ n \neq 0\right\}$ se numește mulțimea *numerelor raționale.* În fine, mulțimea $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ se numește mulțimea *numerelor iraționale.* Vom nota $\mathbf{Z}^* = \mathbf{Z} \setminus \{0\}$, $\mathbf{Q}^* := \mathbf{Q} \setminus \{0\}$ $\mathbf{Q}_+ := \{x \in \mathbf{Q} ;\ x \geqslant 0\}$ și $\mathbf{Q}_+^* := \{x \in \mathbf{Q} ;\ x > 0\}$; analog $\mathbf{Q}_- := \{x \in \mathbf{Q} ;\ x \leqslant 0\}$ și $\mathbf{Q}_-^* := \{x \in \mathbf{Q},\ x < 0\}$. Fie $m, n \in \mathbf{Z}$ două numere întregi cu $n \neq 0$; vom spune că m se *divide* prin n dacă $mn^{-1} \in \mathbf{Z}$; vom spune că m și n sînt *prime între ele*, dacă nu există $p \in \mathbf{Z}$, $p \neq \pm 1$, care să dividă pe m și n. Un număr $p \in \mathbf{N}$ se numește *număr prim*, dacă p nu se divide prin nici un număr natural diferit de p și 1.

Teoremă (th. fundamentală a aritmeticii)

Orice număr natural se poate scrie în mod unic, abstracție făcînd de ordinea factorilor, ca un produs de numere prime.

2.1.13. Propoziție.

$1°\ (\forall)\ m, n, k \in \mathbf{Z},\ n \neq 0,\ k \neq 0,$ *avem* $\frac{mk}{nk} = \frac{m}{n}$;

$2°\ (\forall)\ r \in \mathbf{Q},\ (\exists)\ m \in \mathbf{Z},\ (\exists)\ n \in \mathbf{N}$ *a.î.* $r = \frac{m}{n}$.

Dem. 1° Fixăm $m, n, k \in \mathbf{Z}$, $n \neq 0$, $k \neq 0$. Atunci

$$\frac{mk}{nk} := (mk)(nk)^{-1} = (mk) \cdot (k^{-1}n^{-1}) = mn^{-1} = \frac{m}{n}.$$

2° Fixăm $r \in \mathbf{Q}$. Prin definiție $(\exists)\ m, n \in \mathbf{Z},\ n \neq 0$, cu $r = \frac{m}{n}$. Dacă $n \in -\mathbf{N}$, scriem $r = \frac{-m}{-n}$ și observăm că $-n \in \mathbf{N}$ și $-m \in \mathbf{Z}$.

2.1.14. Propoziție.
1° $\mathbf{N} + \mathbf{N} \subseteq \mathbf{N}$; 2° $\mathbf{N} \cdot \mathbf{N} \subseteq \mathbf{N}$; 3° $\mathbf{Z} + \mathbf{Z} \subseteq \mathbf{Z}$; 4° $\mathbf{ZZ} \subseteq \mathbf{Z}$;
5° $\mathbf{Q} + \mathbf{Q} \subseteq \mathbf{Q}$; 6° $(\mathbf{Q}^*)^{-1} \subseteq \mathbf{Q}$.

Dem. 1° Fie $A := \{n \in \mathbf{N};\ n + \mathbf{N} \subseteq \mathbf{N}\}$. Evident $1 + \mathbf{N} \subseteq \mathbf{N}$, deci $1 \in A$. Fie $n \in A$ fixat. Atunci $n + \mathbf{N} \subseteq \mathbf{N}$, deci $(n+1) + \mathbf{N} \subseteq 1 + \mathbf{N} \subseteq \mathbf{N}$ și deci $n + 1 \in A$. Prin urmare (D. 1.4.1 (III)) $A = \mathbf{N}$, deci $\mathbf{N} + \mathbf{N} \subseteq \mathbf{N}$.

2° Punem $A := \{n \in \mathbf{N};\ n \cdot \mathbf{N} \subseteq \mathbf{N}\}$ și continuăm ca în 1°.

3° Să arătăm mai întîi că $\mathbf{Z} - 1 \subseteq \mathbf{Z}$ (1)

Fie $n \in \mathbf{Z}$ fixat, deci (i) $n \in \mathbf{N} \vee$ (ii) $n = 0$ $(\vee)$ (iii) $n \in -\mathbf{N}$

(i) Dacă $n = 1$, avem $n - 1 = 0 \in \mathbf{Z}$. Dacă $n \in \mathbf{N} \setminus \{1\}$, cum funcția succesor este o surjecție de la $\mathbf{N}$ la $\mathbf{N} \setminus \{1\}$, există $m \in \mathbf{N}$ cu $m + 1 = n$, deci $n - 1 = m \in \mathbf{N} \subseteq \mathbf{Z}$;

(ii) Dacă $n = 0$, avem $n - 1 = -1 \in -\mathbf{N} \subseteq \mathbf{Z}$;

(iii) Dacă $n \in -\mathbf{N}$, avem $-n \in \mathbf{N}$, deci $-n+1 \in \mathbf{N}$ și deci $n - 1 \in -\mathbf{N} \subseteq \mathbf{Z}$.

Așadar $\mathbf{Z} - 1 \subseteq \mathbf{Z}$.

Să arătăm acum că $\mathbf{N} - \mathbf{N} \subseteq \mathbf{Z}$ (2). Fie în acest scop $A := \{n \in \mathbf{N};\ \mathbf{N} - n \subseteq \mathbf{Z}\}$. Din (1) avem $\mathbf{N} - 1 \subseteq \mathbf{Z}$, deci $1 \in A$. Mai departe, fixăm $n \in A$; atunci $\mathbf{N} - (n+1) = (\mathbf{N} - n) - 1 \subseteq \mathbf{Z} - 1 \subseteq \mathbf{Z}$, deci $n + 1 \in A$.
Din D. 1.4.1. (III) rezultă $A = \mathbf{N}$, deci $\mathbf{N} - \mathbf{N} \subseteq \mathbf{Z}$.

În fine, din 1° rezultă $\mathbf{N} + \mathbf{N} \subseteq \mathbf{N} \subseteq \mathbf{Z}$ și $-\mathbf{N} - \mathbf{N} = -(\mathbf{N} + \mathbf{N}) \subseteq -\mathbf{N} \subseteq \mathbf{Z}$. De aici și din (2) conchidem că $\mathbf{Z} - \mathbf{Z} \subseteq \mathbf{Z}$.

4° $(-\mathbf{N}) \cdot (-\mathbf{N}) = \mathbf{N} \cdot \mathbf{N} \subseteq \mathbf{N}$ (cf. 1°) și $\mathbf{N} \cdot (-\mathbf{N}) = -(\mathbf{N} \cdot \mathbf{N}) \subseteq -\mathbf{N} \subseteq \mathbf{Z}$ (cf. 2°), de unde rezultă că $\mathbf{Z} \cdot \mathbf{Z} \subseteq \mathbf{Z}$.

5° Fie $r, r' \in \mathbf{Q}$ fixați, deci $r = \frac{p}{q}$, $r' = \frac{p'}{q'}$ cu $p, p' \in \mathbf{Z}$ și $q, q' \in \mathbf{Z}^*$. Atunci $r \pm r' = \frac{p}{q} \pm \frac{p'}{q'} = \frac{pq' \pm p'q}{qq'}$ și cum $pq' \pm p'q \in \mathbf{Z}$ și $qq' \in \mathbf{Z}^*$, rezultă că $r + r' \in \mathbf{Q}$.

6° Analog cu 5°.

Corolar 1. *Adunarea* $(+)$ *și înmulțirea* $(\cdot)$ *din* $\mathbf{R}$ *induc pe* $\mathbf{Z}$ *(resp.* $\mathbf{Q}$*) o structură de inel comutativ cu unitate (resp. corp comutativ).*

2.1.15. Propoziție.
1° $\mathbf{N} = \mathbf{Z} \cap \mathbf{R}_+^*$; 2° $-\mathbf{N} = \mathbf{Z} \cap \mathbf{R}_-^*$; 3° $(\forall)\ n, m \in \mathbf{Z},\ n < m \Rightarrow n + 1 \leqslant m$; 4° $(\forall)\ n \in \mathbf{N}$, *între* n *și* $n + 1$ *nu se află nici un număr natural.*

Dem. 1° Am văzut că $\mathbf{N} \subseteq \mathbf{R}^*$ și cum $\mathbf{N} \subseteq \mathbf{Z}$, rezultă $\mathbf{N} \subseteq \mathbf{Z} \cap \mathbf{R}_+^*$. Reciproc, fie $n \in \mathbf{Z} \cap \mathbf{R}_+^*$ fixat. Atunci $n \in \mathbf{N} \vee n = 0 \vee n \in -\mathbf{N}$. Cum $n \in \mathbf{R}_+^*$, avem $n \neq 0$. Dacă $n \in -\mathbf{N}$, rezultă $-x \in \mathbf{N} \subseteq \mathbf{R}^*$, deci $x < 0$, absurd. Rămîne $x \in \mathbf{N}$, deci $\mathbf{Z} \cap \mathbf{R}_+^* \subseteq \mathbf{N}$ etc.

2° Analog cu 1°.

3° Avem $m - n \in \mathbf{Z} - \mathbf{Z} \subseteq \mathbf{Z}$ (P. 2.1.14). Pe de altă parte $m > n \Leftrightarrow m - n > 0$, deci $m - n \in \mathbf{R}_+^*$ și deci $m - n \in \mathbf{Z} \cap \mathbf{R}_+^* = \mathbf{N}$ (cf. 1°), încît $m - n \geqslant 1$, prin urmare $n + 1 \leqslant m$.

4° Rezultă din 3°.

2.1.16. Definiție. $(\forall)\ a \in \mathbf{R}$ punem $a^0 := 1$, dacă $a \neq 0$; $a^1 = a$; $a^{n+1} = a \cdot a^n (\forall)\ n \in \mathbf{N}$.

Evident avem $0^n = 0$ și $1^n = 1$ $(\forall)\ n \in \mathbf{N}$.

2.1.17. Propoziție (Proprietățile lui a^n).

1° $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$, $(\forall)\ a \in \mathbf{R}$, $(\forall)\ n, m \in \mathbf{N}$;

2° $(a^n)^m = a^{nm}$, $(\forall)\ a \in \mathbf{R}$, $(\forall)\ n, m \in \mathbf{N}$;

3° $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, $(\forall)\ a \in \mathbf{R}^*$, $(\forall)\ n, m \in \mathbf{N}$, $m \geqslant n$;

4° $(ab)^n = a^n b^n$, $(\forall)\ a, b \in \mathbf{R}$ $(\forall)\ n \in \mathbf{N}$;

5° $(a^n)^{-1} = (a^{-1})^n$, $(\forall)\ a \in \mathbf{R}^*$, $(\forall)\ n \in \mathbf{N}$;

6° $a^n > 0$, $(\forall)\ a \in \mathbf{R}_+^*$, $(\forall)\ n \in \mathbf{N}$;

7° $(\forall)\ a, b \in \mathbf{R}_+^*$, *avem*: $a < b \Rightarrow a^n < b^n$, $(\forall)\ n \in \mathbf{N}$;

8° $(\forall)\ a, b \in \mathbf{R}_+^*$ *avem*: $a < b \Leftrightarrow (\exists)\ n \in \mathbf{N}$ *a.î.* $a^n < b^n$;

9° $(a + b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1}b + C_n^2 a^{n-2}b^2 + \ldots + C_n^n b^n$, $(\forall)\ a, b \in \mathbf{R}$, *unde* $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ (*coeficienții binominali*);

10° $(1 + x)^n \geqslant 1 + nx$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}_+$, $(\forall)\ n \in \mathbf{N}$; *în particular avem* $2^{n-1} \geqslant n$, $(\forall)\ n \in \mathbf{N}$.

11° $(1 + x)^n \geqslant \dfrac{n!}{k!(n-k)!} x^k$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}_+$, $(\forall)\ k = \overline{1, n}$;

12° $a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + b^{n-1})$, $(\forall)\ a, b \in \mathbf{R}$, $(\forall) n \in \mathbf{N}$.

Dem. 1° Fie $A := \{n \in \mathbf{N};\ a^n \cdot a^m = a^{n+m}, (\forall)\ m \in \mathbf{N}\}$. Evident $1 \in A$ (cf. D. 2.1.15.). Fie $n \in A$ fixat; atunci $(\forall)\ m \in \mathbf{N}$ avem $a^{n+1} \cdot a^m = a \cdot a^n \cdot a^m = a \cdot a^{n+m} = a^{(n+1)+m}$, deci $n + 1 \in A$ și deci (D. 1.4.1. (III)) $A = \mathbf{N}$ etc.

2° Se pune $A := \{n \in \mathbf{N};\ (a^n)^m = a^{nm} (\forall)\ m \in \mathbf{N}\}$ și se continuă ca în 1°.

3° $\dfrac{a^m}{a^n} = a^m \cdot (a^n)^{-1} \overset{1^\circ}{=} a^{m-n} \cdot a^n \cdot (a^n)^{-1} = a^{m-n}$.

4° Se pune $A := \{n \in \mathbf{N};\ (ab)^n = a^n b^n\}$ și se continuă ca în 1°.

5° $a^n \cdot (a^{-1})^n \overset{4^\circ}{=} (a \cdot a^{-1})^n = 1$, deci $(a^{-1})^n = (a^n)^{-1}$.

6° Se pune $A := \{n \in \mathbf{N};\ a^n > 0\}$ și se continuă ca în 1°.

7° Fie $A := \{n \in \mathbf{N};\ a^n < b^n\}$. Din ipoteză avem $1 \in A$. Fie $n \in A$ fixat; atunci $a^n < b^n$ și $a^n > 0$ (cf. 6°), deci (P. 2.1.10. (6°)) $a \cdot a^n < b \cdot b^n$ și deci $a^{n+1} < b^{n+1}$. Așadar $n + 1 \in A$, deci (D. 1.4.1. (III)) $A = \mathbf{N}$ etc.

8° Implicația ($\Rightarrow$) rezultă din 7°. Reciproc fie $n \in \mathbf{N}$ cu $a^n < b^n$. Presupunem că $a < b$ falsă deci $b \leqslant a$ și deci (cf. 7°) $b^n \leqslant a^n$, absurd. Rămîne că $a < b$.

9° Prin inducție relativ la n. Se arată în prealabil relațiile:

$$C_m^0 = C_n^n = 1,\ C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k,\ (\forall)\ k = \overline{1, n}.$$

Revenind la demonstrație, observăm că P(1) este evident adevărată: $(a + b)^1 = C_1^0 a^1 + C_1^1 b^1$. Fie acum $n \in \mathbf{N}$ cu $P(n)$ adevărată. Atunci avem:

$$(a + b)^{n+1} = (a + b)(C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1}b + \ldots + C_n^n b^n) =$$

$$= C_n^0 a^{n+1} + C_n^1 a^n b + C_n^2 a^{n-1}b^2 + \ldots + C_n^n ab^n + C_n^0 a^n b + C_n^1 a^{n-1}b^2 + \ldots +$$

$$+ C_n^{n-1} ab^n + C_n^n b^{n+1} = C_n^0 a^{n+1} + (C_n^1 + C_n^0)a^n b + (C_n^2 + C_n^1)a^{n-1}b^2 + \ldots +$$

$$+ C_n^n b^{n+1} = C_{n+1}^0 a^{n+1} + C_{n+1}^1 a^n b + C_{n+1}^2 a^{n+1}b^2 + \ldots + C_{n+1}^{n+1} b^{n+1}.$$

Așadar $P(n + 1)$ este adevărată, prin urmare $P(n)$ este adevărat $(\forall)\ n \in \mathbf{N}$.

10°—11° Aplicăm 9° pentru $a = 1$ și $b = x$.

12° Prin inducție relativ la n.

2.1.18. Propoziție. *Corpul numerelor reale* $\mathbf{R}$ *posedă proprietatea lui Archimede* :

$$(\forall)\ x \in \mathbf{R},\ (\forall)\ y \in \mathbf{R}_+,\ \textit{există}\ n \in \mathbf{N}\ \textit{a.î.}\ ny > x.$$

Dem. Presupunem că $n \leqslant \frac{x}{y}$, $(\forall)\ n \in \mathbf{N}$. Aceasta înseamnă că $\mathbf{N}$ este majorată, deci posedă margine superioară ; să o notăm cu z. Cum $z - 1 < z$, există $m \in \mathbf{N}$ a. î. $m > z - 1$, deci $m + 1 > z$ și deci z nu majorează pe $\mathbf{N}$, absurd. Rămîne că $(\exists)\ n \in \mathbf{N}$ cu $n > \frac{x}{y}$, deci $ny > x$.

Corolar 1. *Mulțimea* $\mathbf{N}$ *nu posedă majoranți. Mulțimile* $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$ *nu posedă majoranți și nici minoranți.*

Dem. Fie $x \in \mathbf{R}$ fixat și $y = 1$. Atunci $(\exists)\ n \in \mathbf{N}$ cu $n = n \cdot 1 > x$, deci $\mathbf{N}$ nu posedă majoranți. Rezultă că $-\mathbf{N}$ nu posedă minoranți, deci $\mathbf{N} \cup (-\mathbf{N})$ nu posedă majoranți și nici minoranți etc.

Corolar 2.

1° $(\forall)\ \varepsilon \in \mathbf{R}_+,\ (\exists)\ n_\varepsilon \in \mathbf{N}$ *a.î.* $\frac{1}{n} < \varepsilon,\ (\forall)\ n \geqslant n_\varepsilon$;

2° $(\forall)\ \varepsilon \in \mathbf{R}_+,\ (\exists)\ n_\varepsilon \in \mathbf{N}$ *a.î.* $\frac{1}{2^n} < \varepsilon,\ (\forall)\ n \geqslant n_\varepsilon$.

Dem. 1° Pentru $\frac{1}{\varepsilon}$, $(\exists)\ m \in \mathbf{N}$ cu $m > \frac{1}{\varepsilon}$. Cum m depinde de ε, îl notăm cu n_ε. Evident avem $n > \frac{1}{\varepsilon}\ (\forall)\ n \geqslant n_\varepsilon$ (n natural), deci $\frac{1}{n} < \varepsilon\ (\forall)\ n \geqslant n_\varepsilon$.

2° Deoarece (P. 2.1.17. (10°)) $2^n > n\ (\forall)\ n \geqslant 1$, avem, cu notațiile din 1°, inegalitățile : $\frac{1}{2^n} < \frac{1}{n} < \varepsilon,\ (\forall)\ n \geqslant n_\varepsilon$

2.1.19. Definiție. O mulțime $A \leqslant \mathbf{R}$ se numește *densă* (în sensul ordinii) în $\mathbf{R}$. dacă $(\forall)\ a, b \in \mathbf{R},\ a < b$, există $x \in A$ a.i. $a < x < b$.

2.1.20. Propoziție. *Mulțimea* $\mathbf{Q}$ *a numerelor raționale este densă (în sensul ordinii) în* $\mathbf{R}$.

Dem. Fie $a, b \in \mathbf{R},\ a < b$, fixați. Evident $(\exists)\ p \in \mathbf{N}$ cu $a + p > 0$; punem $a' := a + p,\ b' := b + p$. Atunci $b' - a' = b - a > 0$, deci $(\exists)\ n \in \mathbf{N}$ cu $n(b' - a') > 1$ și deci $1 + na' < nb'$. Fie acum m cel mai mic număr natural cu proprietatea că $m > na'$, deci $m - 1 \leqslant na'$. Evident avem $m \leqslant 1 + na' < nb'$, deci $na' < m < nb'$ și deci $a' < \frac{m}{n} < b'$. Prin urmare $a < \frac{m}{n} - p < b$ și $\frac{m}{n} - p \in \mathbf{Q}$.

2.1.21. Definiție (F u n c ț i a m o d u l). Se numește *funcția modul* pe $\mathbf{R}$ o funcție $|\cdot| : \mathbf{R} \to \mathbf{R}_+$ definită astfel $|x| = x$, dacă $x \geqslant 0$ și $|x| = -x$, dacă $x < 0$.

2.1.22. Propoziție. *Funcția* $|\cdot|$ *pe* $\mathbf{R}$ *satisface proprietățile* :

1° $|a| \geqslant 0,\ (\forall)\ a \in \mathbf{R}$; 2° $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$;

3° $|a| = |-a| = \max\{a, -a\},\ (\forall)\ a \in \mathbf{R}$;

4° *Dacă* $a \in \mathbf{R}$ *și* $\varepsilon \in \mathbf{R}_+$ *avem* : $|a| \leqslant \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon \leqslant a \leqslant \varepsilon$;

5° $|a \pm b| \leqslant |a| + |b|$, $(\forall)$ $a,\ b \in \mathbf{R}$;
6° $||a| - |b|| \leqslant |a - b|$, $(\forall)$ $a,\ b \in \mathbf{R}$;
7° $|ab| = |a| \cdot |b|$, $(\forall)$ $a, b \in \mathbf{R}$;
8° $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$, $(\forall)$ $a \in \mathbf{R}$ și $b \in \mathbf{R}^*$;
9° $|a| = a_+ - a_-$, *unde* $a_+ := \max\{a, 0\}$, $a_- := \min\{a, 0\}$;
10° $\max\{a, b\} = \frac{a + b + |a - b|}{2}$, $\min\{a, b\} = \frac{a + b - |a - b|}{2}$,
$(\forall)$ $a,\ b \in \mathbf{R}$;
11° $a \in \mathbf{Q} \Leftrightarrow |a| \in \mathbf{Q}_+$

Dem. 4° Dacă $a \geqslant 0$, avem $a = |a| \leqslant \varepsilon$, deci $-\varepsilon < 0 \leqslant |a| \leqslant \varepsilon$.
Dacă $a < 0$, avem $-a = |a| \leqslant \varepsilon$, deci $-\varepsilon \leqslant a < 0 \leqslant |a| \leqslant \varepsilon$.
5° Dacă $a + b \geqslant 0$, avem $|a + b| = a + b \leqslant |a| + |b|$ (cf. 3°)
Dacă $a + b < 0$, avem $|a + b| = -(a + b) = -a - b \leqslant |a| + |b|$ (cf. 3°)
6° $|a| = |a + b - b| \leqslant |a + b| + |b|$, deci $|a| - |b| \leqslant |a + b|$.
Analog $|b| - |a| \leqslant |b + a| = |a + b|$, deci

$$-|a + b| \leqslant |a| - |b| \leqslant |a + b|$$

Aplicăm mai departe 4°
10° Dacă $a \geqslant b$, avem $a - b \geqslant 0$, deci $|a - b| = a - b$ și deci

$$\frac{a + b + |a - b|}{2} = \frac{a + b + (a - b)}{2} = a = \max\{a, b\} \text{ etc.}$$

2.1.23. Teoremă (F u n c ț i a $\sqrt[n]{\cdot}$). *Fie* $a \in \mathbf{R}_+$ *și* $n \in \mathbf{N}$ *fixați. Atunci* $(\exists!)$ $x \in \mathbf{R}_+$ *a.î.* $x^n = a$.

Soluție. Existența: Fie $A := \{x \in \mathbf{R}_+;\ x^n \leqslant a\}$. Deoarece $z := \frac{a}{a+1} < 1$, avem $z^n \leqslant z \leqslant a$, deci $z \in A$ și deci $A \neq \emptyset$. Evident mulțimea A este majorată de 1 (resp. a) dacă $a \leqslant 1$ (resp. $a > 1$). Fie $x_0 := \sup A$; observăm că $[0, x_0) \subseteq A$.

(i) Dacă $x_0^n < a$, atunci pentru $0 < b \leqslant \min\left\{1, \frac{a - x_0^n}{(1 + x_0)^n - x_0^n}\right\}$, avem:

$$(x_0 + b)^n = x_0 + b(C_n^1 x_0^{n-1} + C_n^2 x_0^{n-2} b + \ldots + C_n^n b^{n-1}) \leqslant$$
$$\leqslant x_0 + b(C_n^1 x_0^{n-1} + C_n^2 x_0^{n-2} + \ldots + C_n^n) =$$
$$= x_0^n + b\,((1 + x_0)^n - x_0^n) \leqslant x_0^n + (a - x_0^n) = a,$$

deci $x_0 + b \in A$ și deci $x_0 = \sup A \geqslant x_0 + b$ absurd.

(ii) Dacă $x_0^n > a$, atunci pentru $0 < b \leqslant \min\left\{1, x_0, \frac{x_0^n - a}{(1 + x_0)^n - x_0^n}\right\}$, avem:

$$(x_0 - b)^n = x_0^n - C_n^1 x_0^{n-1} b + C_n^2 x_0^{n-2} b^2 - \ldots + (-1)^n C_n^n b^n > x_0^n -$$
$$- (C_n^1 x_0^{n-1} b + C_n^2 x_0^{n-2} b^2 + \ldots + C_n^n b^n) = x_0^n - b(C_n^1 x_0^{n-1} + C_n^2 x_0^{n-2} b + \ldots +$$
$$+ C_n^n b^{n-1}) \geqslant x_0^n - b(C_n^1 x_0^{n-1} + C_n^2 x_0^{n-2} + \ldots + C_n^n) = x_0^n - b\,((x_0 + b)^n - x_0^n) \geqslant$$
$$\geqslant x_0^n - (x_0^n - a) = a,$$

deci $(x_0 - b)^n > a$ și cum $x_0 - b \in \mathbf{R}_+$, rezultă $x_0 - b \notin A$, absurd. Rămine că $x_0^n = a$ și existența este arătată.

Unicitatea: Fie $x_1,\ x_2 \in \mathbf{R}_+$ cu $x_1^n = a$ și $x_2^n = a$. Dacă $x_1 \neq x_2$, spre exemplu $x_1 < x_2$, atunci (P. 2.1.17.(8°)) $a = x_1^n < x_2^n = a$ absurd. Rămîne că $x_1 = x_2$.

Prin urmare $(\exists\,!)\ x_0 \in \mathbf{R}_+$ a.î. $x_0^n = a$.

Corolar 1. *Fie $a \in \mathbf{R}$ și $n \in \mathbf{N}$, n impar, fixați. Atunci $(\exists\,!)\ x \in \mathbf{R}$ a.î. $x^n - a = 0$.*

Dem. n fiind impar, avem $n = 2k + 1$, $k \in \mathbf{N}_0$.

(i) $a \in \mathbf{R}_+$. Cf. T. 2.1.23. $(\exists\,!)\ x \in \mathbf{R}_+$ a.î. $x^n = a$. Dacă $y \in \mathbf{R}^*$, avem $y^{2k} > 0$, deci $y^n = y \cdot y^{2k} < 0$ și deci $y^n < 0 \leqslant a$. Așadar $(\exists\,!)\ x \in \mathbf{R}$ a.î. $x^n = a$.

(ii) $a \in \mathbf{R}_-$. Atunci $-a \in \mathbf{R}_+$, deci cf. (i) $(\exists\,!)\ x_0 \in \mathbf{R}$ cu $x_0^n = -a$. Fie acum $y \in \mathbf{R}$ cu $y^n = -a$; punem $x := -y$. Rezultă că $x \in \mathbf{R}$ și $x^n = (-y)^{2k+1} = -y^n = -a$, deci $x = x_0$ și deci $y = -x_0$. Așadar $(\exists\,!)\ y \in \mathbf{R}$ cu $y^n = a$.

Observație. Utilizînd proprietățile funcțiilor continue (Cap. 5), existența rădăcinii poate fi arătată mult mai simplu în felul următor: Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ o funcție definită astfel $f(x) = x^n - a$; evident $f(0) = -a \leqslant 0$ și $f(a+1) = (a+1)^n - a \geqslant 1 + na - a \geqslant 1 > 0$, deci $f(a) \cdot f(a+1) \leqslant 0$. Atunci, ținînd seama că f este continuă, rezultă că $(\exists)\ x_0 \in [0, a+1]$ cu $f(x_0) = 0$ i.e. $x_0^n - a = 0$.

2.1.24. Definiție. Fie $a \in \mathbf{R}_+$ și $n \in \mathbf{N}$ fixați. Atunci unicul element $x \in \mathbf{R}_+$ care satisface relația $x^n - a = 0$ se numește *radical de ordin n* din a (sau a la *puterea* $\frac{1}{n}$) și se notează cu $\sqrt[n]{a}$ sau $a^{\frac{1}{n}}$. Obținem astfel o funcție $\mathbf{R}_+ \ni a \mapsto \sqrt[n]{a} \in \mathbf{R}_+$ numită funcția *radical de ordin n*, care se notează cu $\sqrt[n]{\cdot}$ sau $(\cdot)^{\frac{1}{n}}$. Dacă $n = 2$, funcția $\sqrt[2]{\cdot}$ se notează simplu cu $\sqrt{\cdot}$ și se numește *radical*. Analog se definește funcția $\sqrt[n]{\cdot} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, pentru $n = 2k + 1$, $k \in \mathbf{N}_0$.

Așadar avem:

$(\forall)\ a \in \mathbf{R}_+$; $\sqrt[n]{a} = x \Leftrightarrow x \in \mathbf{R}_+ \wedge x^n = a$

$(\forall)\ a \in \mathbf{R}$; $\sqrt[2n+1]{a} = x \Leftrightarrow x \in \mathbf{R} \wedge x^{2n+1} = a$

2.1.25. Propoziție (P r o p r i e t ă ț i l e f u n c ț i e i $\sqrt[n]{\cdot}$).

1° $\sqrt{a^2} = |a|$, $(\forall)\ a \in \mathbf{R}$;

2° $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$, $(\forall)\ a, b \in \mathbf{R}_+$ $(\forall)\ n \in \mathbf{N}$;

3° $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$, $(\forall)\ a \in \mathbf{R}_+$, $(\forall)\ n, k \in \mathbf{N}$;

4° $\sqrt[n]{a^k} = (\sqrt[n]{a})^k$, $(\forall)\ a \in \mathbf{R}_+$, $(\forall)$, $n, k \in \mathbf{N}$;

5° $\sqrt[nk]{a_k} = \sqrt[n]{a}$, $(\forall)$, $a \in \mathbf{R}_+$ $(\forall)\ nk \in \mathbf{N}$;

6° $(\forall)\ a, b \in \mathbf{R}_+$, *avem*: $a < b \Leftrightarrow (\forall)\ n \in \mathbf{N}, \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b} \Leftrightarrow (\exists)\ n \in \mathbf{N}$ *a.î.* $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$;

7° $(\sqrt[n]{a})^{-1} = \sqrt[n]{a^{-1}}$, $(\forall)\ a \in \mathbf{R}_+^*$, $(\forall)\ n \in \mathbf{N}$;

8° $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, $(\forall)\ a \in \mathbf{R}_+$, $(\forall)\, b \in \mathbf{R}_+^*$,

9° $(\forall)\ a > 1$, (*resp.* $0 < a < 1$), $(\forall)\ n \in \mathbf{N} \Rightarrow \sqrt[n]{a} > 1$ (*resp.* $0 < \sqrt[n]{a} < 1$).

Dem. 1° $(\forall)\ a \in \mathbf{R}$, avem $|a| > 0$ și $|a|^2 = a^2$, deci $\sqrt{a^2} = |a|$;

2° $\sqrt[n]{a} = x \Leftrightarrow x \geqslant 0 \wedge x^n = a$; $\sqrt[n]{b} = y \Leftrightarrow y \geqslant 0 \wedge y^n = b$.

Atunci $xy \geqslant 0 \wedge (xy)^n = x^n y^n = ab$, deci $\sqrt[n]{ab} = xy$ și deci $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$.

3° $\sqrt[nk]{a} = x \Leftrightarrow x \geqslant 0 \wedge x^{nk} = a$. Atunci $x^n \geqslant 0$ și $(x^n)^k = x^{nk} = a$, deci $x^n = \sqrt[n]{a}$ și deci $x = \sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}$ etc.

4° $((\sqrt[n]{a})^k)^n = ((\sqrt[n]{a})^n)^k = a^k$, deci din definiția lui $\sqrt[n]{\cdot}$, avem $(\sqrt[n]{a})^k = \sqrt[n]{a^k}$.

5° $\sqrt[n]{a} = x \Leftrightarrow x \geqslant 0 \wedge x^n = a$. Atunci $x \geqslant 0 \wedge x^{nk} = (x^n)^k = a^k$, deci $x = \sqrt[nk]{a^k}$ și deci $\sqrt[n]{a} = \sqrt[nk]{a^k}$.

6° Fie $a, b \in \mathbf{R}_+$, $a < b$, fixați. Presupunem că $(\exists)\ n \in \mathbf{N}$ cu $\sqrt[n]{b} \leqslant \sqrt[n]{a}$. Atunci (P. 2.1.17 (8°)) $b = (\sqrt[n]{b})^n \leqslant (\sqrt[n]{a})^n = a$, absurd.

Rămîne că $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$ $(\forall)\ n \in \mathbf{N}$ etc.

7° $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{a^{-1}} = \sqrt[n]{aa^{-1}} = 1$, deci $\sqrt[n]{a^{-1}} = (\sqrt[n]{a})^{-1}$.

8° Rezultă din 2° și 7°.

9° $a > 1 \overset{6°}{\Rightarrow} \sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{1} = 1$ etc.

Corolar 1. *Funcția* $\sqrt[n]{\cdot} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}_+$ *este strict crescătoare.*

Observație. Proprietăți analoage posedă și radicalul de ordin impar, definit pe $\mathbf{R}$.

2.1.26. Propoziție. *Ecuația* $x^2 - 2 = 0$ *nu are soluții în* $\mathbf{Q}$ *i.e.* $\sqrt{2} \notin \mathbf{Q}$.

Dem. Presupunem că $(\exists)\ r \in \mathbf{Q}_+^*$ cu $r^2 = 2$. Scriem $r = \frac{p}{q}$, cu $p, q \in \mathbf{N}$, prime între ele. Atunci $p^2 = 2q^2$, deci p^2 este par și deci p este par i.e. $p = 2p'$ cu $p' \in \mathbf{N}$. În acest caz avem $4p'^2 = 2q^2 \Leftrightarrow 2p'^2 = q^2$, deci q este par i.e. $q = 2q'$, $q' \in \mathbf{N}$. Rezultă că p și q se divid la 2, absurd. Rămîne că nu există $r \in \mathbf{Q}_+^*$ cu $r^2 = 2$, de unde deducem că nu există $r \in \mathbf{Q}$ cu $r^2 = 2$.

Corolar 1. *Mulțimea numerelor iraționale este nevidă.*

Dem. Din T. 2.1.23. și P. 2.1.26. rezultă că $\sqrt{2} \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$, deci $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q} = \emptyset$.

2.1.27. Propoziție (Inegalitatea lui Cauchy). *Fie* $a_i, b_i \in \mathbf{R}$, $(i = \overline{1, n})$. *Atunci avem inegalitatea:*

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i b_i| \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^2 \right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^2 \right)^{1/2}.$$

Dem. Fie $\alpha := \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^2 \right)^{1/2}$, $\beta := \left(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^2 \right)^{1/2}$, $\alpha_i := \frac{|a_i|}{\alpha}$, $\beta_i := \frac{|b_i|}{\beta}$ $(i = \overline{1, n})$. Atunci avem:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 = \frac{1}{\alpha^2} \sum_{i=1}^{n} a_i^2 = 1; \quad \sum_{i=1}^{n} \beta_i^2 = \frac{1}{\beta^2} \sum_{i=1}^{n} b_i^2 = 1,$$

deci

$$\frac{1}{\alpha\beta}\sum_{i=1}^{n}|a_ib_i| = \sum_{i=1}^{n}\frac{|a_i|}{\alpha}\cdot\frac{|b_i|}{\beta} = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\beta_i \leqslant \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i^2+\beta_i^2) = 1$$

și deci

$$\sum_{i=1}^{n}|a_ib_i| \leqslant \alpha\beta \text{ etc.}$$

2.1.28. Propoziție (Inegalitatea lui Bernoulli). *Fie* $a_i > -1$, $(i = \overline{1, n})$, *toate avînd același semn. Atunci are loc inegalitatea* $\prod_{i=1}^{n}(1+a_i) \geqslant 1 + \sum_{i=1}^{n} a_i$.

Dem. Prin inducție relativ la n. Evident P (1) este adevărată. Fie $n \geqslant 1$ cu $P(n)$ adevărată și să fixăm $a_1, a_2, \ldots a_{n+1} \in \mathbf{R}$, toate de același semn, strict mai mari ca -1. Atunci $1 + a_{n+1} > 0$ și $\prod_{i=1}^{n}(1+a_i) \geqslant 1 + \sum_{i=1}^{n} a_i$, deci

$$\prod_{i=1}^{n+1}(1+a_i) = \left(\prod_{i=1}^{n}(1+a_i)\right)(1+a_{n+1}) \geqslant \left(1+\sum_{i=1}^{n}a_i\right)(1+a_{n+1}) =$$

$$= 1 + \sum_{i=1}^{n}a_i + a_{n+1} + \left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)a_{n+1}.$$

Deoarece a_i, a_{n+1} au același semn, avem $a_ia_{n+1} \geqslant 0$, $(\forall)\ i = \overline{1, n}$, deci $\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)a_{n+1} \geqslant 0$ și deci

$$\prod_{i=1}^{n+1}(1+a_i) \geqslant 1 + \sum_{i=1}^{n}a_i + a_{n+1} = 1 + \sum_{i=1}^{n+1}a_i.$$

Așadar $P(n+1)$ este adevărată. Prin urmare $P(n)$ este adevărată, $(\forall)$ $n \geqslant 1$.

Corolar 1. *Fie* $a_1, a_2, \ldots a_n \in \mathbf{R}_+$, *toate subunitare sau toate supraunitare. Atunci are loc inegalitatea* $\prod_{i=1}^{n}a_i \geqslant 1 - n + \sum_{i=1}^{n}a_i$.

Corolar 2.

1° $(\forall)\ x > -1$, $(\forall)\ n \in \mathbf{N}$, *avem* $(1+x)^n \geqslant 1 + nx$;

2° $(\forall)\ x > 0$, $(\forall)\ n \in \mathbf{N}$, *avem* $x^n - nx + n - 1 \geqslant 0$.

Dem. 1° Punem în P. 2.1.28. $a = x$, $(\forall)\ i = \overline{1, n}$.

Corolar 3. *Fie* $a_i > -1$ $(i = \overline{1, n})$, *toate nenule și avînd același semn, iar* $n \geqslant 2$. *Atunci avem inegalitatea* $\prod_{i=1}^{n}(1+a_i) > 1 + \sum_{i=1}^{n}a_i$.

2.1.29. Propoziție. *Fie* $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbf{R}_+$ *nu toți egali cu 1 a.î.* $\prod_{i=1}^{n}a_i = 1$. *Atunci* $\sum_{i=1}^{n}a_i > n$.

Dem. Prin inducție relativ la n. Fie $a_1,\ a_2 \in \mathbf{R}_+$ cu a_1 sau a_2 diferite de 1 și $a_1a_2 = 1$. Atunci $a_1 \neq a_2$, deci

$$(a_1 + a_2)^2 = (a_1 - a_2)^2 + 4a_1a_2 > 4 \Leftrightarrow a_1 + a_2 > 2$$

și deci $P(2)$ este adevărată.

Fie $a_1a_2 \ldots a_{n+1} \in \mathbf{R}_+$ nu toți egali cu 1 a.î. $\prod_{i=1}^{n+1} a_i = 1$. Renumerotînd putem presupune $a_1 < 1$ și $a_2 > 1$, deci $(a_1 - 1)(a_2 - 1) < 0 \Leftrightarrow a_1 + a_2 > 1 + a_1a_2$. Cum $(a_1a_2)\ a_3 \ldots a_{n+1} = 1$ și $P(n)$ este adevărată, rezultă $(a_1a_2) + a_3 + \ldots + a_{n+1} \geqslant n$, deci

$$(a_1 + a_2) + a_3 + \ldots + a_{n+1} > (1 + a_1a_2) + a_3 + \ldots + a_{n+1} \geqslant 1 + n$$

și deci $P(n + 1)$ este adevărată.

Prin urmare $P(n)$ este adevărată, $(\forall)\ n \geqslant 1$.

Corolar 1. *Fie* $a_1, a_2, \ldots a_n \in \mathbf{R}_+$ *cu* $\prod_{i=1}^{n} a_i = 1$. *Atunci* $\sum_{i=1}^{n} a_i \geqslant n$; $\sum_{i=1}^{n} a_i = n \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow a_i = 1,\ (\forall)\ i = \overline{1, n}$.

2.1.30. Definiție. Fie $a_1,\ a_2 \ldots a_n \in \mathbf{R}$ fixați. Punem $A(a_1, \ldots a_n) := \dfrac{a_1 + \ldots + a_n}{n}$, $G(a_1, \ldots, a_n) := \sqrt[n]{a_1 \ldots a_n}$, dacă $a_i \geqslant 0,\ (\forall)\ i = \overline{1, n}$ și $H(a_1, \ldots a_n) = \dfrac{n}{\dfrac{1}{a_1} + \ldots + \dfrac{1}{n}}$ dacă $a_i > 0\ (\forall)\ i = \overline{1, n}$. Numerele astfel definite se numesc *media aritmetică*, *media geometrică*, resp. *media armonică* a numerelor $a_1,\ a_2, \ldots a_n$.

2.1.31. Propoziție (Inegalitatea mediilor). $(\forall)\ a_1, a_2, \ldots a_n \in \mathbf{R}_+^*$ *avem inegalitățile* :

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1a_2 \ldots a_n} \geqslant \frac{n}{\dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + \ldots + \dfrac{1}{a_n}},$$

cu egalitate $\Leftrightarrow a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

Dem. Fie $x_i := \dfrac{a_i}{G(a_1, a_2, \ldots a_n)}$ $(i = \overline{1, n})$. Cum $x_i > 0$, $(\forall)\ i = \overline{1, n}$ și

$$\prod_{i=1}^{n} x_i = (a_1a_2 \ldots a_n) \frac{1}{(G(a_1, a_2, \ldots a_n))^n} = 1,$$

rezultă (P.2.1.19.) că $\sum_{i=1}^{n} x_i \geqslant n$, deci $\sum_{i=1}^{n} a_i \geqslant nG(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ etc.

A doua inegalitate se obține astfel :

$$H(a_1, \ldots a_n) = \frac{1}{A\left(\dfrac{1}{a_1}, \ldots \dfrac{1}{a_n}\right)} \leqslant \frac{1}{G\left(\dfrac{1}{a_1}, \ldots \dfrac{1}{a_n}\right)} = G(a_1, \ldots a_n)$$

Dacă $\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} = \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$, atunci $\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{G(a_1, \ldots a_n)} = n$,

deci $\sum_{i=1}^{n} x_i = n$ și deci (P.2.1.29. Cor. 1) $x_i = 1$, $(\forall)\ i = \overline{1, n} \Leftrightarrow a_i = G(a_1, \ldots a_n)$ $(\forall)\ i = \overline{1, n}$ etc.

2.1.32. Propoziție. *Fie* $x_1, x_2, \ldots x_n \in \mathbf{R}$ *și* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n \in \mathbf{R}_+$ *a.î.* $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$.

Atunci $\min_{i=\overline{1,n}} x_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \leqslant \max_{i=\overline{1,n}} x_i$

Dem. Notăm $m := \min_{i=\overline{1,n}} x_i$ și $M := \max_{i=\overline{1,n}} x_i$. Atunci

$$\lambda_i m \leqslant \lambda_i x_i \leqslant \lambda_i M, \quad (\forall)\ i = \overline{1, n}.$$

deci

$$m = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i m) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i M) = M.$$

Corolar 1. *Fie* $x_1, x_2, \ldots x_n \in \mathbf{R}$ *și* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n \in \mathbf{R}_+$. *Atunci*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right) \min_{i=\overline{1,n}} x_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} \max_{i=\overline{1,n}} x_i\right).$$

Corolar 2. *Fie* $a_1, a_2, \ldots a_n \in \mathbf{R}$ *și* $b_1, b_2, \ldots b_n \in \mathbf{R}_+^*$, *Atunci*

$$\min_{i=\overline{1,n}} \frac{a_i}{b_i} \leqslant \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{b_1 + b_2 + \ldots + b_n} \leqslant \max_{i=\overline{1,n}} \frac{a_i}{b_i}.$$

Dem. Fie $\lambda_i = \frac{b_i}{b}$, unde $b = \sum_{k=1}^{n} b_k$. Atunci $\lambda_i > 0$ și $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$, deci

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{b_1 + b_2 + \ldots + b_n} = \lambda_1 \frac{a_1}{b_1} + \lambda_2 \frac{a_2}{b_2} + \ldots + \lambda_n \frac{a_n}{b_n} \in \left[\min_{i=\overline{1,n}} \frac{a_i}{b_i}, \max_{i=\overline{1,n}} \frac{a_i}{b_i}\right]$$

2.1.33. Definiție. Fie $\mathbf{R}$ mulțimea numerelor reale și $-\infty$, $+\infty$ două elemente *arbitrare* care nu aparțin lui $\mathbf{R}$; definim $\overline{\mathbf{R}} := \mathbf{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$. Pe $\overline{\mathbf{R}}$ extindem relația de ordine a lui $\mathbf{R}$ astfel : $-\infty < x$, $x < +\infty$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$ și $-\infty < +\infty$. Mulțimea $\overline{\mathbf{R}}$ cu relația de ordine (totală) astfel definită se numește *dreapta completată* (încheiată), elementul $-\infty$ (resp. $+\infty$) se numește *minus infinit* (resp. *plus infinit*). Elementul $+\infty$ se notează adeseori cu ∞. Un element $x \in \overline{\mathbf{R}}$ se numește, prin abuz de limbaj, *număr*; *finit*, dacă $x \in \mathbf{R}$ și *infinit*, dacă $x = -\infty$ sau $x = +\infty$.

2.2. Mulțimi mărginite și intervale în R

$\mathbf{R}$ fiind o mulțime (total) ordonată, au sens în $\mathbf{R}$ noțiunile de mulțime majorată, minorată, mărginită; margine superioară și margine inferioară a unei mulțimi în $\mathbf{R}$ (v. Def. 1.3.4.). $\mathbf{R}$ având și structură de corp (corp complet ordonat), aceste concepte admit în $\mathbf{R}$ formulări echivalente mai simple.

Exemple.

1. Orice mulțime finită este mărginită.

2. Fie $A \subseteq \mathbf{R}$ una din mulțimile : $(0,1)$, $(0,1) \cap \mathbf{Q}$, $(0,1) \setminus \mathbf{Q}$.

Atunci A este mărginită și avem $\inf A = 0$, $\sup A = 1$.

3. Mulțimile $\mathbf{N}$, $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$. $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$ nu admit majoranți și nici minoranți, deci nu sînt mărginite.

Mulțimea $\mathbf{R}_+$ (resp. $\mathbf{R}_-$) este minorată (resp. majorată) însă nu este mărginită.

4. Fie $A = \left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \ldots \frac{n}{n+1}, \ldots\right\}$. Atunci $\min A = \frac{1}{n}$, și $\sup A = 1$.

2.2.1. Propoziție. *Orice mulțime minorată $A \subseteq \mathbf{R}$, posedă margine inferioară.*

Dem. Notăm cu A_- mulțimea minoranților lui A, care este nevidă cf. ipotezei. Fie $a \in A$ fixat. Deoarece A_- este majorată de a, din definiția lui $\mathbf{R}$ rezultă că $\alpha = \sup A_-$ există (în $\mathbf{R}$) și avem $\alpha \leqslant a$. Așadar α este un minorant al lui A.

Fie acum α' un minorant arbitrar al lui A. Atunci $\alpha' \in A_-$, deci $\alpha' \leqslant \alpha$ și deci α este cel mai mare minorant al lui A. Prin urmare $\alpha = \inf A$.

Corolar 1. *Orice mulțime mărginită de numere reale posedă (în $\mathbf{R}$) margine superioară și margine inferioară.*

2.2.2. Definiție. Fie $A \subseteq \mathbf{R}$ o mulțime. Dacă A nu posedă majoranți (resp. minoranți), în $\mathbf{R}$, vom spune că $\sup A$ este egal cu $+\infty$ (resp. $\inf A$ este egal cu $-\infty$).

Așadar $(\forall)\ A \subseteq \mathbf{R}$, $\sup A$ are sens; $\sup A$ este un număr real, dacă A este majorată și $\sup A = +\infty$, dacă A nu este majorată. Analog, $\inf A$ are sens : $\inf A$ este un număr real, dacă A este minorată și $\inf A = -\infty$, dacă A nu este minorată. Prin urmare avem :

A majorată $\Leftrightarrow \sup A < +\infty$; A minorată $\Leftrightarrow \inf A > -\infty$.

Observație. Fie $A \subseteq \mathbf{R}$ o mulțime care nu este majorată (resp. minorată). Considerată ca o submulțime în $\overline{\mathbf{R}}$, înzestrată cu ordinea naturală, se vede imediat că A are margine superioară (resp. inferioară) în $\overline{\mathbf{R}}$ și aceasta este egală cu $+\infty$ (resp. $-\infty$). Rezultatul obținut concordă cu convenția făcută în Def. 2.2.2.

2.2.3. Definiție. Fie $A \subseteq \mathbf{R}$ o mulțime. Numărul $0 \leqslant \rho \leqslant +\infty$ definit astfel $\rho = \sup_{x,y \in A} |x - y|$ se numește *diametru* lui A și se notează cu dia(A).

2.2.4. Propoziție. Fie $A \subseteq \mathbf{R}$ *o mulțime. Atunci cond.* $1°-7°$ sînt echivalente :

$1°$ A *mărginită i.e. A majorată și minorată*;

$2°$ $(\exists)\ a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$, *a.î.* $a \leqslant x \leqslant b$, $(\forall)\ x \in A$;

$3°$ $(\exists)\ k \in \mathbf{R}_+$ *a.î.* $|x| \leqslant k$, $(\forall)\ x \in A$;

$4°$ dia $(A) < +\infty$;

$5°$ $\sup_{x \in A} |x| < +\infty$;

$6°$ $(\forall)\ x_0 \in \mathbf{R}$ *avem* $\sup_{x \in A} |x - x_0| < +\infty$;

$7°$ $(\exists)\ x_0 \in \mathbf{R}$ *a.î.* $\sup_{x \in A} |x - x_0| < +\infty$.

Dem. $1° \Leftrightarrow 2°$ Evident.

$2° \Rightarrow 3°$ Fie $k := \max\{|a|, |b|\}$. Atunci $k \geqslant |a| \geqslant -a$ și $k \geqslant |b| \geqslant b$, deci $-k \leqslant a < b \leqslant k$ și deci

$$-k \leqslant x \leqslant k\ (\forall)\ x \in A \Leftrightarrow |x| \leqslant k, \forall\ x \in A$$

$3° \Rightarrow 4°$ $|x-y| \leqslant |x| + |y| \leqslant 2k$, $(\forall)\, x \in A$, deci dia $(A) \leqslant 2k < +\infty$

$4° \Rightarrow 5°$ Fie $x_0 \in A$ fixat. Atunci $(\forall)\, x \in A$, avem $|x| \leqslant |x - x_0| + |x_0| \leqslant$ dia $(A) + |x_0|$, deci $\sup\limits_{x \in A} |x| \leqslant$ dia $(A) + x_0) < +\infty$.

$5° \Rightarrow 6°$ Fie $x_0 \in \mathbf{R}$ fixat. Atunci avem :

$$\sup_{x \in A} |x - x_0| \leqslant |x_0| + \sup_{x \in A} |x| < +\infty.$$

$6° \Rightarrow 7°$. Evident.

$7° \Rightarrow 1°$ Fie $k := \sup\limits_{x \in A} |x - x_0| < +\infty$. Atunci $|x - x_0| \leqslant k$, $(\forall)\, x \in A$, deci $-k + x_0 \leqslant x \leqslant k + x_0$, $(\forall)\, x \in A$ şi deci A mărginită.

Corolar 1. *Fie* $A_1, A_2, \ldots A_n \subseteq \mathbf{R}$ *mărginite. Atunci* $\bigcup\limits_i A_i$ *şi* $\sum\limits_i A_i$ *sînt mărginite.*

Dem. Fie $A := \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$. Atunci $\sup\limits_{x \in A} |x| \leqslant \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} (\sup\limits_{x \in A_i} |x|) < +\infty$ etc.

2.2.5. Propoziţie.

$1°$ $(\forall)\, a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$, *rezultă* $a < \dfrac{a+b}{2} < b$, *deci* $(\exists)\, \varepsilon > 0$ *a.î.* $a + \varepsilon < b$;

$2°$ $(\forall)\, a, b \in \mathbf{R}$ *cu* $a \leqslant b + \varepsilon$, $(\forall)\, \varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$, *rezultă că* $a \leqslant b$;

$3°$ $(\forall)\, a, b \in \mathbf{R}$ *cu* $a \geqslant b - \varepsilon$, $(\forall)\, \varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$, *rezultă că* $a \geqslant b$.

Dem. $1°$. $\dfrac{a+b}{2} = a + \dfrac{b-a}{2} > a$, $\dfrac{a+b}{2} = b - \dfrac{b-a}{2} < b$.

$2°$ Presupunem $a > b$. Atunci cf. $1°$ $(\exists)\, \varepsilon > 0$ cu $a > b + \varepsilon$, absurd. Rămîne că $a \leqslant b$.

$3°$ Analog cu $2°$.

2.2.6. Propoziţie. *Fie* $A \subseteq \mathbf{R}$ *o mulţime. Atunci avem* :

$1°$ $b = \sup A \Leftrightarrow \begin{cases} \text{(i)}\ x \leqslant b\ (\forall)\ x \in A\ ; \\ \text{(ii)}\ (\forall)\ c < b, (\exists)\ x \in A, x > c \end{cases}$

$2°$ $a = \inf A \Leftrightarrow \begin{cases} \text{(i)}\ x \geqslant a\ (\forall)\ x \in A\ ; \\ \text{(ii)}\ (\forall)\ c > a, (\exists)\ x \in A, x < c \end{cases}$

Dem. $1°$. ($\Rightarrow$) Fie $b = \sup A$. Din definiţia marginii superioare rezultă că b majorează A, deci $x \leqslant b$, $(\forall)\, x \in A$. De asemenea avem că b este cel mai mic majorant al lui A, deci $(\forall)\, c < b$, rezultă că c nu majorează A şi deci $(\exists)\, x \in A$ care nu este majorat de c, adică $x > c$.

($\Leftarrow$) Din (i) şi (ii) rezultă, raţionînd la fel, că $b = \sup A$.

$2°$ Se arată la fel cu $1°$.

Corolar 1. *Fie* $A \subseteq \mathbf{R}$ *o mulţime majorată* (*resp. minorată*). *Atunci avem* $1°$ (*resp.* $2°$), *unde* :

$1°$ $b = \sup A \Leftrightarrow \begin{cases} \text{(i)}\ x \leqslant b\ (\forall)\ x \in A\ ; \\ \text{(ii)}\ (\forall)\ \varepsilon > 0, (\exists)\ x \in A, x > b - \varepsilon \end{cases}$

$2°$ $a = \inf A \Leftrightarrow \begin{cases} \text{(i)}\ x \geqslant a\ (\forall)\ x \in A\ ; \\ \text{(ii)}\ (\forall)\ \varepsilon > 0, (\exists)\ x \in A, x < a + \varepsilon. \end{cases}$

Corolar 2. Fie $A \subseteq \mathbf{R}$ *o mulţime majorată* (*resp. mninorată*). *Atunci* $\sup A \leqslant b$ (*resp.* $\inf A \geqslant a$) $\Leftrightarrow x \leqslant b$ (*resp.* $a \not\leqslant x$) $(\forall)\, x \in A$.

Corolar 3. *Fie* $A \subseteq \mathbf{R}$ *o mulţime. Atunci*

$1°$ *Dacă* $(\exists)\, b \in \mathbf{R}$ *a.î.* $x \leqslant b + \varepsilon$, $(\forall)\, x \in A$ şi $\varepsilon \in \mathbf{R}_+$, *rezultă că* $\sup A \leqslant b$;

2° *Dacă* $(\exists)\ a \in \mathbf{R}$ *a.î.* $x \geqslant a - \varepsilon$, $(\forall)\ x \in A$ *și* $\varepsilon \in \mathbf{R}_+$, *rezultă* $\inf A \geqslant a$.

Dem. 1° Fie $x \in A$ fixat. Deoarece $x \leqslant b + \varepsilon$ $(\forall)\ \varepsilon \in \mathbf{R}_+$, rezultă (P. 2.2.5.) că $x \leqslant b$, deci (Cor. 2) $\sup\limits_{x \in A} x \leqslant b$ etc.

2.2.7. Propoziție. *Fie* $A, B \subseteq \mathbf{R}$ *două mulțimi a.î.* $A \subseteq B$. *Atunci* :

1° $\sup A \leqslant \sup B$; 2° $\inf A \geqslant \inf B$; 3° *Dacă* B *este majorată (resp. minorată), rezultă că* A *este majorată (resp. minorată).*

Dem. 1° Fie $\beta := \sup B$. Dacă $\beta = +\infty$, avem evident $\sup A \leqslant +\infty$. Dacă $\beta < +\infty$, cum β majorează pe B, deci și pe A, rezultă că $\sup A \leqslant \beta$.

2° se arată la fel iar 3° rezultă din 1° și 2°.

2.2.8. Propoziție. *Fie* $A, B \subseteq \mathbf{R}$ *două mulțimi. Atunci au loc relațiile* :

1° $\sup(-A) = -\inf A$, $\inf(-A) = -\sup A$;

2° $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$, $\inf(A + B) = \inf A + \inf B$;

3° $\operatorname{dia}(A) = \sup A - \inf A \leqslant 2 \sup |A|$.

Dem. 1° Punem $\alpha = \inf A$ și $\beta = \sup(-A)$. Atunci $x \geqslant \alpha$, $(\forall)\ x \in A$, deci $-x \leqslant -\alpha$ $(\forall)\ x \in A$ și deci $\beta = \sup\limits_{x \in A}(-x) \leqslant -\alpha$.

De asemenea avem $-x \leqslant \beta$, $(\forall)\ x \in A$, deci $x \geqslant -\beta$, $(\forall)\ x \in A$ și $\alpha = \inf\limits_{x \in A} x \geqslant \alpha - \beta$. Din relațiile obținute $\beta \leqslant -\alpha$ și $\alpha \geqslant -\beta$, rezultă $-\alpha = \beta$.

A doua relație se obține din prima, înlocuind A cu $-A$.

2° Avem $x + y \leqslant \sup A + \sup B$, $(\forall)\ x \in A \wedge y \in B$, deci

$$\sup(A + B) = \sup\{x + y\,;\ x \in A, y \in B\} \leqslant \sup A + \sup B.$$

Dacă $\sup(A + B) = +\infty$, avem $\sup A + \sup B \leqslant \sup(A + B)$.

Presupunem $\sup(A + B) < +\infty$. Atunci $A + B$ este majorată, de unde deducem că A și B sînt majorate. Fie $\varepsilon > 0$ fixat. Din P. 2.2.6 Cor. 1 rezultă că $(\exists)\ a \in A \wedge b \in B$ a.î. $a \geqslant \sup A - \dfrac{\varepsilon}{2}$ și $b \geqslant \sup B - \dfrac{\varepsilon}{2}$, deci $a + b \geqslant \sup A + \sup B - \varepsilon$ și deci :

$$\sup(A + B) \geqslant a + b \geqslant \sup A + \sup B - \varepsilon.$$

Cum $\varepsilon > 0$ a fost arbitrar, rezultă că :

$$\sup(A + B) \geqslant \sup A + \sup B \text{ etc.}$$

A doua relație se obține din prima înlocuind A și B prin $-A$ respectiv $-B$ și ținînd apoi seamă de 1°.

3° $\operatorname{dia}(A) = \sup\limits_{x,y \in A} |x - y| = \sup\limits_{x,y \in A}(x - y) = \sup\limits_{x \in A} x + \sup\limits_{y \in A}(-y) =$
$= \sup A + \sup(-A) = \sup A - \inf A$ (cf. 1°).

În fine, avem :

$$\operatorname{dia}(A) \leqslant \sup_{x,y \in A}(|x| + |-y|) = \sup_{x \in A}|x| + \sup_{y \in A}|y| =$$
$$= 2 \sup_{x \in A}|x| = 2 \sup |A|$$

Corolar 1. *Fie* $A \subseteq \mathbf{R}$ *o mulțime și* $x \in \mathbf{R}$ *un punct. Atunci au loc relațiile :*

$$\sup(x + A) = x + \sup A\,;\quad \inf(x + A) = x + \inf A.$$

2.2.9. Definiție. Fie $a,\ b \in \mathbf{R}$, $a < b$, fixați. Atunci vom scrie $(a, b) := \{x \in \mathbf{R}\,;\ a < x < b\}$, $(a, b] := \{x \in \mathbf{R}\,;\ a < x \leqslant b\}$, $[a, b) := \{x \in \mathbf{R}\,;\ a \leqslant x < b\}$,

$[a, b] := \{x \in \mathbf{R};\ a \leqslant x \leqslant b\}$, $(a, \to) := \{x \in \mathbf{R};\ x > a\}$, $[a, \to) := \{x \in \mathbf{R};\ x \geqslant a\}$, $(\leftarrow, a) := \{x \in \mathbf{R};\ x < a\}$, $(\leftarrow, a] := \{x \in \mathbf{R};\ x \leqslant a\}$.

Se numește *interval deschis* în $\mathbf{R}$ o mulțime $I \subseteq \mathbf{R}$ de forma : (a, b), $(\leftarrow, a)$, $(a, \to)$ și $\mathbf{R}$, unde $a, b \in \mathbf{R}$ și $a < b$. Se numește *interval închis* în $\mathbf{R}$ o mulțime $I \subseteq \mathbf{R}$ de forma : $[a, b]$, $[a, \to)$, $(\leftarrow, a]$ și $\mathbf{R}$, unde $a, b \in R$ și $a \leqslant b$. Se numește *interval* în $\mathbf{R}$ o mulțime $I \subseteq \mathbf{R}$ de forma (a, b), $[a, b)$, $(a, b]$, $[a, b]$, $(a, \to)$, $[a \to)$, $(\leftarrow, a]$, $(\to, a)$ și $\mathbf{R}$, unde $a, b \in \mathbf{R}$ și $a < b$. Un interval care nu se reduce la un punct se numește *nedegenerat*. Se numește *interval mărginit* un interval $I \subseteq \mathbf{R}$ de forma (a, b), $[a, b]$, $(a, b]$, $[a, b]$; numărul $b - a$ se numește *lungimea intervalului* I și se notează cu $|I|$. Un interval care nu este mărginit (nemărginit), vom spune că are *lungimea infinită*. Un interval mărginit și închis se numește *interval compact**.

Observație. Intervalele de forma $(a, \to)$, $[a, \to)$, $(\leftarrow, a)$, $(\leftarrow, a]$ se notează cel mai adesea cu (a, ∞), $[a, \infty)$, $(-\infty, a)$, $(-\infty, a]$, respectiv.

2.2.10. Definiție. Se numește *interval în* $\overline{\mathbf{R}}$ o mulțime $I \subseteq \overline{\mathbf{R}}$ de forma (a, b), $[a, b]$, $[a, b)$ $(a, b]$, unde $a, b \in \overline{\mathbf{R}}$ și $a < b$. În cazul intervalelor de forma $[a, b]$ vom considera și cazul $a = b$.

Să observăm că dacă I este un interval în $\overline{\mathbf{R}}$, atunci $I \cap \mathbf{R}$ este un interval în $\mathbf{R}$ și orice interval în $\mathbf{R}$ este de această formă.

2.2.11. Propoziție. $(\forall)$ $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$, *avem* :

$$[a, b] = \{x \in \mathbf{R};\ x = (1 - \lambda)\ a + \lambda b,\ 0 \leqslant \lambda \leqslant 1\}$$

Dem. Fie $x = (1 - \lambda)\ a + \lambda b$ cu $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$. Atunci $x = a + \lambda(b - a)$ și cum $0 \leqslant \lambda\,(b - a) \leqslant b - a$, avem $a \leqslant x \leqslant a + (b - a) = b$, deci $x \in [a, b]$.

Reciproc, dacă $x \in [a, b]$, punem $\lambda = \dfrac{x - a}{b - a}$. Atunci $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, $1 - \lambda = \dfrac{b - x}{b - a}$ și avem :

$$(1 - \lambda)a + \lambda b = \frac{b - x}{b - a}\,a + \frac{x - a}{b - a}\,b = x, \text{ etc.}$$

2.2.12. Definiție. O mulțime $A \subseteq \mathbf{R}$ se numește *convexă* dacă $(\forall)$ $x, y \in A$ și $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, rezultă că $(1 - \lambda)\ x + \lambda y \in A$.

Corolar 1. *Corespondența* $\lambda \mapsto (1 - \lambda)\ a + \lambda\ b$ *definește o aplicație strict crescătoare și surjectivă a intervalului* $(0,1)$ (*resp.* $[0,1]$) *pe* (a, b) (*resp.* $[a, b]$).

2.2.13. Propoziție. *Fie* $A \subseteq \mathbf{R}$ *o mulțime. Atunci cond.* 1°—4° *sînt echivalente* :

1° A *interval*;

2° $(\forall)$ $x, y \in A$, $x < y$, *rezultă* $[x, y] \subseteq A$;

3° A *convexă*;

4° $(\forall)$ $x_1, x_2, \ldots, x_n \in A$; $(\forall)$ $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \geqslant 0$ *cu* $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$, *rezultă* $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \in A$.

Dem. 1° $\Rightarrow$ 2°. A fiind interval este de forma : $[a, b]$, $[a, b)$, $(a, b]$, (a, b), $(\leftarrow, a)$, $(\leftarrow, a]$, $(a, \to)$, $[a, \to)$ sau $\mathbf{R}$, unde $a, b \in \mathbf{R}$ și $a < b$. Fie, spre exemplu,

* Vezi mai departe definiția mulțimii compacte (D. 5.2.1.) și T. 5.2.6.

$A = (a, b]$ și $x, y \in A$, $x < y$. Atunci $(\forall)\ z \in [x, y]$, avem $a < x \leqslant z \leqslant y \leqslant b$, deci $z \in (a, b] \subseteq A$ și deci $[x, y] \subseteq A$.

$2° \Rightarrow 3°$. Fie $x, y \in A$, $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ și $z = (1 - \lambda)\ x + \lambda y$. Atunci, în ipoteza $x < y$, avem (P. 2.2. 11.) $z \in [x, y]$ cf. $2°$ $[x, y] \subseteq A$, deci $(1 - \lambda)\ x + \lambda y \in$ $\in [x, y] \subseteq A$ și deci A este convexă.

$3° \Rightarrow 1°$. Fie $a = \inf A$, $b = \sup A$ și să arătăm că $(a, b) \subseteq A \subseteq [a, b]$ (1).

Într-adevăr, fie $x \in (a, b)$ fixat, deci $a < x < b$. Atunci (P. 2.2.11) $(\exists)\ x_1$, $x_2 \in A$ cu $a \leqslant x_1 < x < y_1 \leqslant b$, deci (P. 2.2. 11) x se reprezintă sub forma $x =$ $= (1 - \lambda)\ x_1 + \lambda y_1$, cu $0 < \lambda < 1$. Mulțimea A fiind convexă, avem $x \in A$, deci $(a, b) \subseteq A$. Cum $\inf A \leqslant x \leqslant \sup A$ $(\forall)\ x \in A$, avem $A \subseteq [a, b]$. Așadar (1) este adevărată, de unde rezultă imediat că A este interval.

$4° \Rightarrow 3°$. Fie $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ și $x, y \in A$ fixați. Luăm $\lambda_1 := 1 - \lambda$, $\lambda_2 := \lambda$; atunci $(1 - \lambda)\ x + \lambda y = \lambda_1 x + \lambda_2 y \in A$, deci A convexă.

$2° \Rightarrow 4°$. Fie $x_1, x_2 \ldots x_n \in A$ și $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \geqslant 0$ cu $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$, fixați. Atunci (P. 2.1.32.) $m \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \leqslant M$, unde $m := \min_{i=\overline{1,n}} x_i$ și $M := \max_{i=\overline{1,n}} x_i$. Cum evident m, $M \in A$ și $m \leqslant M$, rezultă că $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \in [m, M] \subseteq A$.

2.3. Șiruri de numere. Proprietăți generale

Vom defini aici noțiunile importante de *șir convergent*, *șir fundamental* și *șir cu limită* de numere reale și vom demonstra apoi principalele proprietăți generale pe care le au.

2.3.1. Definiție. Fie $(x_n)_{n \geqslant 1}$ un șir de elemente din $\mathbf{R}$. Vom spune că $(x_n)_{n \geqslant 1}$ este *convergent*, dacă $(\exists)\ x \in \mathbf{R}$ cu proprietatea :

$$(\forall)\ \varepsilon > 0, (\exists)\ n_\varepsilon \geqslant 1 \text{ a.î. } |x_n - x| < \varepsilon, (\forall)\ n \geqslant n_\varepsilon.$$

Numărul x se numește *limita șirului* $(x_n)_{n \geqslant 1}$ și se scrie :

$\lim_{n \to \infty} x_n = x$, $\lim_{n} x_n = x$, $x_n \to x$, $x_n \to x\ (n \to \infty)$. Vom spune uneori că $(x_n)_{n \geqslant 1}$ este *convergent și are limita* x sau $(x_n)_{n \geqslant 1}$ *converge* la x.

2.3.2. Definiție. Fie $(x_n)_{n \geqslant 1}$, un șir de elemente din $\mathbf{R}$. Vom spune că $(x_n)_{n \geqslant 1}$ este *șir fundamental* (șir Cauchy), dacă are proprietatea :

$$(\forall)\ \varepsilon > 0, (\exists)\ n_\varepsilon \geqslant 1 \text{ a.î. } |x_n - x_m| < \varepsilon\ (\forall)\ n, m \geqslant n_\varepsilon$$

Observație. Fie $x_n \in \mathbf{R}$ $(n \geqslant 1)$ un șir de numere. Atunci $1°$ $(x_n)_{n \geqslant 1}$ nu este convergent $\Leftrightarrow (\forall)\ x \in \mathbf{R}$, $(\exists)\ \varepsilon > 0$, $(\exists)$ $(x_{n_k})_{k \geqslant 1}$ un subșir al șirului $(x_n)_{n \geqslant 1}$ a.î. $|x - x_{n_k}| \geqslant \varepsilon$, $(\forall)\ k \geqslant 1$; $2°$ $(x_n)_{n \geqslant 1}$ nu converge la $x \in \mathbf{R} \Leftrightarrow (\exists)\ \varepsilon > 0$ și $(x_{n_k})_{k \geqslant 1}$ un subșir al lui $(x_n)_{n \geqslant 1}$ a.î. $|x - x_{n_k}| \geqslant \varepsilon$, $(\forall)\ k \geqslant 1$; $3°$ $(x_n)_{n \geqslant 1}$ nu este șir Cauchy $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (\exists)\ \varepsilon > 0$. $(\exists)$ $(x_{n_k})_{k \geqslant 1}$ și $(x_{m_k})_{k \geqslant 1}$ două subșiruri ale șirului $(x_n)_{n \geqslant 1}$ a.î. $|x_{n_k} - x_{m_k}| \geqslant$ $\geqslant \varepsilon$, $(\forall)$, $k \geqslant 1$.

Exemple.

1. *Fie* $(x_n)_{n \geqslant 1}$ *un șir staționar de numere reale. Atunci* $(x_n)_{n \geqslant 1}$ *este convergent.* Cf. ipotezei $(\exists)\ N \geqslant 1$ a.î. $x_n = x_N$, $(\forall)\ n \geqslant N$. Evident $\lim_{n \to \infty} x_n = x_N$

2. *Șirul* $(x_n) = (-1)^n$ $(n \geqslant 1)$ *nu este convergent.*

Presupunem $(x_n)_{n\geq 1}$ convergent, fie x limita sa și $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Atunci $(\exists)\ N \geq 1$ a.î. $|x_n - x| < \frac{1}{2}$, $(\forall)\ n \geq N$. Luînd n par (resp. impar), $n \geq N$, obținem: $|1 - x| < \frac{1}{2}$ $\left(\text{resp. } |-1-x| < \frac{1}{2}\right)$, de unde rezultă $x > \frac{1}{2}$ $\left(\text{resp. } x < -\frac{1}{2}\right)$, absurd. Rămîne că $(x_n)_{n\geq 1}$ nu este convergent.

3. *Fie* $x_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbf{N}$. *Atunci* $x_n \to 0$ $(n \to \infty)$.

Într-adevăr, fie $\varepsilon > 0$ fixat. Atunci (P. 2.1.18.) $(\exists)\ n_\varepsilon \in \mathbf{N}$ cu $n_\varepsilon \geq \frac{1}{\varepsilon}$, deci $0 < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_\varepsilon} < \varepsilon$, $(\forall)\ n \geq n_\varepsilon$ și deci $x_n \to 0$.

Deoarece (P. 2.1.17. (10°)) $2^n > n$, $(\forall)$, $n \geq 1$, rezultă $0 < \frac{1}{2^n} < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_\varepsilon} < \varepsilon$, $(\forall)\ n \geq n_\varepsilon$, deci avem de asemenea $\frac{1}{2^n} \to 0$ $(n \to \infty)$

4. *Fie* $(x)_{n\geq 1}$ *un șir convergent cu elemente din* $\mathbf{R}_+$, *care are limita* x. *Atunci șirul* $(\sqrt{x_n})_{n\geq 1}$ *este convergent și are limita* $\sqrt{x}$.

(i) $x > 0$. Evident avem:

$$|\sqrt{x_n} - \sqrt{x}| = \frac{|x_n - x|}{\sqrt{x_n} + \sqrt{x}} \leq \frac{|x_n - x|}{\sqrt{x}},\ (\forall)\ n \geq 1$$

Fie $\varepsilon > 0$ fixat. Deoarece $x_n \to x$, $(\exists)\ n_\varepsilon \geq$ a.î.

$|x_n - x| \leq \varepsilon\sqrt{x}$, $(\forall)$ $n \geq n_\varepsilon$, deci $|\sqrt{x_n} - \sqrt{x}| \leq \frac{\varepsilon\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \varepsilon$, $(\forall)$, $n \geq n_\varepsilon$ etc.

(ii) $x = 0$. Fie $\varepsilon > 0$ fixat. Atunci $(\exists)\ n_\varepsilon \geq 1$ a.î. $x_n = |x_n - 0| \leq \varepsilon^2$, $(\forall)\ n \geq n_\varepsilon$, deci $|\sqrt{x_n} - 0| \leq \sqrt{\varepsilon^2} = \varepsilon$, $(\forall)\ n \geq n_\varepsilon$ și deci $\sqrt{x_n} \to 0$ $(n \to \infty)$.

5. *Fie* $x_n = \frac{1}{n^2}$, $n \in \mathbf{R}$. *Atunci* $(x_n)_{n\geq 1}$ *este șir Cauchy.*

Într-adevăr, fie $\varepsilon > 0$ fixat. Atunci

$$\left|\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right| < \frac{1}{n^2} + \frac{1}{m^2} \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{m} < \varepsilon,\ (\forall)\ n, m \geq N,$$

unde $N = E\left(\frac{2}{\varepsilon}\right) + 1$, deci $(x_n)_{n\geq 1}$ este șir Cauchy.

6. *Fie* $x_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}$, $(n \geq 1)$. *Atunci* $(x_n)_{n\geq 1}$ *este șir Cauchy.*

Într-adevăr $(\forall)\ n, p \geq 1$ avem:

$$0 < x_{n+p} - x_n = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \ldots + \frac{1}{(n+p)!} <$$

$$< \frac{1}{n!}\left[\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \ldots + \frac{1}{(n+1)^p}\right] < \frac{1}{n!}\,\frac{\frac{1}{n+1}}{1-\frac{1}{n+1}} = \frac{1}{n!\,n} < \frac{1}{n},$$

deci $|x_m - x_n| < \varepsilon$, $(\forall)\ n, m \geqslant n_\varepsilon = E\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$ etc.

2.3.3. Definiție. Fie $(x_n)_{n\geqslant 1}$ un șir de numere reale. Vom spune că $(x_n)_{n\geqslant 1}$ are *limita* ∞, dacă :

$$(\forall)\ c \in \mathbf{R}_+, (\exists)\ n_c \geqslant 1 \text{ a.î. } x_n \geqslant c, (\forall)\ n \geqslant n_c.$$

Vom scrie atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$, $\lim\limits_{n} x_n = \infty$, $x_n \to \infty$, $x_n \to \infty$ $(n \to \infty)$.

Vom spune că $(x_n)_{n\geqslant 1}$ are *limita* $-\infty$, dacă :

$$(\forall)\ c \in \mathbf{R}_-, (\exists)\ n_c \geqslant 1 \text{ a.î. } x_n \leqslant c, (\forall)\ n \geqslant n_c.$$

Vom scrie atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$, $x_n \to -\infty$ etc.

Exemple

1. *Fie* $x_n = \dfrac{n^2+1}{n}$, $(n \geqslant 1)$. *Atunci* $x_n \to \infty$ $(n \to \infty)$.

Într-adevăr, fie $c \in \mathbf{R}_+$, fixat. Atunci $(\exists)\ n_0 \in \mathbf{N}$ a.î. $n_0 > c$, deci

$$x_n = n + \frac{1}{n} > c,\ (\forall)\ n \geqslant n_0 \text{ și deci } x_n \to \infty.$$

2. Fie $x_n = (-1)^n - 2n$, $n \in \mathbf{N}$. *Atunci* $x_n \to -\infty$.

Într-adevăr, fie $c \in \mathbf{R}_-$ fixat. Atunci $(\exists)\ n_0 \in \mathbf{N}$ a.î. $n_0 > -\dfrac{c-1}{2}$, deci $-2n < c-1, (\forall)\ n \geqslant n_0$ și deci $x_n = (-1)^n - 2n < c\ (\forall)\ n \geqslant n_0$, prin urmare $x_n \to -\infty$.

2.3.4. Definiție. Fie $(x_n)_{n\geqslant 1}$ un șir cu elemente din $\mathbf{R}$. Vom spune că $(x_n)_{n\geqslant 1}$ are *limită* (este convergent în $\overline{\mathbf{R}}$), dacă $(x_n)_{n\geqslant 1}$ este convergent sau are limita $+\infty$ ori $-\infty$. Dacă $(x_n)_{n\geqslant 1}$ este strict crescător (resp. strict descrescător) și are limita $x \in \overline{\mathbf{R}}$, atunci vom scrie $x_n \nearrow x$ (resp. $x_n \searrow x$).

Observație. Fie $(x_n)_{n\geqslant 1}$ un șir cu elemente din $\mathbf{R}$. Atunci $(x_n)_{n\geqslant 1}$ nu are limită $\Leftrightarrow$ $(\forall)\ x \in \overline{\mathbf{R}}$, $(\exists)\ V \in \mathcal{V}(x)$ și $(x_{n_k})_{k\geqslant 1}$ un subșir al șirului $(x_n)_{n\geqslant 1}$ a.î. $x_{n_k} \notin V$, $(\forall)\ k \geqslant 1$.

2.3.5. Propoziție. *Fie* $(x_n)_{n\geqslant 1}$ *un șir cu elemente din* $\mathbf{R}$. *Atunci*

1° $x_n \to 0 \Leftrightarrow |x_n| \to 0 \Leftrightarrow x_n^2 \to 0$;

2° *Dacă* $(x_n)_{n\geqslant 1}$ *este minorat (resp. majorat), avem :*

$$x_n \to +\infty \ (resp.\ x_n \to -\infty) \Leftrightarrow |x_n| \to +\infty.$$

Dem. Evidentă.

2.3.6. Propoziție. *Fie* $(x_n)_{n\geqslant 1}$ *un șir cu elemente din* $\mathbf{R}^*$. *Atunci*

1° $x_n \searrow 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{x_n} \nearrow +\infty$;

2° $x_n \nearrow 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{x_n} \searrow -\infty$;

3° $x_n \to 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{|x_n|} \to \infty$.

Dem. 1° Fie $x_n \searrow 0$ și $c \in \mathbf{R}_+^*$ fixat. Atunci $(\exists)$ $N \geqslant 1$ a.î. $x_n \leqslant \dfrac{1}{c}$, $(\forall)$ $n \geqslant N$, deci $\dfrac{1}{x_n} \geqslant c$, $(\forall)$, $n \geqslant N$ și deci $\dfrac{1}{x_n} \to +\infty$. Cum $(x_n)_{n\geqslant 1}$ este strict descrescător către 0, elementele sale sînt strict pozitive, deci $\left(\dfrac{1}{x_n}\right)_{n\geqslant 1}$ este strict crescător. Prin urmare $\dfrac{1}{x_n} \nearrow +\infty$ etc.

2.3.7. Propoziție. *Fie $(x_n)_{n\geqslant 1}$ un șir cu elemente din $\mathbf{R}$. Atunci $(x_n)_{n\geqslant 1}$ are limită $\Leftrightarrow$ $(\exists)$ $k \geqslant 1$ a.î. șirul $(x_{n+k})_{n\geqslant 1}$ are limită $\Leftrightarrow$ $(\forall)$ $k \geqslant 1$ șirul $(x_{n+k})_{n\geqslant 1}$ are limită. În acest cat avem $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_{n+k}$.*

Dem. Evidentă.

2.3.8. Propoziție. *Fie $(x_n)_{n\geqslant 1}$ un șir cu elemente din $\mathbf{R}$ care are limită. Atunci limita sa este unic determinată.*

Dem. Fie $x_n \to x'$, $x_n \to x''$, unde $x', x'' \in \overline{\mathbf{R}}$, $x' \neq x''$.

1° $x', x'' \in \mathbf{R}$. Atunci pentru $\varepsilon := |x - x'|$, $(\exists)$, $n'_\varepsilon \geqslant 1$ și $n''_\varepsilon \geqslant 1$ a.î.

$$|x' - x_n| < \varepsilon/2, (\forall)\ n \geqslant n'_\varepsilon;\ |x'' - x_n| < \varepsilon/2, (\forall)\ n \geqslant n''_\varepsilon,$$

deci

$$\varepsilon = |x' - x''| \leqslant |x' - x_n| + |x_n - x''| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon,\ (\forall) n \geqslant \max\{n'_\varepsilon, n''_\varepsilon\},$$

absurd.

2° $x' \in \mathbf{R}$, $x'' = \infty$. Atunci pentru $\varepsilon > 0$ arbitrar și $c > x' + \varepsilon$, $(\exists) n'_\varepsilon \geqslant 1$ și $n''_c \geqslant 1$ a.î.

$$|x' - x_n| < \varepsilon\ (\forall)\ n \geqslant n'_\varepsilon; \quad x_n > c > x' + \varepsilon\ (\forall)\ n \geqslant n''_\varepsilon, \text{ deci}$$

$$x_n < x' + \varepsilon \wedge x_n > x' + \varepsilon\ (\forall)\ n \geqslant \max\{n'_\varepsilon, n''_c\}, \text{ absurd.}$$

3° Raționament analog dacă $x \in \mathbf{R}$ și $x' = -\infty$ sau $x = +\infty$ și $x' = -\infty$. Prin urmare limita este unic determinată.

2.3.9. Propoziție. *Fie $(x_n)_{n\geqslant 1}$ un șir cu elemente din $\mathbf{R}$ care are limită. Atunci șirul $(|x_n|)_{n\geqslant 1}$ are limită și avem $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = |x|$, unde $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.*

Dem. 1° $x \in \mathbf{R}$. Fixăm $\varepsilon > 0$; atunci $(\exists)$ $n_\varepsilon \geqslant$ a.î. $|x - x_n| < \varepsilon$, $(\forall)$ $n \geqslant n_\varepsilon$. Cum avem :

$$||x| - |x_n|| < |x - x_n|,\ (\forall)\ n \geqslant 1,$$

rezultă : $||x| - |x_n|| < \varepsilon$, $(\forall)$ $n \geqslant n_\varepsilon$, prin urmare $|x_n| \to |x|$.

2° $x = +\infty$. Fie $c \in \mathbf{R}_+$ fixat. Atunci $(\exists)$ $n_c \geqslant 1$ a.î.

$$x_n \geqslant c, (\forall)\ n \geqslant n_c, \text{ deci } |x_n| \geqslant c, (\forall)\ n \geqslant n_c \text{ și deci } |x_n| \to \infty.$$

3° Dacă $x = -\infty$, raționăm ca în cazul 2°.

2.3.10. Propoziție. *Fie $(x_n)_{n\geqslant 1}$ un șir cu elemente din $\mathbf{R}$ care are limita x. Atunci $(\forall)$ $(x_{n_k})_{n\geqslant 1}$ un subșir al șirului $(x_n)_{n\geqslant 1}$, rezultă că $(x_{n_k})_{k\geqslant 1}$ are limita x.*

Dem. 1° $x \in \mathbf{R}$. Fixăm $(x_{n_k})_{k\geqslant 1}$ și $\varepsilon > 0$. Cf. ipotezei $(\exists)$ $N = N(\varepsilon) \geqslant 1$ a.î. $|x_n - x| < \varepsilon$, $(\forall)$ $n \geqslant N$. Fie k_ε cel mai mic număr natural cu proprietatea $n_{k_\varepsilon} \geqslant N$. Atunci $(\forall)$ $k \geqslant k_\varepsilon$ avem $n_k \geqslant n_{k_\varepsilon} \geqslant N$, deci $|x_{n_k} - x| < \varepsilon$. Prin urmare $x_{n_k} \to x$ $(k \to \infty)$.

2° $x = +\infty$. Fixăm subșirul și $c \in \mathbf{R}_+$. Atunci $(\exists)$ $N \geqslant 1$ a.î. $x_n \geqslant c$ $(\forall)$ $n \geqslant N$. Fie k_0 cel mai mic număr natural cu proprietatea $n_{k_0} \geqslant N$ etc.

3° Dacă $x = -\infty$ raționăm ca în cazul 2°.

Observație. Dacă un șir posedă subșiruri care au limită, nu rezultă numaidecît că șirul are limită.

2.3.11. Propoziție. *Fie $(x_n)_{n\geqslant 1}$ un șir cu elemente din* $\mathbf{R}$. *Atunci condițiile* 1°—4° *sînt echivalente:*

1° $(x_n)_{n\geqslant 1}$ *este șir Cauchy;*

2° $\lim\limits_{n,m\to\infty} |x_n - x_m| = 0$;

3° $(\forall)\ \varepsilon > 0, (\exists)\ n_\varepsilon \geqslant 1$ *a.î.* $|x_{n+p} - x_n| \leqslant \varepsilon, (\forall)\ n \geqslant n_\varepsilon \wedge p \geqslant 1$;

4° $(\forall)\ \varepsilon > 0\ (\exists)\ n_\varepsilon \geqslant 1$ *a.î.* $|x_n - x_{n_\varepsilon}| < \varepsilon, (\forall)\ n \geqslant n_\varepsilon$

Dem. $1^\circ \Leftrightarrow 2^\circ$; $1^\circ \Leftrightarrow 3^\circ$; $1^\circ \Rightarrow 4^\circ$ sînt evidente.

$4^\circ \Rightarrow 1^\circ$. Fie $\varepsilon > 0$. Cf. 4° $(\exists)\ n_\varepsilon \geqslant 1$ a.î. $|x_n - x_{n_\varepsilon}| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$ $(\forall)\ n \geqslant n_\varepsilon$

Atunci $(\forall)$ $n,\ m \geqslant n_\varepsilon$ avem:

$$|x_n - x_m| \leqslant |x_n - x_{n_\varepsilon}| + |x_m - x_{n_\varepsilon}| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Prin urmare $(x_n)_{n\geqslant 1}$ este șir Cauchy.

2.3.12. Propoziție. *Orice șir convergent de numere reale este șir Cauchy.*

Dem. Fie $(x_n)_{n\geqslant 1}$ un șir convergent cu elemente din $\mathbf{R}$ care are limita x. Fixăm $\varepsilon > 0$. Atunci $(\exists)$ $n_\varepsilon \geqslant 1$ a.î. $|x_n - x| < \varepsilon/2$, $(\forall)$ $n \geqslant n_\varepsilon$, deci

$$|x_n - x_m| \leqslant |x_n - x| + |x - x_m| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2\ (\forall)\ n, m \geqslant n_\varepsilon,$$

prin urmare $(x_n)_{n\geqslant 1}$ este șir Cauchy.

2.3.13. Propoziție. *Fie $(x_n)_{n\geqslant 1}$ un șir Cauchy de numere reale. Atunci $(x_n)_{n\geqslant 1}$ este mărginit.*

Dem. Fie $\varepsilon = 1$. Șirul $(x_n)_{n\geqslant 1}$, fiiud Cauchy $(\exists)$ $N \geqslant 1$ a.î.

$$|x_n - x_m| \leqslant 1, (\forall)\ n, m \geqslant N, \text{ deci } |x_n| \leqslant |x_n - x_N| + |x_N| \leqslant$$

$$\leqslant 1 + |x_N|\ (\forall)\ n \geqslant N$$

și deci

$$|x_n| \leqslant \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots |x_N|, 1 + |x_N|\},\ (\forall)\ n \geqslant 1,$$

prin urmare $(x_n)_{n\geqslant 1}$ este mărginit.

Corolar 1. *Orice șir convergent de numere reale este mărginit.*

2.3.14. Propoziție. *Fie $(x_n)_{n\geqslant 1}$ un șir Cauchy de numere reale care posedă un subșir convergent $(x_{n_k})_{k\geqslant 1}$. Atunci $(x_n)_{n\geqslant 1}$ este convergent și are aceeași limită cu $(x_{n_k})_{k\geqslant 1}$.*

Dem. Fie $x = \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}$. Fixăm $\varepsilon > 0$; atunci $(\exists)$ $n_\varepsilon \geqslant 1$ a.î.

$$|x_n - x_m| \leqslant \varepsilon/2, (\forall)\ n, m \geqslant n_\varepsilon \tag{1}$$

De asemenea $(\exists)$ $k_\varepsilon \geqslant 1$ cu proprietatea $n_{k_\varepsilon} \geqslant n_\varepsilon$ a.î.

$$|x - x_{n_k}| \leqslant \varepsilon/2, (\forall)\ k \geqslant k_\varepsilon \tag{2}$$

Din (1) și (2) rezultă

$$|x - x_n| \leqslant |x - x_{n_{k_\varepsilon}}| + |x_{n_{k_\varepsilon}} - x_n| \leqslant \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon, \ (\forall)\ n \geqslant n_\varepsilon,$$

prin urmare $(x_n)_{n\geqslant 1}$ este convergent și are limita x.

2.3.15. Propoziție. *Fie* $(x_n)_{n\geqslant 1}$ *și* $(y_n)_{n\geqslant 1}$ *două șiruri convergente de numere reale,* $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ *și* $y = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$. *Atunci avem :*

$1^\circ\ \lim\limits_{n\to\infty} (x_n \pm y_n) = x \pm y$; $2^\circ\ \lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = xy$;

$3^\circ\ \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{x}{y}$, *dacă* $y \neq 0$ *și* $y_n \neq 0, (\forall)\ n \geqslant 1$.

Dem. 1° Fie $\varepsilon > 0$ fixat. Atunci $(\exists)\ n_1, n_2, \in \mathbf{N}$ a.î.

$$|x_n - x| \leqslant \varepsilon/2, (\forall)\ n \geqslant n_1\ ; |y_n - y| \leqslant \varepsilon/2, (\forall)\ n \geqslant n_2,$$

deci

$$|x_n + y_n - (x + y)| \leqslant |x_n - x| + |y_n - y| \leqslant \varepsilon\ (\forall)\ n \geqslant \max\{n_1, n_2\},$$

prin urmare $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n + y_n) = x + y$.

2° Plecăm de la identitatea :

$$x_n y_n - xy = (x_n - x)(y_n - y) + x(y_n - y) + y(x_n - x)\ (n \geqslant 1),$$

deci

$$|x_n y_n - xy| \leqslant |x_n - x| \cdot |y_n - y| + |x| \cdot |y_n - y| + |y| \cdot |x_n - x|\ (n \geqslant 1) \quad (1)$$

Fie $\varepsilon > 0$ fixat. Evident $(\exists)\ \varepsilon_1 > 0,\ \varepsilon_2 > 0$ cu $\varepsilon_1 \varepsilon_2 + |x|\varepsilon_2 + |y|\varepsilon_1 < \varepsilon$. Mai departe $(\exists)\ n_1, n_2 \in \mathbf{N}$ a.î.

$$|x_n - x| \leqslant \varepsilon_1, (\forall)\ n \geqslant n_1\ ; |y_n - y| \leqslant \varepsilon_2, (\forall)\ n \geqslant n_2.$$

Din (1) și (2) deducem :

$$|x_n y_n - xy| \leqslant \varepsilon_1 \varepsilon_2 + |x| \varepsilon_2 + |y| \varepsilon_1 \leqslant \varepsilon,\ (\forall)\ n \geqslant \max\{n_1, n_2\},$$

prin urmare :

$$\lim_{n\to\infty} x_n y_n = xy$$

3° Ținînd seama de 2°, rămîne să arătăm că $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{y_n} = \dfrac{1}{y}$.

Fie deci $\varepsilon > 0$ fixat. Deoarece $y \neq 0$ și $y_n \neq 0, (\forall)\ n \geqslant 1$, există $\delta > 0$ a.î. $|y_n| \geqslant \delta, (\forall)\ n \geqslant 1$. Mai departe $(\exists)\ n_\varepsilon \geqslant 1$ a.î.

$|y_n - y| < \varepsilon\delta|y|, \ (\forall)\ n \geqslant n_\varepsilon$. Atunci avem

$$\left|\frac{1}{y_n} - \frac{1}{y}\right| = \frac{|y_n - y|}{|yy_n|} \leqslant \frac{\varepsilon\delta|y|}{|y|\delta} = \varepsilon,\ (\forall)\ n \geqslant n_\varepsilon,$$

prin urmare $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{y_n} = \dfrac{1}{y}$.

Corolar 1. *Fie* $(x_n)_{n\geqslant 1}$ *un șir convergent de numere reale și* $x \in \mathbf{R}$ *fixat. Atunci avem :*

$1^\circ\ \lim\limits_{n\to\infty} (x + x_n) = x + \lim\limits_{n\to\infty} x_n$;

2° $\lim\limits_{n\to\infty} x\, x_n = x \lim\limits_{n\to\infty} x_n$;

3° $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{x} = \frac{1}{x} \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ *dacă* $x \neq 0$;

4° $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x}{x_n} = \frac{x}{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}$, *dacă* $x \neq 0$ $(\forall)$ $n \geqslant 1$ și $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \neq 0$.

Observația 1. P. 2.3.15 are loc și pentru șiruri cu limită, dacă se fac convențiile:

(i) $x \pm \infty = \pm\infty + x = \pm\infty, (\forall)\, x \in \mathbf{R}$; $-\infty - \infty = -\infty$; $+\infty + \infty = +\infty$;

(ii) $x(+\infty) = (+\infty)\, x = +\infty$, $(\forall)\, x \in \mathbf{R}_+^*$; $x(+\infty) = (+\infty)\, x = -\infty, (\forall)\, x \in \mathbf{R}_+^*$; $x(-\infty) = (-\infty)x = -\infty$, $(\forall)\, x \in \mathbf{R}_+^*$; $x(-\infty) = (-\infty)\, x = +\infty, (\forall)\, x \in \mathbf{R}_+^*$; $(+\infty)(\pm\infty) = \pm\infty$; $(-\infty)(\pm\infty) = \mp\infty$;

(iii) $\frac{x}{\pm\infty} = 0$, $(\forall)\, x \in \mathbf{R}$; $\frac{\pm\infty}{x} = \pm\infty, (\forall)\, x \in \mathbf{R}_+$; $\frac{\pm\infty}{x} = \mp\infty, (\forall) x \in \mathbf{R}_-$.

Observația 2. Expresiile $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, 1^∞, $\infty - \infty$, $0.\infty$, ∞° și 0° *sînt nedeterminări*. Aceasta înseamnă, spre exemplu în cazul $\frac{0}{0}$, că $(\exists)$ $(x_n)_{n\geqslant 1}$ și $(y_n)_{n\geqslant 1}$, șiruri cu elemente din $\mathbf{R}$ care au limita 0 a.î. șirul $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)_{n\geqslant 1}$ fie că nu are limită, fie că limita sa poate fi orice element $x \in \mathbf{R}$, de la caz la caz.

2.3.16. Propoziție. *Fie* $(x_n)_{n\geqslant 1}$, *un șir de numere reale care are limită. Dacă* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n < \alpha$ (*resp.* $> \alpha$), *atunci* $(\exists)$ $N \geqslant 1$ *a.î.* $x_n < \alpha$ (*resp.* $x > \alpha$) $(\forall)$ $n \geqslant N$.

Dem. Fie $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Dacă $x \in \mathbf{R}$, fie $\varepsilon > 0$ cu $x + \varepsilon < \alpha$. Atunci $(\exists)$ $n_\varepsilon \geqslant 1$ a.î. $|x_n - x| < \varepsilon$ $(\forall)$ $n \geqslant n_\varepsilon$, deci $x_n < x + \varepsilon < \alpha, (\forall)$, $n \geqslant n_\varepsilon$. Dacă $x = -\infty$, fie $c \in \mathbf{R}$, $c < \alpha$ fixat. Atunci $(\exists)$ $n_c \geqslant 1$ a.î. $x_n < c$ $(\forall)$ $n \geqslant n_c$ etc.

Corolar 1. *Fie* $(x_n)_{n\geqslant 1}$ *un șir de numere reale care are limită. Dacă* $\alpha < \lim\limits_{n\leftarrow\infty} x_n < \beta$, *atunci* $(\exists)$ $N \geqslant 1$ *a.î.* $\alpha < x_n < \beta$, $(\forall)$ $n \geqslant N$.

2.3.17. Propoziție. *Fie* $(x_n)_{n\geqslant 1}$ *și* $(y_n)_{n\geqslant 1}$ *două șiruri de numere reale cu proprietatea că* $x_n < y_n$, $(\forall)$ $n \geqslant n_0$. *Atunci*:

1° *Dacă* $(\exists)$ $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ $(\exists)$ $y = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, *rezultă* $x \leqslant y$;

2° *Dacă* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, *rezultă* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$;

3° *Dacă* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = -\infty$, *rezultă* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$.

Dem. 1° Presupunem că $x > y$ și fie $x > c > y$ fixat. Atunci $(\exists)$ n_1, $n_2 \in \mathbf{N}$ a.î.

$$y_n < c\ (\forall)\ n \geqslant n_1;\ x_n > c\ (\forall)\ n \geqslant n_2,$$

deci $y_n < c < x_n$, $(\forall)$ $n \geqslant \max\{n_1, n_2\}$, absurd. Rămîne că $x \leqslant y$.

2° Fie $c \in \mathbf{R}_+$, fixat. Atunci $(\exists)$ $n_0 \geqslant 1$ a.î. $x_n \geqslant c$ $(\forall)$ $n \geqslant n_0$, deci $y_n \geqslant c$, $(\forall)$ $n \geqslant n_0$ și deci $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$.

3° Analog cu 2°.

Corolar 1. *Fie* $(x_n)_{n\geqslant 1}$ *un șir de numere reale care are limită și* $y \in \mathbf{R}$ *a.î.* $x_n \leqslant y$ (*resp.* $|x_n| \leqslant y$), $(\forall)$ $n \geqslant n_0$. *Atunci* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \leqslant y$ (*resp.* $|\lim\limits_{n\to\infty} x_n| \leqslant y$).

Corolar 2. *Fie* $(x_n)_{n\geq 1}$ *și* $(y_n)_{n\geq 1}$ *două șiruri de numere reale care au limită a.î.* $|x_n| \leq |y_n|$, $(\forall)\ n \geq n_0$. *Atunci* $|\lim\limits_{n\to\infty} x_n| \leq |\lim\limits_{n\to\infty} x_n|$.

Dem. Din P. 2.3.9. și P. 2.3.17. deducem :

$$|\lim_{n\to\infty} x_n| = \lim_{n\to\infty} |x_n| \leq \lim_{n\to\infty} |y_n| = |\lim_{n\to\infty} y_n|.$$

2.3.18. Propoziție. *Fie* $(x_n)_{n\geq 1}$, $(y_n)_{n\geq 1}$, $(z_n)_{n\geq 1}$ *trei șiruri cu elemente din* $\mathbf{R}$ *a.î.* $x_n \leq y_n \leq z_n$, $(\forall)\ n \geq n_0$. *Dacă* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = x$, *atunci* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$ *există și este egală cu* x.

Dem. 1° $x \in \mathbf{R}$. Evident $(\forall)\ n \geq 1$ avem :

$$|x - y_n| \leq |x - x_n| + |x_n - y_n| \leq |x - x_n| + |x_n - z_n| \leq$$

$$\leq |x - x_n| + |x_n - x| + |x - z_n| = 2|x - x_n| + |x - z_n|.$$

Fie $\varepsilon > 0$ fixat. Atunci $(\exists)\ n_1 \geq 1$, $(\exists)\ n_2 \geq$ a.î.

$$|x - x_n| \leq \varepsilon/3,\ (\forall)\ n \geq n_1\ ;\ |x - z_n| \leq \varepsilon/3,\ (\forall)\ n \geq n_2,$$

deci $|x - y_n| \leq 2 \cdot \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon$, $(\forall)\ n \geq \max\{n_1, n_2\}$ și deci $y_n \to x$.

2° Dacă $x = +\infty$ sau $x = -\infty$, aplicăm P. 2.3.17.

Corolar 1. *Fie* $(x_n)_{n\geq 1}$ *și* $(y_n)_{n\geq 1}$ *două șiruri de numere reale a.î.*

$$|x_n| \leq |y_n|\ (\forall)\ n \geq n_0.\ \textit{Dacă}\ \lim_{n\to\infty} y_n = 0,\ \textit{atunci}\ \lim_{n\to\infty} x_n = 0.$$

Dem. $\lim\limits_{n\to\infty} |y_n| = |\lim\limits_{n\to\infty} y_n| = 0$, deci (P. 2.3.18) $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = 0$ etc.

Corolar 2. *Fie* $(x_n)_{n\geq 1}$ *și* $(y_n)_{n\geq 1}$ *două șiruri de numere reale. Dacă* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ *și* $(y_n)_{n\geq 1}$ *este mărginit, atunci* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = 0$.

Dem. Șirul $(y_n)_{n\geq 1}$ fiind mărginit, $(\exists)\ M > 0$ a.î. $|y_n| \leq M$, $(\forall)\ n \geq 1$, deci $|x_n y_n| \leq M|x_n|$, $(\forall)\ n \geq 1$. Aplicăm mai departe Cor 1.

2.3.19. Lemă. *Fie* $(x_n)_{n\geq 1}$, *un șir cu elemente din* $\mathbf{R}$ *care are limita* $x_0 \in \mathbf{R}$. *Dacă* $x_n \leq x_0$, $(\forall)\ n \geq 1$ (*resp.* $x_n \geq x_0$, $(\forall)\ n \geq 1$), *atunci* $(\exists)\ n_0 \geq 1$ *a.î.* $x_{n_0} = \min\limits_{n\geq 1} x_n$ (resp. $x_{n_0} = \max\limits_{n\geq 1} x_n$).

Dem. Dacă $x_n = x_0$, $(\forall)\ n \geq 1$, afirmația este evidentă. Presupunem că $(\exists)\ N > 1$ cu $x_N < x_0$. Atunci $\min\limits_{n\geq 1} x_n = \min\limits_{1\leq n\leq N} x_n = x_{n_0}$ cu $n_0 \in \overline{1, N}$.

2.3.20. Propoziție. *Fie* $(x_n)_{n\geq 1}$ *un șir cu elemente din* $\mathbf{R}$ *care are limita* $x_0 \in \mathbf{R}$. *Atunci* $(x_n)_{n\geq 1}$ *posedă cel puțin un subșir monoton (resp. strict monoton, dacă o infinitate de termeni ai șirului* $(x_n)_{n\geq 1}$ *sînt diferiți între ei), care are limita* x_0.

Dem. (i) $x_n \leq x_0$ $(\forall)\ n \geq 1$. Aplicăm Lema : fie $n_1 \geq 1$ cu $x_{n_1} = \min\limits_{n\geq 1} x_n$; fie $n_2 > n_1$ cu $x_{n_2} = \min\limits_{n > n_1} x_n$. Inductiv construim șirul

$$n_1 < n_2 < \ldots \text{ a.î. } x_{n_{k+1}} = \min_{n > n_k} x_n\ (\forall)\ k \geq 1.$$

Evident $(x_{n_k})_{k\geq 1}$ este un subșir monoton crescător al șirului $(x_n)_{k\geq n}$. Din P. 2.3.10 rezultă că $x_{n_k} \to x_0$.

(ii) $x_n \geq x_0$, $(\forall)\ n \geq 1$. Atunci $-x_n \leq -x_0$, $(\forall)\ n \geq 1$, deci cf. (i) $(\exists)$ $(-x_{n_k})_{k\geq 1}$ monoton crescător și deci $(x_{n_k})_{n\geq 1}$ este monoton descrescător.

(iii) $(x_n)_{n\geqslant 1}$ este arbitrar. Construim mai întîi un subșir $(x_{n_j})_{j\geqslant 1}$ care este majorat sau minorat de x_0 și aplicăm apoi (i) respectiv (ii).

Corolar 1. *Fie $(x_n)_{n\geqslant 1}$ un șir cu elemente din $\mathbf{R}$ care are limita $x_0 \in \overline{\mathbf{R}}$. Dacă $(x_n)_{n\geqslant 1}$ posedă un subșir ale cărui elemente sînt diferite de x_0, atunci el posedă un subșir strict monoton (care are limita x_0).*

Corolar 2. *Fie $(x_n)_{n\geqslant 1}$ un șir cu elemente din $\mathbf{R}$ care are limita $x_0 \in \overline{\mathbf{R}}$. Dacă $(x_n)_{n\geqslant 1}$ are o infinitate de termeni diferiți între ei, atunci el posedă un subșir strict monoton (care are limita x_0).*

2.3.21. Teoremă fundamentală. *Mulțimea $\mathbf{R}$ a numerelor reale are următoarele proprietăți:*

1° $(\forall)$ A, $B \subseteq \mathbf{R}$ *nevide cu* $a \leqslant b$, $(\forall)$ $(a, b) \in A \times B$, *există* $c \in \mathbf{R}$ *a.î.* $a \leqslant c \leqslant b$, $(\forall)$ $(a, b) \in A \times B$ *(propr. lui Dedekind);*

2° *Orice șir monoton crescător majorat (resp. monoton descrescător minorat) $(x_n)_{n\geqslant 1}$ cu elemente din $\mathbf{R}$, este convergent și are limita egală cu* $\sup\limits_{n\geqslant 1} x_n$ *(resp.* $\inf\limits_{n\geqslant 1} x_n$*) (propr. lui Weierstrass);*

3° *Fie $(a_n)_{n\geqslant 1}$ și $(b_n)_{n\geqslant 1}$ două șiruri cu elemente din $\mathbf{R}$ care au proprietățile:*
(i) $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n \leqslant \ldots$; $b_1 \geqslant b_2 \geqslant \ldots \geqslant b_n \geqslant \ldots$;
(ii) $a_n \leqslant b_n$, $(\forall)$ $n \geqslant 1$; (iii) $b_n - a_n \to 0$ $(n \to \infty)$.
Atunci $(a_n)_{n\geqslant 1}$ și $(b_n)_{n\geqslant 1}$ sînt convergente și au limitele egale (propr. „cleștelui");

4° $(\forall)$ $(I_n)_{n\geqslant 1}$ *un șir monoton descrescător de intervale închise și mărginite din $\mathbf{R}$, cu $|I_n| \to 0$ $(n \to \infty)$, rezultă că* $\bigcap\limits_{n\geqslant 1} I_n$ *conține un punct și numai unul (propr. Cantor);*

5° *Orice șir mărginit cu elemente din $\mathbf{R}$ posedă un subșir convergent (propr. Cesaro);*

6° *Orice șir fundamental cu elemente din $\mathbf{R}$ este convergent (propr. Cauchy).*

Dem. 1° Fie A, $B \subseteq \mathbf{R}$ fixat. Cf. ipotezei A este majorată de $b \in B$, deci $\alpha = \sup A$ există și din definiția marginii superioare avem $\alpha \leqslant b$. Cum $b \in B$ a fost arbitrar, rezultă că B este minorată de α, deci (P. 2.2.1) $\beta = \inf B$ există și din definiția marginii inferioare avem $\beta \geqslant \alpha$. Fie $\alpha \leqslant c \leqslant \beta$ fixat. Evident avem:

$$a \leqslant \alpha \leqslant c \leqslant \beta \leqslant b, (\forall)\ (a, b) \in A \times B.$$

2° Fie $(x_n)_{n\geqslant 1}$ monoton crescător majorat. Atunci $\sup\limits_{n\geqslant 1} x_n$ există și este finit; să-l notăm cu x. Fixăm $\varepsilon > 0$. Din P. 2.2.6. Cor. 1 rezultă că $(\exists)$ $n_\varepsilon \geqslant 1$ cu $x_{n_\varepsilon} > x - \varepsilon$, deci

$$x - \varepsilon \leqslant x_{n_\varepsilon} \leqslant x_n \leqslant x < x + \varepsilon, (\forall)\ n \geqslant n_\varepsilon$$

și deci

$$|x - x_n| < \varepsilon,\ (\forall)\ n \geqslant n_\varepsilon \Leftrightarrow x_n \to x (n \to \infty).$$

3° Fie $(a_n)_{n\geqslant 1}$ și $(b_n)_{n\geqslant 1}$ două șiruri cu proprietățile din enunț. Fixăm $m > n \geqslant 1$. Evident avem $a_n \leqslant a_m \leqslant b_m \leqslant b_n$, deci $a_n \leqslant b_m$, $(\forall)$ n, $m \geqslant 1$. Așadar, $(\forall)$ $m \geqslant 1$ șirul $(a_n)_{n\geqslant 1}$ este majorat de b_m, deci cf. 2°, $(\exists)$ $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ și este egală cu $\sup\limits_{n\geqslant 1} a_n$; evident $a \leqslant b_m$. Am obținut că șirul $(b_n)_{n\geqslant 1}$ este minorat de a, deci cf. 2°, $(\exists)$ $b = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ și este egală cu $\inf\limits_{n\geqslant 1} b_n$; evident $a \leqslant b$. Din relația

$a_n \leqslant a \leqslant b \leqslant b_n$, $(\forall)$ $n \geqslant 1$, rezultă că :

$$0 \leqslant b - a \leqslant b_n - a_n \to 0 \ (n \to \infty),$$

deci (P. 2.3.18.) $b - a = 0$ și deci $a = b$.

4° Fie $a_n\, b_n$ capetele lui I_n, deci $I_n = [a_n, b_n]$. Evident șirurile $(a_n)_{n\geqslant 1}$ și $(b_n)_{n\geqslant 1}$ au proprietățile din 3°, deci $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ și $b = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ există și sînt egale. Din 2° rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sup\limits_{n\geqslant 1} a_n$ și $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \inf\limits_{n\geqslant 1} b_n$, deci $a_n \leqslant a = b \leqslant b_n$, $(\forall)$ $n \geqslant 1$ și deci $\bigcap\limits_{n\geqslant 1} I_n \ni a$. Dacă $a' \in \bigcap\limits_{n\geqslant 1} I_n$, rezultă că $a_n \leqslant a' \leqslant b_n$, $(\forall)$ $n \geqslant 1$, deci (P.2.3.18.) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a'$ și deci în virtutea unicității limitei, avem $a = a'$, prin urmare $\bigcap\limits_{n\geqslant 1} I_n$ conține exact un punct.

5° Fie $(x_n)_{n\geqslant 1}$ un șir mărginit cu elemente din $\mathbf{R}$. Atunci există un interval $I_1 = [a, b] \subseteq \mathbf{R}$ a.î. $x_n \in I_1$, $(\forall)$ $n \geqslant 1$. Fie $c = \dfrac{a+b}{2}$ mijlocul lui I_1 și $I_1' = [a, c]$, $I_1'' = [c, b]$. Cel puțin unul din intervalele I_1' sau I_1'' conține o infinitate de termeni ai șirului $(x_n)_{n\geqslant 1}$; să-l notăm cu I_2. Împărțim mai departe intervalul I_2 în două părți egale și observăm că cel puțin una din aceste părți să o notăm cu I_3, conține o infinitate de termeni din $(x_n)_{n\geqslant 1}$.

În acest mod construim prin inducție un șir descendent de intervale închise $(I_k)_{k\geqslant 1}$ cu proprietatea că fiecare I_k are lungimea $\dfrac{1}{2}\,|I_{k-1}|$ și el conține o infinitate de termeni ai șirului $(x_n)_{n\geqslant 1}$. Atunci $(\exists)$ $x_{n_1} \in I_1$; $(\exists)$ $x_{n_2} \in I_2$ cu $n_2 > n_1$; ... ; $(\exists)$ $x_{n_k} \in I_k$ cu $n_k > n_{k-1}$; ...

Evident $|I_k| = \dfrac{1}{2^k}\,|I_1| \to 0$ $(k \to \infty)$, deci cf. 3° $(\exists\,!)$ $x \in \bigcap\limits_{k\geqslant 1} I_k$ și avem $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = \lim\limits_{k\to\infty} b_k$, unde $a_k\, b_k$, sînt capetele lui I_k $(k \geqslant 1)$ i.e. $I_k = [a_k, b_k]$. Cum avem : $a_k \leqslant x_{n_k} \leqslant b_k$, $(\forall)$ $k \geqslant 1$, deducem (P. 2.3.18) $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = x$.

6° Fie $(x_n)_{n\geqslant 1}$ un șir Cauchy cu elemente din $\mathbf{R}$. Atunci (P. 2.3.12) $(x_n)_{n\geqslant 1}$ este mărginit, deci cf. 5° posedă un subșir convergent $(x_{n_k})_{k\geqslant 1}$ și deci (P. 2.3.14) $(x_n)_{n\geqslant 1}$ este convergent.

Corolar 1. *Fie* A, $B \subseteq \mathbf{R}$ *două mulțimi cu proprietatea* $a \leqslant b$, $(\forall)$ $(a, b) \in A \times B$. *Atunci* $\sup A \leqslant \inf B$.

Dem. Cf. T. 2.3.21. (1°) $(\exists)$ $c \in \mathbf{R}$ a.î. $a \leqslant c \leqslant b$, $(\forall)$ $(a, b) \in A \times B$, deci $\sup A \leqslant c \leqslant \inf B$.

Corolar 2. *Fie* $(x_n)_{n\geqslant 1}$ *un șir monoton cu elemente din* $\mathbf{R}$. *Atunci* $(x_n)_{n\geqslant 1}$ *este convergent* $\Leftrightarrow$ $(x_n)_{n\geqslant 1}$ *este mărginit. În acest caz avem :* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sup\limits_{n\geqslant 1} x_n$ (*resp.* $\inf x_n$), *dacă* $(x_n)_{n\geqslant 1}$ *este monoton crescător* (*resp. descrescător*).

Dem. Dacă $(x_n)_{n\geqslant 1}$ este convergent, el este mărginit (P. 2.3.13.), iar dacă este mărginit, este convergent cf. T. 2.3.21. (2°).

Corolar 3. *Fie* $(x_n)_{n\geqslant 1}$ *un șir cu elemente din* $\mathbf{R}$. *Atunci* $(x_n)_{n\geqslant 1}$ *este convergent* $\Leftrightarrow$ $(x_n)_{n\geqslant 1}$ *este fundamental.*

Dem. Aplicăm P. 2.3.13. Cor. 1 și T. 2.3.21.(6°).

Corolar 4. *Orice șir cu elemente din* $\mathbf{R}$ *posedă cel puțin un subșir care are limită.*

Dem. Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ un șir cu elemente din $\mathbf{R}$. Dacă $(x_n)_{n\geq 1}$ este mărginit, aplicăm T. 2.3.21. (5°). Dacă $(x_n)_{n\geq 1}$ nu este majorat, construim prin inducție un șir strict crescător $(n_k)_{k\geq 1}$ de numere naturale a.î. $x_{n_k} \geq k$, $(\forall)\ k \geq 1$; atunci $x_{n_k} \to +\infty$ etc.

2.3.22. Propoziție. *Fie $A \subseteq \mathbf{R}$ o mulțime. Atunci avem:*

$$1^\circ\ b = \sup A \Leftrightarrow \begin{cases} \text{(i)}\ x \leq b\ (\forall)\ x \in A; \\ \text{(ii)}\ (\exists)\ x_n \in A,\ x_n \to b \end{cases}$$

$$2^\circ\ a = \inf A \Leftrightarrow \begin{cases} \text{(i)}\ a \leq x,\ (\forall)\ x \in A; \\ \text{(ii)}\ (\exists)\ x_n \in A\ x_n \to a \end{cases}$$

Dem. 1° ($\Rightarrow$) Condiția (i) rezultă din P. 2.2.6. (1°).

Pentru a arăta (ii) fie $c_n < b$, $c_n \to b$. (Dacă $b < +\infty$, luăm $c_n := b - \frac{1}{n}$, iar dacă $b = +\infty$, luăm $c_n = n$). Din P. 2.3.6. (1°) rezultă că $(\forall)$ $n \geq 1$, $(\exists)\ x_n \in A$, $x_n > c_n$. Așadar $c_n < x_n \leq b\ (\forall)\ n \geq 1$ și $c_n \to b$, deci (P.2.3.18) $x_n \to b$.

($\Leftarrow$) Fie $c < b$ fixat. Cf. ipotezei $(\exists)\ x_n \in A$, $x_n \to b$, deci $(\exists)\ n_0 \geq 1$ a.î. $x_n > c$, $(\forall)\ n \geq n_0$ și deci (P. 2.2.6.) $b = \sup A$.

2° se arată la fel cu 1°.

Corolar 1. *Fie $A \subseteq \mathbf{R}$ o mulțime. Dacă $\alpha = \sup A$ (resp. $\inf A$), atunci $(\exists)$ $(x_n)_{n\geq 1}$ un șir cu elemente din A a.î. $x_n \to \alpha$.*

2.3.23. Propoziție. *Fie $I \subseteq \mathbf{R}$ un interval nedegenerat. Atunci I este o mulțime nenumerabilă. În particular $[0,1]$ și $\mathbf{R}$ sînt nenumerabile.*

Dem. Presupunem I numerabilă și fie $\{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$ o enumerare a lui I. Evident $(\exists)\ a, b \in I$, $a < b$, cu $I_1 := [a, b] \not\ni x_1$. Împărțim intervalul I_1 în trei intervale închise egale. Cel puțin unul din aceste intervale, să-l notăm cu I_2, nu conține punctul x_2. Continuînd, construim prin inducție un șir descendent $(I_n)_{n\geq 1}$ de intervale închise cu proprietățile: $1^\circ\ |I_n| = \frac{1}{3}\,|I_{n-1}|$, $(\forall)\ n > 1$; $2^\circ\ I_n \not\ni x_n\ (\forall)\ n \geq 1$. Evident $|I_n| = \frac{1}{3^{n-1}}\,|I_1| \to 0\ (n \to \infty)$, deci (T. 2.3.21. (4°) $(\exists)\ x \in \bigcap_{n\geq 1} I_n$. Cum $x_n \notin I_n$ și $x \in I_n$, avem $x \neq x_n$, $(\forall)\ n \geq 1$, deci $x \notin \{x_1, x_2, x_3 \ldots\} = I$, absurd, deoarece $x \in I_1 \subseteq I$. Rămîne că I este nenumărabilă.

Corolar 1. *Mulțimea $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ este nenumerabilă.*

Dem. Dacă $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ este numerabilă, cum $\mathbf{Q}$ este numerabilă (P. 1.4.13 Cor. 2), rezultă că $\mathbf{R} = \mathbf{Q} \cup (\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q})$ este numerabilă, absurd.

Corolar 2. *Fie $I \subseteq \mathbf{R}$ un interval nedegenerat. Atunci I conține atît numere raționale cît și numere iraționale i.e. $I \cap \mathbf{Q} \neq \emptyset$ și $I \cap (\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}) \neq \emptyset$.*

Dem. I fiind nenumerabil și $\mathbf{Q}$ numerabilă, rezultă că $I \setminus \mathbf{Q} \neq \emptyset$, deci $I \cap (\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}) \neq \emptyset$. Afirmația $I \cap \mathbf{Q} \neq \emptyset$ rezultă din P. 2.1.20.

2.3.24. Definiție. Se numește *matrice infinită* (șir dublu) de numere reale o funcție $f : \mathbf{N} \times \mathbf{N} \to \mathbf{R}$ și se notează prin $(a_{nk})_{n,k\geq 1}$ sau $(a_{nk})_{(n,k)\in\mathbf{N}^2}$, unde $a_{nk} = f(n, k)$. O matrice infinită $A = (a_{nk})_{n,k\geq 1}$ se numește *triunghiulară*, dacă $a_{nk} = 0$, $(\forall)\ (n, k) \in \mathbf{N}^2$, $k > n$, deci este de forma:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix},$$

elementele de deasupra diagonalei principale fiind toate nule; ea se notează uneori prin $(a_{nk})_{n\geqslant 1,\ k=\overline{1,n}}$.

Fie $(x_n)_{n\geqslant 1}$ un șir numeric arbitrar. Înmulțind formal matricea A cu matricea coloană $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \\ \vdots \end{pmatrix}$ obținem o matrice-coloană, deci un șir $(\tilde{x}_n)_{n\geqslant 1}$, unde $\tilde{x}_n := \sum_{k=1}^{n} a_{nk}\, x_k$. În cazul cînd $(x_n)_{n\geqslant 1}$ este convergent, se pune problema dacă și $(\tilde{x}_n)_{n\geqslant 1}$ este convergent și $\lim\limits_{n\to\infty} \tilde{x}_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

2.3.25. Teoremă (T o e p l i t z). *Fie $(a_{nk})_{n,k\geqslant 1}$ o matrice triunghiulară infinită de numere nenegative cu proprietățile*: (L) $\sum_{k=1}^{n} a_{nk}=1$, (∀) $n\geqslant 1$; (C) $\lim\limits_{n\to\infty} a_{nk}=0$, (∀) $k\geqslant 1$. *Atunci* (∀) $(x_n)_{n\geqslant 1}$ *un șir de numere reale care are limită, rezultă că șirul* $(\tilde{x}_n)_{n\geqslant 1}$, *unde* $\tilde{x}_n = \sum_{k=1}^{n} a_{nk}\, x_k$, *are limită și avem* $\lim\limits_{n\to\infty} \tilde{x}_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Dem. (I) $x_n \to 0$, Fixăm $\varepsilon > 0$; atunci (∃) $N \geqslant 1$ a.î. $|x_n| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$, (∀) $n \geqslant N$. Dacă $n > N$ putem scrie:

$$\tilde{x}_n = (a_{n1}\, x_1 + \ldots + a_{nN}x_N(+ (a_{n,N+1}x_{N+1} + \ldots + a_{nn}x_n) \tag{1}$$

Deoarece

$$\lim_{n\to\infty} (a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nN}x_N) = \sum_{k=1}^{N} x_k \lim_{n\to\infty} a_{nk} = 0, \tag{2}$$

$$(\exists)\ n_\varepsilon \geqslant N \text{ a.î. } |a_{n1}\, x_1 + \ldots + a_{nN}x_N| \leqslant \frac{\varepsilon}{2},\ (\forall)\ n \geqslant n_\varepsilon$$

Atunci (∀) $n \geqslant n_\varepsilon$ avem:

$$|\tilde{x}_n| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{k=N+1}^{n} a_{nk}|x_k| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}\sum_{k=1}^{n} a_{nk} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Așadar $\tilde{x}_n \to 0$ $(n \to \infty)$.

(II) $x_n \to x \neq 0$. Atunci $x_n - x \to 0$, deci

$$\tilde{x}_n - x = \sum_{k=1}^{n} a_{nk}x_k - x\sum_{k=1}^{n} a_{nk} = \sum_{l=1}^{n} a_{nk}(x_k - x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ (cf. (I))}$$

și deci $\tilde{x}_n \to x$ $(n \to \infty)$.

(III) $x_n \to +\infty$ (Cazul $(x_n \to -\infty$ se tratează la fel).

Fie $c \in \mathbf{R}_+$ fixat. Atunci (∃) $N \geqslant 1$ cu $x_n \geqslant 3c$, (∀) $n \geqslant N$ (3)

Din (2) rezultă că (∃) $N_1 \geqslant N$ cu

$$|a_{n1}\, x_1 + \ldots + a_{nN}x_N| \geqslant c,\ (\forall)\ n \geqslant N_1 \tag{4}$$

În fine, din condiția (c) rezultă că $(\exists)\ N_2 \geqslant N_1$ a.î.

$$a_{n1} + a_{n2} + \ldots + a_{nN} \leqslant \frac{1}{3}, \quad (\forall)\ n \geqslant N_2 \tag{5}$$

Atunci plecînd de la expresia lui $\tilde{x}_n$ dată de (1) și ținînd seama de (3), (4), (5), rezultă :

$$\tilde{x}_n \geqslant -c + 3c \sum_{k=N+1}^{n} a_{nk} = -c + 3c\left(1 - \sum_{k=1}^{N} a_{nk}\right) \geqslant$$

$$\geqslant -c + 3c\left(1 - \frac{1}{3}\right) = c, (\forall)\ n \geqslant N_2.$$

Prin urmare $\lim\limits_{n\to\infty} \tilde{x}_n = +\infty$

Corolar 1. *Fie* $(x_n)_{n\geqslant 1}$ *un șir de numere reale care are limită. Atunci* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_1 + \ldots + x_n}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Dem. Aplicăm T. 2.3.25 considerînd matricea triunghiulară

$$\begin{vmatrix} 1 & & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & 0 \\ \ldots & & & \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \ldots & \frac{1}{n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix}$$

Corolar 2. *Fie* $(x_n)_{n\geqslant 1}$ *un șir de numere pozitive care are limită. Atunci* $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{x_k}\right)^{-1} = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$

Dem. Aplicăm Cor. 1 pentru șirul $\left(\dfrac{1}{x_n}\right)_{n\geqslant 1}$.

Corolar 3. *Fie* $(x_n)_{n\geqslant 1}$ *un șir de numere pozitive care are limită. Atunci* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n} = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$

Dem. Trecem la limită în inegalitatea (P. 2. 1.31.) :

$$n\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}\right)^{-1} \leqslant \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n} \leqslant \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k, (n \geqslant 1),$$

ținînd cont de Cor. 1 și Cor. 2.

Corolar 4. *Fie* $(x_n)_{n\geqslant 1}$ *un șir de numere pozitive. Dacă șirul* $\left(\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right)_{n\geqslant 1}$ *are limită, atunci* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n}$

Dem. Fie $y_1 := x_1$, $y_n := \dfrac{x_n}{x_{n-1}}$ $(n \geqslant 2)$. Atunci $x_n = y_1 y_2 \ldots y_n (\forall)\ n \geqslant 1$, deci (Cor. 2) avem:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{y_1 y_2 \ldots y_n} = \lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}.$$

Corolar 5. *Fie $(a_n)_{n\geqslant 1}$ un șir de numere reale care are limită și $(b_n)_{n\geqslant 1}$ un șir de numere pozitive cu $\sum_{i=1}^{n} b_i \to +\infty$ $(n \to \infty)$. Atunci*

$$\lim_{n\geqslant 1} \frac{a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n}{b_1 + \ldots + b_n} = \lim_{n\to\infty} a_n.$$

Dem. Aplicăm T 2.3.25. ținînd seama de relația:

$$\begin{bmatrix} \dfrac{b_1}{b_1} & & 0 \\ \dfrac{b_1}{b_1+b_2} & \dfrac{b_2}{b_1+b_2} & \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \\ \dfrac{b_1}{b_1+\ldots b_n} & \ldots & \dfrac{b_n}{b_1+\ldots b_n} \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{a_1 b_1}{b_1} \\ \dfrac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{b_2} \\ \vdots \\ \dfrac{a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n}{b_n} \\ \vdots \end{bmatrix}$$

Corolar 6. *Fie $(a_n)_{n\geqslant 1}$ și $(b_n)_{n\geqslant 1}$ două șiruri de numere reale cu proprietățile:* 1° $b_n > 0$, $(\forall)\ n \geqslant 1$ *și* $\sum_{i=1}^{n} b_i \to \infty$ $(n \to \infty)$; 2° $\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right)_{n\geqslant 1}$ *are limită. Atunci*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + \ldots + a_n}{b_1 + \ldots + b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}.$$

Dem. Aplicăm Cor. 5 pentru șirurile $(b_n)_{n\geqslant 1}$ și $\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right)_{n\geqslant 1}$.

Observația 1. Condiția (L) din T. 2.3.25. semnifică faptul că suma elementelor de pe fiecare *linie* a matricii date este 1, în timp ce condiția (C) semnifică faptul că șirul elementelor de pe fiecare *coloană* este convergent la 0.

Observația 2. Corolarele 1—3 afirmă: *dacă un șir numeric este convergent, atunci șirul mediilor aritmetice, armonice, respectiv geometrice, este convergent și are aceeași limită cu șirul inițial.*

Reciprocele Cor. 1—3 nu sînt numaidecît adevărate.

Contraexemplu: Fie $(x_n)_{n\geqslant 1}$ un șir definit astfel: $x_{2n} = 2$, $x_{2n-1} = \dfrac{1}{2}$, $(\forall)\ n \geqslant 1$. Notînd cu A, H, G limitele aritmetică, armonică și geometrică respectiv, avem $A = \lim_{n\to\infty} x_n = \dfrac{5}{4}$, $H = \lim_{n\to\infty} x_n = \dfrac{4}{5}$, $G = \lim_{n\to\infty} x_n = 1$, în timp ce $\lim_{n\to\infty} x_n$ nu există.

Observația 3. Condiția (L) din T. 2.3.25. poate fi înlocuită prin condiția (L') $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_{nk} = 1$.

Observația 4. În cadrul teoremei 2.3.25 avem: *dacă șirul* $(x_n)_{n\geqslant 1}$ *este mărginit, atunci șirul* $(\tilde{x}_n)_{n\geqslant 1}$ *este mărginit și* $\sup\limits_{n\geqslant 1}|\tilde{x}_n| \leqslant \sup\limits_{n\geqslant 1}|x_n|$

Într-adevăr, $(\forall)\ n \geqslant 1$ avem:

$$|\tilde{x}_n| \leqslant \sum_{k=1}^{n} a_{nk}|x_k| \leqslant \max_{k=\overline{1,n}}|x_k| \cdot \sum_{k=1}^{n} a_{nk} \leqslant \sup_{k\geqslant 1}|x_k|,$$

deci $\sup\limits_{n\geqslant 1}|\tilde{x}_n| \leqslant \sup\limits_{k\geqslant 1}|x_k|$.

2.3.26. Teoremă (Stolz—Cesaro). *Fie* $(a_n)_{n\geqslant 1}$ *și* $(b_n)_{n\geqslant 1}$, *două șiruri de numere reale cu proprietățile:* $1^\circ\ 0 < b_n \nearrow +\infty$; $2^\circ\ \dfrac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} \xrightarrow[n\to\infty]{} l \in \overline{\mathbf{R}}$.

Atunci $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}$ *există și este egală cu* l.

Dem. Fie $\Delta a_n := a_n - a_{n-1}$, $\Delta b_n := b_n - b_{n-1}$ $(\forall)\ n \geqslant 1$, unde $a_0 = b_0 = 0$. Evident avem relația:

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\Delta b_1}{b_1} & 0 & & \\ \dfrac{\Delta b_1}{\Delta b_2} & \dfrac{\Delta b_2}{\Delta b_2} & & \\ \cdots\cdots & & & \\ \dfrac{\Delta b_1}{b_n} & \dfrac{\Delta b_2}{b_n} & \cdots & \dfrac{\Delta b_n}{b_n} \\ \cdots\cdots & & & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dfrac{\Delta a_1}{\Delta b_1} \\ \dfrac{\Delta a_2}{\Delta b_2} \\ \vdots \\ \dfrac{\Delta a_n}{\Delta b_n} \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{a_1}{b_1} \\ \dfrac{a_2}{b_2} \\ \vdots \\ \dfrac{a_n}{b_n} \\ \vdots \end{bmatrix}, \tag{1}$$

deoarece

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta b_i}{b_n} \cdot \frac{\Delta a_i}{\Delta b_i} = \frac{1}{b_n}\sum_{i=1}^{n} \Delta b_i = \frac{a_n}{b_n},\ (\forall)\ n \geqslant 1.$$

Observăm mai departe că matricea triunghiulară infinită considerată în relația (1) satisface condițiile (C) și (L) din T. 2.3.25. Într-adevăr avem:

$$(\forall)\ k \geqslant 1,\ \lim_{k\leqslant n\to\infty}\frac{\Delta b_k}{b_n} = 0;\ \text{(L)}\ (\forall)\ k \geqslant 1,\ \sum_{k=1}^{n}\frac{\Delta b_k}{b_n} = \frac{1}{b_n}\sum_{k=1}^{n}(b_k - b_{k-1}) = 1.$$

Aplicînd T. 2.3.25., conchidem că $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\Delta a_n}{\Delta b_n}$.

Corolar 1.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^p + 2^p + \ldots + n^p}{n^{p+1}} = \frac{1}{p+1},\ (\forall)\ p \in \mathbf{N}.$$

Dem. Fie $a_n := 1^p + 2^p + \ldots + n^p$, $b_n := n^{p+1}$ $(n \geqslant 1)$. Atunci

$$\frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \frac{(n+1)^p}{(n+1)^{p+1} - n^{p+1}} = \frac{\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^p}{n\left[\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^p - 1\right] + \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^p},\ (n \geqslant 1).$$

Trecînd la limită, $n \to \infty$, și ținînd seama că $\lim_{n\to\infty} n\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^p - 1\right] = p$, obținem că $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = \frac{1}{p+1}$, deci (T.2.3.26.) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{1}{p+1}$.

Corolar 2. *Fie* $(a_n)_{n\geq 1}$ *și* $(b_n)_{n\geq 1}$ *două șiruri de numere reale cu proprietățile :* $1^\circ\ 0 < b_n \nearrow +\infty$; 2° *Șirul* $\left(\frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}}\right)_{n\geq 1}$ *este mărginit. Atunci șirul* $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n\geq 1}$ *este mărginit și avem* $\sup_{n\geq 1}\left|\frac{a_n}{b_n}\right| \leqslant \sup_{n\geq 1}\frac{|a_n - a_{n-1}|}{|b_n - b_{n-1}|}$.

Dem. Ținem seama de relația (1) din T. 2.3.26. și de Observația 4 de la T. 2.3.25.

Observație. Teorema 2.3.26. (Stolz-Cesaro) nu este numaidecît adevărată, dacă inversăm concluzia cu condiția 2°.

Contraexemplu : Fie $a_{2n} = a_{2n-1} = n$ și $b_n = n$, $(\forall)\ n \geqslant 1$. Atunci $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{1}{2}$ și $\frac{\Delta a_n}{\Delta b_n} = \frac{1-(-1)^n}{2}$, $(\forall)\ n \geqslant 1$, deci $\lim_{n\to\infty}\frac{\Delta a_n}{\Delta b_n}$ nu există.

2.4. Șiruri particulare remarcabile de numere

Vom prezenta aici cîteva cazuri particulare importante de șiruri numerice, care sînt frecvent utilizate în Analiză.

2.4.1. Propoziție.

$1^\circ\ \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$; $2^\circ\ \lim_{n\to\infty} n^p a^n = 0$, $|a| < 1$, $p \in \mathbf{Z}$;

$3^\circ\ \lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n} = \begin{cases} 0\ , & |a| \leqslant 1 \\ \infty, & a > 1 \end{cases}$; $4^\circ\ \lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!} = 0$, $a \in \mathbf{R}$;

$5^\circ\ \lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n} = 0$; $6^\circ\ \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a} = 1$, $a \in \mathbf{R}_+^*$; $7^\circ\ \lim_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} 0, & |a| < 1 \\ \infty & a > 1 \end{cases}$,

Dem. 1° Fie $x_n := \sqrt[n]{n} - 1$ $(n \geqslant 1)$. Atunci $x_n > 0$, $(\forall)\ n \geqslant 1$ și avem

$$n = (1+x_n)^n > \frac{n(n-1)}{2}x_n^2,\ (\forall)\ n \geqslant 1,$$

deci

$$0 < x_n^2 < \frac{2}{n(n-1)},\ (\forall)\ n \geqslant 1$$

și deci (P.2.3.81) $\lim_{n\to\infty} x_n^2 = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = 0$

2° Fie $|a| < 1$ fixat. Atunci $|a| = \frac{1}{1+\alpha}$ cu $\alpha > 0$, deci (P. 2.1.17. (11°))

$(1+\alpha)^n \geqslant \frac{n(n-1)}{2}\alpha^2$, $(\forall)\ n \geqslant 1$ și deci

$$0 \leqslant n|a|^n = \frac{n}{(1+\alpha)^n} < \frac{n}{\frac{n(n-1)}{2}\alpha^2} = \frac{2}{\alpha^2}\cdot\frac{1}{n-1},\ (\forall)\ n > 1,$$

prin urmare (P. 2.3.18.) $\lim\limits_{n\to\infty} n|a|^n = 0$ etc.

Analog arătăm că $\lim\limits_{n\to\infty} n^p a^n = 0$, $(\forall)\ p \in \mathbf{Z}$.

3° Dacă $|a| \leqslant 1$, avem $0 < \dfrac{|a|^n}{n} \leqslant \dfrac{1}{n}$, $(\forall)\ n \geqslant 1$, deci (P.2.3.18.)

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|a|^n}{n} = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{n} = 0$.

Dacă $a > 1$, avem $a = 1 + \varepsilon$, cu $\varepsilon > 0$, deci $a^n > \dfrac{n(n-1)}{2}\varepsilon^2$ și deci $\dfrac{a^n}{n} > (n-1)\dfrac{\varepsilon^2}{2}$, prin urmare (P. 2.3.17.) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{n} = \infty$.

4° Să punem $x_n = \dfrac{|a|^n}{n!}$ $(n \geqslant 1)$. Cum $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} = \dfrac{|a|}{n+1}$, $(\forall)\ n \geqslant 1$, $(\exists)\ N \geqslant 1$ a.î. $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} \leqslant \dfrac{1}{2}$, $(\forall)\ n \geqslant N$. Atunci $x_{N+1} \leqslant \dfrac{1}{2} x_N$, $x_{N+2} \leqslant \dfrac{1}{2} x_{N+1} \leqslant \dfrac{1}{2^2} x_N$ și in general $x_{N+p} \leqslant \dfrac{1}{2^p} x_N$, $(\forall)\ p \geqslant 1$, deci (P. 2.3.18.)

$$\lim_{p\to\infty} x_{N+p} = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} x_{x_n} = 0$$

5° $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln n}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} (\ln \sqrt[n]{n}) = \ln 1 = 0$. Atunci

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n^p} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{p-1}} \cdot \frac{\ln n}{n} = 0.0 = 0 \ (p \in \mathbf{N}).$$

6° (i) Dacă $a > 1$, $(\exists)\ m \geqslant 1$ cu $a < m$, deci $1 < \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{n}$, $(\forall)\ n \geqslant m$ și deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ (cf. 1°), rezultă (P. 2.3.18.) că $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

(ii) Dacă $0 < a < 1$, avem $b := \dfrac{1}{a} > 1$. Atunci

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = \frac{1}{1} = 1 \ \text{(cf. (i))}.$$

7° Dacă $|a| < 1$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 0$ (cf. 1°).

Dacă $a > 1$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = \lim\limits_{n\to\infty} n \cdot \dfrac{a^n}{n} = \infty$ (cf. 3°).

Observația 1. În 2° putem înlocui $p \in \mathbf{Z}$ prin $p \in \mathbf{R}$. În 3° (resp. 5°) rezultatele rămîn valabile, dacă înlocuim limitele date prin $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{n^p}$ (resp. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln n}{n^p}$) cu $p \in \mathbf{N}$ sau chiar $p \in \mathbf{R}_+$ (resp. $p \in [1, \infty)$).

Observația 2. Șirul $(\sqrt[n]{n})_{n\geqslant 3}$ este strict descrescător. Șirurile $\left(\frac{a^n}{n}\right)_{n\geqslant n_0}$ și $\left(\frac{a^n}{n!}\right)_{n\geqslant n_0}$ sînt strict monotone $(\forall)\ a\in\mathbf{R}_+^*$, dacă n_0 este suficient de mare. Verificăm acest lucru calculînd limita după n a cîtului a doi termeni consecutivi.

2.4.2. Propoziție (Numărul e). *Fie* $x_n := \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ $(n\geqslant 1)$. *Atunci* $(x_n)_{n\geqslant 1}$ *este strict crescător și majorat, deci convergent; limita sa se notează cu* e *și avem* $2<\mathrm{e}<3$.

Dem. Fie $y_n := \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ $(n\geqslant 1)$. Ținînd seama de inegalitatea

$$(1+t)^n > 1+nt,\ (\forall)\ t\in(-1,\ \infty)\setminus\{0\},\ (\forall)\ n\in\mathbf{N},$$

rezultă

$$\frac{y_n}{y_{n+1}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} : \left(\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}\cdot\frac{n+2}{n+1}\right) = \left(\frac{(n+1)^2}{n^2+2n}\right)^{n+1}\cdot\frac{n+1}{n+2} =$$

$$= \left(1+\frac{1}{n^2+2n}\right)^{n+1}\cdot\frac{n+1}{n+2} > \left(1+\frac{n+1}{n^2+2n}\right)\cdot\frac{n+1}{n+2} = \frac{n(n+2)^2+1}{n(n+2)^2} > 1,$$

deci $y_n > y_{n+1}$ și deci $(y_n)_{n\geqslant 1}$, este strict descrescător.

Analog, $(\forall)\ n\geqslant 1$ avem:

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} : \left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}\cdot\frac{n}{n+1}\right) = \left(\frac{n^2+2n}{(n+1)^2}\right)^{n+1}\cdot\frac{n+1}{n} =$$

$$= \left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1}\cdot\frac{n+1}{n} > \left(1-\frac{n+1}{(n+1)^2}\right)\cdot\frac{n+1}{n} = 1,$$

deci $x_{n+1} > x_n$ și deci $(x_n)_{n\geqslant 1}$ este strict crescător.

Evident, $(\forall)\ n\geqslant 1$ avem:

$$0<y_n-x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot\frac{1}{n} \leqslant \frac{y_n}{n} \leqslant \frac{y_1}{n} \to 0 (n\to\infty),$$

deci (T. 2.3.21 (3°)) șirurile $(x_n)_{n\geqslant 1}$ și $(y_n)_{n\geqslant 1}$ sînt convergente și limitele lor sînt egale; să notăm această limită cu e. Este clar că

$$2=x_1<\mathrm{e}<y_4=\left(1+\frac{1}{4}\right)^5=\frac{3125}{1024}<3.$$

Corolar 1. *Sirul* $x_n = \left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}$, $(n>1)$ *este strict descrescător și are limita* e.

Dem. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\right)^{\frac{n}{n-1}} = \mathrm{e}.$

Corolar 2. *Sirul* $\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)_{n\geq 1}$ *este strict crescător, iar șirul* $\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right)_{n\geq 1}$ *este strict descrescător și avem inegalitățile :*

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}, \ (\forall)\ n \geq 1.$$

Corolar 3.

$$1^\circ\ 0 < e - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \frac{3}{n}, \ (\forall)\ n \geq 1;$$

$$2^\circ\ \frac{1}{n+1} < \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}, \ (\forall)\ n \geq 1.$$

Dem. 1° Evident $(\forall)\ n \geq 1$ avem :

$$0 < e - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{n} < \frac{e}{n} < \frac{3}{n}.$$

2° Logaritmînd ineg. din Cor. 2 obținem :

$$n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < 1 < (n+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right),$$

deci

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n} \text{ și } \frac{1}{n+1} < \ln\left(1+\frac{1}{n}\right.$$

Observație. Se arată că numărul e (inițiala de la Euler) este transcendent și avem e = 2,7182818...

2.4.3. Propoziție (C o n s t a n t a l u i E u l e r).

Fie $x_n := 1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n (n \geq 1)$. *Atunci* $(x_n)_{n\geq 1}$ *este strict descrescător și minorat de* 0, *deci convergent*; *limita sa, numită constanta lui Euler, se notează cu* γ *și avem* $0 < \gamma < 1$.

Dem. Din P.2.4.2. Cor. 3 avem :

$$\frac{1}{n+1} < \ln(n+1) - \ln n < \frac{1}{n}, \ (\forall)\ n \geq 1, \tag{1}$$

deci

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} < \sum_{k=1}^{n} (\ln(k+1) - \ln k) < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}, \ (\forall)\ n \geq 1$$

și deci

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} < \ln(n+1) < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}, \ (\forall)\ n \geq 1.$$

Atunci $(\forall)\ n \geq 1$, avem :

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln n < 0 \ (\text{cf. } (1)),$$

deci $(x_n)_{n\geq 1}$ este strict descrescător. Mai departe $(\forall)\ n \geq 1$, avem :

$$0 < \ln\ (n+1) - \ln\ n < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln\ n = x_n < x_1 = 1.$$

Aşadar $(x_n)_{n\geq 1}$ este strict descrescător şi minorat de 0, deci (T. 2.3.21. (2°)) convergent; fie γ limita sa. Evident avem $0 \leq \gamma < 1$.

Corolar 1.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}}{\ln\ n} = 1.$$

Dem. Trecem la limită în relaţia evidentă:

$$\frac{1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}}{\ln\ n} = \frac{1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln\ n}{\ln\ n} + 1,\ (n > 1).$$

Corolar 2.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{kn}\right) = \ln\ k,\ (\forall)\ k \geq 2.$$

Dem. Trecem la limită în relaţia evidentă $\frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{kn} =$

$$= \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{kn} - \ln kn\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n\right) + \ln\ k,\ (n \geq 1).$$

2.5. Limite extreme ale unui şir de numere reale

2.5.1. Definiţie. Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ un şir din $\mathbf{R}$. Numărul $\inf\limits_{n\geq 1}(\sup\limits_{i\geq n} x_i)$ (resp. $\sup\limits_{n\geq 1}(\inf\limits_{i\geq n} x_i)$) se numeşte *limita superioară* (resp. *limita inferioară*) a şirului $(x_n)_{n\geq 1}$ şi se notează cu $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\ x_n$ (resp. $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\ x_n$). Numărul $x \in \overline{\mathbf{R}}$ se numeşte *punct limită* al şirului $(x_n)_{n\geq 1}$, dacă există $(x_{n_k})_{k\geq 1}$ un subşir al şirului $(x_n)_{n\geq 1}$, care are limita x; vom nota cu $L(x_n)_{n\geq 1}$, *mulţimea tuturor punctelor limită ale şirului* $(x_n)_{n\geq 1}$. Şirul $s_n := (x_i)_{i\geq n}$ se numeşte *secţiunea* (la dreapta) de indice n a şirului $(x_n)_{n\geq 1}$.

a) Din definiţia dată rezultă relaţiile :

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\ x_n = \inf_{n\geq 1}(\sup\ s_n)\ ;\ \underline{\lim_{n\to\infty}}\ x_n \sup_{n\geq 1}(\inf\ s_n).$$

b) Dacă $(x_{n_k})_{k\geq 1}$ este un subşir al şirului $(x_n)_{n\geq 1}$ atunci avem inegalităţile :

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\ x_n \leq \underline{\lim_{k\to\infty}}\ x_{n_k}\ ;\ \overline{\lim_{k\to\infty}}\ x_{n_k} \leq \overline{\lim_{n\to\infty}}\ x_n.$$

Observaţii. 1. Orice şir de *numere reale posedă limită superioară şi limită inferioară, deşi nu orice şir de numere posedă limită*;

2. Din proprietatea Cesaro a lui $\mathbf{R}$ rezultă că orice șir mărginit de numere reale, posedă cel puțin un punct limită în $\mathbf{R}$.

Exemplul 1. Fie $x_n := (-1)^n$, $(n \geqslant 1)$. Atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n} = +1$ și $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n+1} = -1$, deci $+1$ și -1 sînt puncte limită ale șirului dat. Deoarece $\sup s_n = +1$ și $\inf s_n = -1$, $(\forall) n \geqslant 1$, avem $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = \inf\limits_{n\geqslant 1} (\sup s_n) = +1$ și analog $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = -1$.

Exemplul 2. Fie $x_n := \sin\frac{n\pi}{2}$ $(n \geqslant 1)$. Atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_{4n} = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_{4n-1} = -1$ și $\lim\limits_{n\to\infty} x_{4n+1} = 1$, deci 0, -1 și $+1$ sînt puncte limită ale șirului dat. Evident $\sup s_n = +1$ și $\inf s_n = -1$, $(\forall)$ $n \geqslant 1$, deci $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = +1$ și $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = -1$.

Exemplul 3. Fie $(x_n)_{n\geqslant 1}$ un șir definit astfel $x_{2n} = \frac{n}{n+1}$ și $x_{2n+1} = \frac{1}{3^n}$. Atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n} = 1$ și $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n-1} = 0$, deci 0 și 1 sînt puncte limită ale șirului dat. Evident $\sup s_n = \frac{n}{n+1}$ și $\inf s_n = \frac{1}{3^n}$, $(\forall)$ $n \geqslant 1$, deci $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$ și $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{3^n} = 0$.

2.5.2. Propoziție. *Fie $(x_n)_{n\geqslant 1}$ un șir de numere reale. Atunci avem :*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \lim_{n\to\infty} (\sup_{i\geqslant n} x_i)\,;\ \underline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \lim_{n\to\infty} (\inf_{i\geqslant n} x_i).$$

Dem. Șirul numeric $(\sup\limits_{i\geqslant n} x_i)_{n\geqslant 1}$ este monoton descrescător, deci limita sa există și ea este egală cu marginea sa inferioară i.e. $\lim\limits_{n\to\infty} (\sup\limits_{i\geqslant n} x_i) = \inf\limits_{n\geqslant 1} (\sup\limits_{i\geqslant n} x_i)$. Cu aceasta am obținut prima relație.

A doua relație se obține la fel.

Corolar 1. *Fie $(x_n)_{n\geqslant 1}$ un șir de numere reale. Atunci avem :*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} (-x_n) = -\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n\,;\ \underline{\lim_{n\to\infty}} (-x_n) = -\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n$$

2.5.3. Propoziție. *Fie $(x_n)_{n\geqslant 1}$ un șir de numere reale, $x_* = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$ și $x^* = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$. Atunci avem :*

$$\inf_{i\geqslant k} x_i \leqslant x_* \leqslant x^* \leqslant \sup_{i\geqslant k} x_i,\ (\forall)\ k \geqslant 1.$$

Dem. Fie $k \geqslant 1$ fixat ; evident avem :

$$\inf_{i\geqslant k} x_i \leqslant \sup_{n\geqslant 1} (\inf_{i\geqslant n} x_i) = x_*,\ \sup_{i\geqslant k} x_i \geqslant \inf_{n\geqslant 1} (\sup_{i\geqslant n} x_i) = x^*.$$

Deoarece $\inf\limits_{i\geqslant n} x_i \leqslant \sup\limits_{j\geqslant m} x_j$, $(\forall)$ n, $m \geqslant 1$, rezultă imediat că

$$x_* = \sup_{n\geqslant 1} (\inf_{i\geqslant n} x_i) \leqslant \inf_{m\geqslant 1} (\sup_{j\geqslant m} x_j) = x^*.$$

Corolar 1. *Fie* $(x_n)_{n\geq 1}$ *un şir majorat (resp. minorat) de numere reale. Atunci* $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$ *(resp.* $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$*) este finită.*

Corolar 2. *Fie* $(x_n)_{n\geq 1}$ *un şir de numere reale,* $m = \inf\limits_{n\geq 1} x_n$, $M = \sup\limits_{n\geq 1} x_n$ *şi* $L(x_n)_{n\geq 1}$ *mulţimea punctelor limită ale şirului dat. Atunci avem :* $L(x_n)_{n\geq 1} \subseteq [m, M]$.

Dem. Fie $x \in L(x_n)_{n\geq 1}$ fixat şi $(x_{n_k})_{k\geq 1}$ un subşir al şirului $(x_n)_{n\geq 1}$, care are limita x. Atunci

$$m \leq \underline{\lim_{n\to\infty}} x_n \leq \underline{\lim_{k\to\infty}} x_{n_k} = x = \overline{\lim_{k\to\infty}} x_{n_k} \leq \overline{\lim_{n\to\infty}} x_n \leq M,$$

deci $x \in [m, M]$.

2.5.4. Teoremă. *Fie* $(x_n)_{n\geq 1}$ *un şir cu elemente din* $\mathbf{R}$. *Atunci* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ *există* $\Leftrightarrow \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$. *In acest caz cele trei limite coincid.*

Dem. ($\Rightarrow$) Fie $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, $x_* = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$ şi $x^* = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$. Presupunem x finit şi fie $c > x$ fixat; atunci $(\exists)\ N \geq 1$ a.î. $x_n < c$, $(\forall)\ n \geq N$, deci $\sup\limits_{n\geq N} x_n \leq c$ şi deci $x^* \leq \sup\limits_{n\geq N} x_n \leq c$. Cum $c > x$ nu depinde de x^*, rezultă că $x^* \leq x$. Fie acum $c' < x$ fixat; atunci $(\exists)\ N'_\varepsilon \geq 1$ a.î. $x_n > c'$, $(\forall)\ n \geq N'$, deci $\inf\limits_{n\geq N'} x_n \geq$ $\geq c'$ şi deci $x_* \geq \inf\limits_{n\geq N} x_n \geq c'$. Cum $c' > x$ nu depinde de x_*, rezultă că $x_* \geq x$.

Aşadar $x \leq x_* \leq x^* \leq x$, prin urmare $x = x_* = x^*$.

($\Leftarrow$) Presupunem x_*, x^* finite, punem $x := x_* = x^*$ şi fie $c_1 < x < c_2$ fixaţi. Deoarece $x = \lim\limits_{n\to\infty}(\sup\ s_n)$, unde $s_n := (x_i)_{i\geq n}$, există $N \geq 1$ a.î. $\sup s_n < c_2$, $(\forall)\ n \geq N$, deci $x_n \leq c_2$, $(\forall)\ n \geq N$. Analog $(\exists)\ N' \geq 1$ a.î. $x_n > c_1$, $(\forall)\ n \geq N'$, deci $x_n \in (c_1, c_2)$, $(\forall)\ n \geq \max\{N, N'\}$, de unde rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.

Raţionament analog dacă x, x_*, x^* sînt infinite.

2.5.5. Teoremă. *Fie* $(x_n)_{n\geq 1}$ *un şir de elemente din* $\mathbf{R}$. *Atunci mulţimea* $L(x_n)_{n\geq 1}$ *a tuturor punctelor limită ale şirului dat este închisă în* $\overline{\mathbf{R}}$.

Dem. Fie $(y_k)_{k\geq 1}$ un şir cu elemente din $L(x_n)_{n\geq 1}$ care are limita $y \in \overline{\mathbf{R}}$ şi să arătăm că $y \in L(x_n)_{n\geq 1}$. Evident putem presupune că y_k este finit, $(\forall)$ $k \geq 1$. Distingem două cazuri :

(i) *y este finit.* Deoarece $y_k \in L(x_n)_{n\geq 1}$ există un subşir al şirului $(x_n)_{n\geq 1}$ care are limita y_k. Atunci pentru y_1 există x_{n_1} a.î. $|x_{n_1} - y_1| \leq 1$; apoi pentru y_2 există x_{n_2} cu $n_2 > n_1$ a.î. $|x_{n_2} - y_2| \leq \frac{1}{2}$. Prin inducţie construim un subşir $(y_{n_k})_{k\geq 1}$ al şirului $(x_n)_{n\geq 1}$ cu proprietatea că $|x_{n_k} - y_k| \leq \frac{1}{k}$, $(\forall)\ k \geq 1$. Din inegalitatea

$$|y - x_{n_k}| \leq |y - y_k| + |y_k - x_{n_k}|,\ (k \geq 1),$$

prin trecere la limită, $k \to \infty$, obţinem că $y = \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}$, deci $y \in L(x_n)_{n\geq 1}$.

(ii) Dacă y este infinit se raţionează la fel cu (i).

Prin urmare $L(x_n)_{n\geq 1}$ este o mulţime închisă în $\overline{\mathbf{R}}$.

Corolar 1. *Fie* $(x_n)_{n\geq 1}$ *un şir mărginit cu elemente din* $\mathbf{R}$. *Atunci mulţimea* $L(x_n)_{n\geq 1}$ *a tuturor punctelor limită ale şirului dat este o mulţime închisă în* $\mathbf{R}$.

2.5.6. Teoremă. *Fie* $(x_n)_{n\geqslant 1}$ *un şir din* $\mathbf{R}$. *Atunci au loc afirmaţiile* :

$1^\circ\ x^* = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n \Leftrightarrow \begin{cases} \text{(i) } (\forall)\ c > x^*,\ (\exists)\ n_c \geqslant 1\ a.î.\ x_n \leqslant c,\ (\forall)\ n \geqslant n_c; \\ \text{(ii) } (\forall)\ c < x^*,\ (\forall)\ n' \geqslant 1,\ (\exists)\ n > n'\ a.î.\ x_n > c. \end{cases}$

$2^\circ\ x_* = \underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n \Leftrightarrow \begin{cases} \text{(i) } (\forall)\ c < x_*,\ (\exists)\ n_c \geqslant 1\ a.î.\ x_n > c,\ (\forall)\ n \geqslant n_c; \\ \text{(ii) } (\forall)\ c > x_*,\ (\forall)\ n' \geqslant 1,\ (\exists)\ n > n'\ a.î.\ x_n < c. \end{cases}$

Dem. 1° Fie $x^* = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n$ şi să fixăm $c > x^*$.

Deoarece $x^* = \inf_{n\geqslant 1} (\sup_{i\geqslant n} x_i)$, $(\exists)\ n_c \geqslant 1$ a.î. $\sup_{i\geqslant n_c} x_i < c$, deci $x_n < c$, $(\forall)\ n \geqslant n_c$.

Fie mai departe $c < x^*$ şi $n' \geqslant 1$ fixaţi. Atunci $\sup_{i\geqslant n} x_i \geqslant x^*$, $(\forall)\ n \geqslant 1$, deci în particular $\sup_{i\geqslant n'} x_i \geqslant x^* > c$ şi deci $(\exists)\ n > n'$ cu $x_{n'} > c$.

($\Leftarrow$) Dacă x^* satisface condiţia (i) din enunţ, atunci $(\forall)\ c > x^*$, avem $\sup_{n\geqslant n_c} x_n \leqslant c$, deci $l = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n \leqslant \sup_{n\geqslant n_c} x_n \leqslant c$. Cum l nu depinde de $c > x^*$, conchidem că $l \leqslant x^*$.

Dacă x^* satisface condiţia (ii) din enunţ, atunci $(\forall)\ c < x^*$, $(\forall)\ n' \geqslant 1$ avem $\sup_{i\geqslant n'} x_i > c$, deci $l = \inf_{n'\geqslant 1} (\sup_{i\geqslant n'} x_i) \geqslant c$. Cum l nu depinde de $c < x^*$, conchidem că $l \geqslant x^*$.

Prin urmare $\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = x^*$

Afirmaţia 2° se arată la fel ca 1°.

Corolar 1. *Fie* $(x_n)_{n\geqslant 1}$ *un şir din* $\mathbf{R}$. *Atunci au loc afirmaţiile* :

1° $\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n < +\infty \Leftrightarrow (x_n)_{n\geqslant 1}$ *este majorat*;

2° $\underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n > -\infty \Leftrightarrow (x_n)_{n\geqslant 1}$ *este minorat.*

Dem. Implicaţia ($\Rightarrow$) rezultă din T. 2.5.6(i), iar implicaţia ($\Leftarrow$) rezultă din P. 2.5.3. Cor. 1.

Corolar 2. *Fie* $(x_n)_{n\geqslant 1}$ *un şir majorat din* $\mathbf{R}$. *Atunci avem* :

$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = x^* \Leftrightarrow \begin{cases} \text{(i) } (\forall)\ \varepsilon > 0,\ (\exists)\ n_\varepsilon \geqslant 1\ a.î.\ x_n \leqslant x^* + \varepsilon,\ (\forall)\ n \geqslant n_\varepsilon; \\ \text{(ii) } (\forall)\ \varepsilon > 0,\ (\forall)\ n' \geqslant 1,\ (\exists)\ n > n'\ a.î.\ x_n > x^* - \varepsilon. \end{cases}$

Corolar 3. *Fie* $(x_n)_{n\geqslant 1}$ *un şir minorat din* $\mathbf{R}$. *Atunci avem* :

$\underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = x_* \Leftrightarrow \begin{cases} \text{(i) } (\forall)\ \varepsilon > 0,\ (\exists)\ n_\varepsilon \geqslant 1\ a.î.\ x_n \geqslant x_* - \varepsilon,\ (\forall)\ n \geqslant n_\varepsilon; \\ \text{(ii) } (\forall)\ \varepsilon > 0,\ (\forall)\ n' \geqslant 1,\ (\exists)\ n > n'\ a.î.\ x_n < x_* + \varepsilon. \end{cases}$

Corolar 4. *Fie* $(x_n)_{n\geqslant 1}$ *un şir din* $\mathbf{R}$. *Atunci au loc afirmaţiile* :

$1^\circ\ x^* = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n \Leftrightarrow \begin{cases} \text{(i) } (\forall)\ c > x^*,\ (\exists)\ n_c \geqslant 1\ a.î.\ x_n < c,\ (\forall)\ n \geqslant n_c; \\ \text{(ii) } (\exists)\ (x_{n_k})_{k\geqslant 1} \subseteq (x_n)_{n\geqslant 1},\ x_{n_k} \to x^* \end{cases}$

$2^\circ\ x_* = \underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n \Leftrightarrow \begin{cases} \text{(i) } (\forall)\ c < x_*,\ (\exists)\ n_c \geqslant 1\ a.î.\ x_n \geqslant c,\ (\forall)\ n \geqslant n_c; \\ \text{(ii) } (\exists)\ (x_{n_k})_{k\geqslant 1} \subseteq (x_n)_{n\geqslant 1}\ a.î.\ x_{n_k} \to x_*. \end{cases}$

Corolar 5. *Fie* $(x_n)_{n\geqslant 1}$ *un şir din* $\mathbf{R}$. *Atunci* $\underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n$ *şi* $\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n$ *sînt puncte limită ale şirului dat.*

Dem. Aplicăm Cor. 4 (cond. (ii)) şi T. 2.5.5.

2.5.7. Teoremă. *Fie* $(x_n)_{n\geqslant 1}$ *un şir din* $\mathbf{R}$ *şi* $L(x_n)_{n\geqslant 1}$ *mulţimea punctelor sale limită. Atunci* $\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = \sup L(x_n)_{n\geqslant 1}$ *şi* $\underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = \inf L(x_n)_{n\geqslant 1}$.

Dem. Fie $x^* = \sup L(x_n)$ şi $c > x^*$ fixat. Dacă intervalul $[c, \infty]$ ar conţine o infinitate de termeni ai şirului dat, atunci $(\exists)\ (x_{n_k})_{n\geqslant 1}$ un subşir al şirului $(x_n)_{n\geqslant 1}$ cu $x_{n_k} \in [c, \infty]$, $(\forall)\ k \geqslant 1$. Considerînd un subşir al său, putem pre-

supune că $(x_{n_k})_{k\geqslant 1}$ are limită și fie x limita sa. Atunci $x\in[c,\ \infty]\cap L(x_n)_{n\geqslant 1}$, deci $x^*=\sup L(x_n)_{n\geqslant 1}\geqslant x\geqslant c$, în contradicție cu $c>x^*$. Rămîne că $(\exists)$ $n_c\geqslant 1$ a.î. $x_n\leqslant c$, $(\forall)$ $n\geqslant n_c$ (1).

Fie mai departe $c<x^*$ și $n'\geqslant 1$ fixați. Din definiția marginii superioare rezultă că $(\exists)$ $x\in L(x_n)_{n\geqslant 1}$ cu $x>c$. Cum $x\in L(x_n)_{n\geqslant 1}$ $(\exists)$ $(x_{n_k})_{k\geqslant 1}$ un subșir al șirului $(x_n)_{n\geqslant 1}$, care are limita x. De aici rezultă imediat că $(\exists)$ $k_0\geqslant 1$ cu proprietatea că $n_{k_0}>n'$ și $x_{n_{k_0}}>c$ (2). Din (1) și (2) conchidem (T. 2.5.6. (1°)) că $x^*=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\ x_n$.

A doua proprietate se arată la fel.

Corolar 1. *Fie $(x_n)_{n\geqslant 1}$ un șir din* **R** *și x un punct limită al șirului dat. Atunci avem* : $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\ x_n\leqslant x\leqslant\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\ x_n$.

Corolar 2. *Fie $(x_n)_{n\geqslant 1}$ un șir marginit cu elemente din* **R**. *Atunci* $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\ x_n$ *(resp.* $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\ x_n$*) este cel mai la dreapta (resp. stînga) punct limită al șirului dat.*

Dem. $(x_n)_{n\geqslant 1}$ fiind mărginit, rezultă (P. 2.5.3. Cor. 2) că mulțimea $L(x_n)_{n\geqslant 1}$ este mărginită. Cum ea este și închisă (T. 2.5.5.), rezultă că $L(x_n)_{n\geqslant 1}$ este compactă, deci $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\ x_n=\sup L(x_n)_{n\geqslant 1}=\max L(x_n)_{n\geqslant 1}$ etc.

Corolar 3. *Fie $(x_n)_{n\geqslant 1}$ un șir cu elemente din* **R**, *care se poate scrie ca o „reuniune" de p subșiruri* care au limită* : $(x_n^1)_{n\geqslant 1}$, $(x_n^2)_{n\geqslant 1}$, ..., $(x_n^p)_{n\geqslant 1}$. *Atunci* $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\ x_n=\max\limits_{i=\overline{1,p}}x^i$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\ x_n=\min\limits_{i=\overline{1,p}}x^i$, *unde* $x^i=\lim\limits_{n\to\infty}x_n^i$.

Dem. Aplicăm Cor. 2, ținînd seama că $L(x_n)_{n\geqslant 1}=(x_i)_{i=\overline{1,p}}$.

Corolar 4. *Fie $(x_n)_{n\geqslant 1}$ un șir din* **R** *și $L(x_n)_{n\geqslant 1}$ mulțimea punctelor sale limită. Atunci $(x_n)_{n\geqslant 1}$ are limită $\Leftrightarrow$ $L(x_n)_{n\geqslant 1}$ se reduce la un singur punct.*

Dem. Aplicăm T. 2.5.4. și T. 2.5.7.

2.5.8. Propoziție. *Fie $(x_n)_{n\geqslant 1}$ și $(y_n)_{n\geqslant 1}$ două șiruri mărginite de numere reale. Atunci au loc relațiile* :

1° $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\ (x_n+y_n)\leqslant\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\ x_n+\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\ y_n$;

2° $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\ (x_n+y_n)\geqslant\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\ x_n+\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\ y_n$

3° $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\ x_ny_n\leqslant(\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\ x_n)\cdot(\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\ y_n)$, *dacă ambele șiruri au termenii nenegativi.*

Dem. 1° $\sup\limits_{i\geqslant n}\ (x_i+y_i)\leqslant\sup\limits_{i\geqslant n}\ x_i+\sup\limits_{i\geqslant n}\ y_i$, $(\forall)$ $n\geqslant 1$,

deci

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\ (x_n+y_n)=\lim_{n\to\infty}\ (\sup_{i\geqslant n}\ (x_i+y_i))\leqslant$$

$$\leqslant\lim_{n\to\infty}\ (\sup_{i\geqslant n}\ x_i)+\lim_{n\to\infty}\ (\sup_{i\geqslant n}\ y_i)=\overline{\lim_{n\to\infty}}\ x_n+\overline{\lim_{n\to\infty}}\ y_n.$$

2° și 3° se arată la fel.

Observație. P. 2.5.8. are loc și pentru șiruri arbitrare de numere reale, dacă utilizăm convențiile asupra operațiilor algebrice cu elemente din $\overline{\mathbf{R}}$.

2.5.9. Teoremă. *Fie $(x_n)_{n\geqslant 1}$ și $(y_n)_{n\geqslant 1}$ două șiruri cu elemente din* **R**. *Dacă $(x_n)_{n\geqslant 1}$ este convergent și* $\lim\limits_{n\to\infty}x_n>0$, *atunci avem* : $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\ (x_ny_n)=(\lim\limits_{n\to\infty}x_n)(\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\ y_n)$.

---

* O „reuniune" de două șiruri este distinctă de reuniunea mulțimilor asociată șirurilor.

Dem. Fie $x := \underline{\lim}_{n\to\infty} x_n$ și $y := \overline{\lim}_{n\to\infty} y_n$. Deoarece $x > 0$, putem presupune dînd la o parte un număr finit de termeni că $x_n > 0$, $(\forall)\ n \geqslant 1$. Distingem trei cazuri:

(i) $y \in \mathbf{R}$. Cf. T. 2.5.6. Cor. 4$(\exists)\ (y_{n_k})_{k\geqslant 1}$ un subșir al șirului $(y_n)_{n\geqslant 1}$ a.î. $y_{n_k} \to y$, deci $x_{n_k} y_{n_k} \to xy$ și deci (T. 2.5.7.) $xy \leqslant \overline{\lim}_{n\to\infty} (x_n y_n)$. Să utilizăm mai departe inegalitatea demonstrată pentru șirurile $\left(\frac{1}{x_n}\right)_{n\geqslant 1}$ și $(x_n y_n)_{n\geqslant 1}$; obținem:

$$\frac{1}{x}\overline{\lim_{n\to\infty}}\ x_n y_n \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}}\left(\frac{1}{x_n}\right)\cdot(x_n y_n) = \overline{\lim_{n\to\infty}}\ y_n = y,$$

deci $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n y_n \leqslant xy$ și deci $\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n y_n = xy$.

(ii) $y = +\infty$. Ca și mai sus, $(\exists)(y_{n_k})_{k\geqslant 1}$ un subșir al șirului $(y_n)_{n\geqslant 1}$ cu $y_{n_k} \to y$. Atunci $x_{n_k} y_{n_k} \to +\infty (k \to \infty)$, deci $(x_n y_n)_{n\geqslant 1}$ nu este majorat și deci $\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n y_n = +\infty$. Cum $xy = +\infty$, obținem relația din enunț.

(iii) $y = -\infty$. Se procedează ca în cazul (ii).

2.5.10. Teoremă. *Fie $(x_n)_{n\geqslant 1}$ un șir de numere reale pozitive. Atunci au loc inegalitățile:*

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\ \frac{x_{n+1}}{x_n} \leqslant \underline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{x_n} \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{x_n} \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}}\ \frac{x_{n+1}}{x_n}.$$

Dem. Fie $l := \underline{\lim}_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$ și $L := \overline{\lim}_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$. Dacă $l = 0$ sau $L = +\infty$, inegalitățile sînt evidente. Presupunem deci $l > 0$ și $L < +\infty$. Fie $c > L$ fixat. Atunci (T. 2.5.6. (1°)) $(\exists)\ N \geqslant 1$ a.î. $\frac{x_{n+1}}{x_n} \leqslant c$, $(\forall)\ n \geqslant N$, deci $x_{N+p} \leqslant c^p x_N$ $(\forall)\ p \geqslant 1$ și deci:

$$\sqrt[N+p]{x_{N+p}} \leqslant c^{\frac{p}{N+p}} \cdot \sqrt[N+p]{x_N},\ (\forall)\ p \geqslant 1,$$

de unde rezultă

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{x_n} = \overline{\lim_{p\to\infty}}\sqrt[N+p]{x_{N+p}} \leqslant \overline{\lim_{p\to\infty}} c^{\frac{p}{N+p}} \cdot \sqrt[N+p]{x_N} = (\lim_{p\to\infty} c^{\frac{p}{N+p}})(\lim_{p\to\infty}\sqrt[N+p]{x_N}) = c.$$

Cum $\overline{\lim}_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}$ nu depinde de $c > L$, conchidem că $\overline{\lim}_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n} \leqslant L$.

Fie acum $0 < c' < l$ fixat. Atunci (T. 2.5.6.(1°)) $(\exists)\ N' \geqslant 1$ a.î. $\frac{x_{n+1}}{x_n} \geqslant c'$, $(\forall)\ n \geqslant N'$, deci $x_{N+p} \geqslant c^p x_N$ $(\forall)\ p \geqslant 1$ și deci, raționînd ca mai sus, obținem $\underline{\lim}_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n} \geqslant c$, deci $\underline{\lim}_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n} \geqslant l$.

Corolar 1. *Fie $(x_n)_{n\geqslant 1}$ un șir de numere reale pozitive. Dacă $l := \underline{\lim}_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$ există, finită sau infinită, atunci $\underline{\lim}_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}$ există și este egală cu l.*

Dem. Aplicăm T. 2.5.4. și T. 2.5.10.

Corolar 2.

$$1^\circ \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1;\ 2^\circ \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e;\ 3^\circ \lim_{n\to\infty} \left(\prod_{k=2}^{n} \sin\frac{\pi}{k}\right)^{1/n} = 0.$$

2.6. Numere complexe

Vom defini în această secțiune numerele complexe și vom arăta cîteva proprietăți ale lor, cum ar fi, spre exemplu, expresia rădăcinii de ordinul n a unui număr complex.

2.6.1. Propoziție. Fie $K := \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ *mulțimea perechilor ordonate de numere reale. Atunci operațiile:*

$$(x, y) + (x', y') := (x + x', y + y')$$

$$(x, y) \cdot (x', y') := (xx' - yy', xy' + x'y)$$

definesc pe K o structură de corp comutativ.

Dem. Evident $(K, +)$ este grup comutativ; elementul nul este $(0, 0)$ iar opusul lui (x, y) este $(-x, -y)$. Se vede imediat că operația $\cdot$ este asociativă și comutativă. Dacă punem $e := (1,0)$, atunci $(\forall)\ z = (x, y) \in K$ avem $z \cdot e = (x, y) \cdot (1, 0) = (x \cdot 1 - y \cdot 0,\ x \cdot 0 + y \cdot 1) = (x, y) = z$, deci e este elementul unitate în $(K, \cdot)$.

Fie acum $z = (x, y) \in K$, $z \neq 0$, fixat. Atunci $z' = \left(\dfrac{x}{x^2 + y^2}, \dfrac{-y}{x^2 + y^2}\right)$ este inversul lui z, deoarece

$$zz' = (x, y) \cdot \left(\frac{x}{x^2 + y^2} \cdot \frac{-y}{x^2 + y^2}\right) = \left(\frac{xx}{x^2 + y^2} - \frac{y(-y)}{x^2 + y^2}, \frac{-xy}{x^2 + y^2} + \frac{xy}{x^2+y^2}\right) = 0$$

În fine se verifică imediat că operațiile $+$, $\cdot$ sînt compatibile între ele, prin urmare $(K, +, \cdot)$ este un corp comutativ.

2.6.2 Definiție. Mulțimea $(K, +, \cdot)$ dată de P. 2.6.1. se numește *corpul numerelor complexe* și se notează cu $\mathbf{C}$. Un element din $\mathbf{C}$ se numește *număr complex.*

Fie $z = (x, y) \in \mathbf{C}$ un număr complex. Să asociem lui z punctul P de coordonate (x, y) dintr-un sistem de axe rectangulare $X\ O\ Y$ (fig. 2).

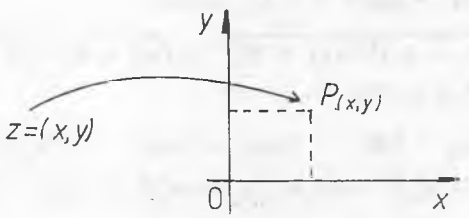


Fig. 2

Obținem în acest mod o bijecție a lui $\mathbf{C}$ pe $X\ O\ Y$. Identificînd numărul $z = (x, y) \in \mathbf{C}$ cu punctul $P(x, y) \in XOY$ putem spune că *orice număr complex are ca imagine un punct în planul $X\ O\ Y$ și reciproc orice punct din planul $X\ O\ Y$ este imaginea unui număr complex.* Această identificare permite ca

o serie de concepte geometrice ca „distanța dintre două puncte", „unghiul dintre două curbe" etc. să fie împrumutate mulțimii $\mathbf{C}$ și reciproc.

2.6.3. Propoziție. *Aplicația* $\varphi : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ *definită astfel* $\varphi(x) = (x, 0)$, *este izomorfă i.e. aditivă și multiplicativă.*

Dem. Evident.

Din P. 2.6.3. rezultă că putem identifica numărul real x cu numărul complex $(x, 0)$ deci $\mathbf{R}$ este o submulțime a lui $\mathbf{C}$.

Notînd numărul complex $(0, 1)$ cu simbolul i, avem $i^2 = -1$ și

$$(x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + (0,1) \cdot (y, 0) = x + iy$$

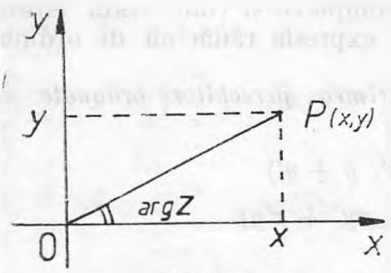


Fig. 3

Așadar un număr complex este o expresie de forma $x+iy$, unde $x, y \in \mathbf{R}$, iar i este un simbol.

2.6.4. Definiție. Fie $z = x + iy$ un număr complex i.e. un punct $P(x, y)$ din planul $X\,O\,Y$. Se numește *modul* de z și se notează cu $|z|$, numărul $\sqrt{x^2 + y^2}$. Se numește *argument* de z și se notează cu $\arg z$ măsura unghiului format de OX cu OP în sens direct (fig. 3).

Notînd $r = |z|$ și $\theta := \arg x$, avem $x = r\cos\theta$, $y = r \sin \theta$, deci $z = r(\cos\theta + i \sin \theta)$.

2.6.5. Definiție. Expresia $|z|$ $(\cos(\arg z) + i \sin (\arg z))$ egală cu z se numește reprezentarea *trigonometrică* a numărului z.

Exemple.

$$1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$1 + i\sqrt{3} = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i \sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i = 1\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i \sin\frac{11\pi}{6}\right)$$

2.6.6. Propoziție. *Funcția modul pe* $\mathbf{C}$ *satisface proprietățile*:

1° $|z| \geqslant 0$ $(\forall)$ $z \in \mathbf{C}$; $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$;

2° $|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$, $(\forall)$ $z_1, z_2 \in \mathbf{C}$;

3° $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$, $(\forall)$ $z_1, z_2 \in \mathbf{C}$.

Dem. 1° Fie $z = x + iy \in \mathbf{C}$. Atunci $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \geqslant 0$; $|z| = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 0 \Leftrightarrow x = y = 0 \Leftrightarrow z = 0$.

2° Dacă $z_k = x_k + iy_k (k = \overline{1,2})$. avem:

$$|z_1 + z_2| = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2} \leqslant \sqrt{x_1^2 + y_1^2} + \sqrt{x_2^2 + y_2^2} =$$

$$= |z_1| + |z_2| \text{ (P. 2.1.17).}$$

3° $|z_1 z_2| = |(x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)| = ((x_1 x_2 - y_1 y_2)^2 +$

$$+ (x_1 y_2 + x_2 y_1)^2)^{1/2} = (x_1^2 x_2^2 - 2x_1 x_2 y_1 y_2 + y_1^2 y_2^2 + x_1^2 y_2^2 + 2x_1 x_2 y_1 y_2 + x_2^2 y_1^2)^{1/2} =$$

$$= ((x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2))^{1/2} = |z_1| \cdot |z_2|$$

2.6.7. Propoziție. *Fie* $z_k = r_k (\cos\theta_k + i \sin \theta_k)$ $(k = \overline{1,2})$ *două numere complexe. Atunci*

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin (\theta_1 + \theta_2)]$$

Dem. $z_1z_2 = r_1r_2\,(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) =$

$$= r_1r_2\,[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)]$$

Corolar 1

$(\forall)\ n \geqslant 1$, $(\forall)\ z_k = r_k(\cos\theta_k + i\sin\theta_k) \in \mathbf{C}\ (k = \overline{1,2})$, *avem relația*:

$$\prod_{k=1}^{n} z_k = \left(\prod_{k=1}^{n} r_k\right)\left(\cos\left(\sum_{k=1}^{n}\theta_k\right) + i\sin\left(\sum_{k=1}^{n}\theta_k\right)\right)$$

Dem. Prin inducție relativ la n, aplicînd P.2.6.7.

Corolar 2 (Formula lui Moivre).

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta),\ (\forall)\ n \geqslant 1$$

2.6.8. Propoziție. *Fie $a + ib$ un număr complex de modul r și argument θ. Atunci rădăcinile ecuației $z^n - (a + ib) = 0$ sînt date de relația*

$$z_k := \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) \quad (k = \overline{0,\ n-1})$$

Dem. Fie z un număr complex scris sub formă trigonometrică $z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Atunci ținînd seama de formula lui Moivre, ecuația $z^n - (a + ib) = 0$ se transcrie $\rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, de unde rezultă $\rho^n = r$ și $n\varphi = \theta + 2k\pi (k \in \mathbf{Z})$. Așadar orice rădăcină a ecuației date se exprimă sub forma

$$z_k := \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right),\ k \in \mathbf{Z}$$

Observăm că $z_k \neq z_{k'}, (\forall)\ k,\ k' \in \overline{0,\ n-1},\ k \neq k'$, deoarece numerele z_k și $z_{k'}$, au același modul, pe $\sqrt[n]{r}$, și argumente diferite pe $\frac{\theta + 2k\pi}{n}$ și $\frac{\theta + 2k'\pi}{n}$. În fine $z_{k+n} = z_k, (\forall)\ k = \overline{0,\ n-1}$, deoarece

$$z_{k+n} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta + 2(k+n)\pi}{n} + i\sin\frac{\theta + 2(k+n)\pi}{n}\right) =$$

$$= \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n} + 2\pi\right) + i\sin\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n} + 2\pi\right)\right] = z_k$$

Prin urmare numerele $z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}$ sînt distincte și orice număr z_k, $k \in \mathbf{Z}$, este egal cu unul dintre numerele $z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}$, ceea ce înseamnă că $z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}$ sînt rădăcinile ecuației date.

Corolar 1. *In același cadru : rădăcinile ecuației $z^n - (a + ib) = 0$ reprezintă vîrfurile unui poligon regulat cu n laturi înscris în cercul cu centrul în 0 și rază r ; rădăcina z_0 are argumentul $\frac{\theta}{n}$, iar rădăcina $z_k (k = \overline{1,\ n-1})$ se obține din precedenta z_{k-1} păstrînd modulul și mărind argumentul cu $\frac{2\pi}{n}$* (fig. 4).

Dem. Afirmația este evidentă: $|z_k| = r^{\frac{1}{n}}$ și

$$\arg z_k = \frac{\theta + 2k\pi}{n} = \frac{\theta + 2(k-1)\pi}{n} + \frac{2\pi}{n} = \arg z_{k-1} + \frac{2\pi}{n}$$

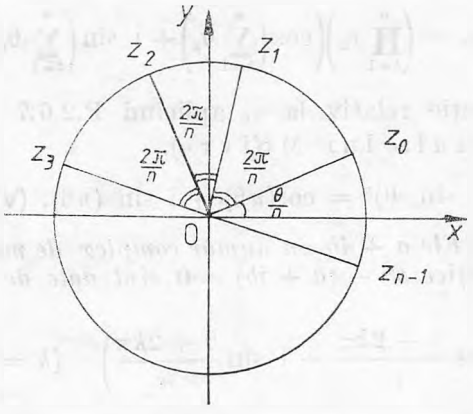


Fig. 4

2.6.9. Definiție. Fie $a + ib$ un număr complex. Se numește radicalul *algebric* de indice $n (n \geqslant 2)$ al numărului $a + ib$ mulțimea rădăcinilor ecuației $z^n - (a + ib) = 0$.

Observație. $\sqrt{1} = +1$ (radicalul aritmetic); $\sqrt{1} = \pm 1$ (radicalul algebric).

Exemplul 1. *Să se calculeze* $\sqrt[3]{1-i}$.

Punem $1-i$ sub formă trigonometrică:

$r = |1-i| = \sqrt{2}$; $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sin\theta = \frac{-1}{\sqrt{2}}$, de unde rezultă $\theta = \frac{7\pi}{4}$,

deci

$$1 - i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$$

Atunci rădăcinile ecuației $z^3 - (1 - i) = 0$ se exprimă sub forma:

$$z_k = (\sqrt{2})^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{\frac{7\pi}{4} + 2k\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{7\pi}{4} + 2k\pi}{3}\right)(k = 0, 1, 2),$$

deci

$$z_0 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}\right),\ z_1 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{15\pi}{12} + i\sin\frac{15\pi}{12}\right),$$

$$z_2 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{23\pi}{12} + i\sin\frac{23\pi}{12}\right).$$

Să încheiem acest paragraf cu un rezultat privind discul, respectiv coroana în care sînt situate rădăcinile unui polinom dat.

2.6.10. Propoziție. *Fie* $P = \sum_{k=0}^{n} c_k X^k \in \mathbf{C}[X]$ *un polinom de grad* n. *Dacă* z_0 *este o rădăcină a lui* P, *atunci avem* $|z_0| < 1 + \frac{1}{|c_n|} \max_{k=\overline{0,n-1}} |c_k|$.

Dem. Fie $z \in \mathbf{C}$, $|z| > 1$ fixat; punem $\alpha := \max_{k=\overline{0,n-1}} |c_k|$. Atunci

$$|P(z)| \geqslant |c_n z^n| - (|c_{n-1} z^{n-1}| + \ldots + |c_1 z| + |c_0|) \geqslant$$

$$\geqslant |c_n z^n| - \alpha(|z|^{n-1} + \ldots + |z| + 1) = |c_n z^n| - \alpha \frac{1-|z|^n}{1-|z|} =$$

$$= c_n |z|^n + \frac{\alpha}{|z|-1} - \frac{\alpha |z|^n}{|z|-1} > \left(|c_n| - \frac{\alpha}{|z|-1}\right)|z|^n$$

Dacă $|c_n| - \frac{\alpha}{|z|-1} \geqslant 0$ i.e. dacă $|z| \geqslant 1 + \frac{\alpha}{|c_n|}$, rezultă că $|P(z)| > 0$, prin urmare $|z_0| < 1 + \frac{\alpha}{c_n}$.

Corolar 1. *În același cadru, dacă* $P(0) \neq 0$, *atunci* $|z_0| > \left(1 + \frac{1}{|c_0|} \max_{k=\overline{1,n}} |c_k|\right)^{-1}$

Dem. Punem $z_0 = \frac{1}{\xi_0}$ și $Q := \sum_{k=0}^{n} c_k X^{n-k}$. Atunci

$$0 = P(z_0) = P\left(\frac{1}{\xi_0}\right) = \frac{1}{\xi_0^n}(c_n + c_{n-1}\xi_0 + \ldots + c_0 \xi_0^n) = \frac{1}{\xi_0^n} Q(\xi_0),$$

deci $Q(\xi_0) = 0$ și deci (P.2.6.10.) avem :

$$|\xi_0| < 1 + \frac{1}{|c_0|} \max_{k=\overline{1,n}} |c_k| \Leftrightarrow |z_0| > \left(1 + \frac{1}{|c_0|} \max_{k=\overline{1,n}} |c_k|\right)^{-1}$$

CAPITOLUL 3

SERII ŞI PRODUSE INFINITE DE NUMERE

Noţiunea de *serie* este extensiunea naturală a noţiunii de *sumă finită*, pentru un şir de numere, deci pentru o mulţime infinită particulară. După cum vom vedea studiul seriilor de numere se reduce la studiul unor şiruri de numere.

În secţiunea 3.1. vom prezenta noţiunea de *serie convergentă*, *serie divergentă* etc. şi principalele proprietăţi ale seriilor convergente, printre care criteriul general al lui Cauchy. În 3.2. vom prezenta cele mai importante *criterii clasice de convergenţă* a seriilor cu termeni pozitivi, cum ar fi criteriile lui D'Alembert, Cauchy, Raabe-Duhamel etc. apoi criteriul lui Abel-Dirichlet asupra seriilor numerice de forma $\sum_{n\geqslant 1} a_n b_n$. Mai departe, în 3.3. vom prezenta cîteva rezultate clasice privind *seriile semiconvergente*, *absolut convergente* şi *comutativ convergente*, iar în 3.4. teorema lui Mertens asupra *produsului convolutiv* a două serii. Exemple importante de serii sînt date în 3.5. Capitolul se încheie cu *produse infinite* de numere reale.

3.1. Serii convergente. Proprietăţi generale

3.1.1. Definiţie. Fie $(a_n)_{n\geqslant 1}$ un şir cu elemente din $\mathbf{R}$ şi $s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$ $(n \geqslant 1)$. Perechea $((a_n)_{n\geqslant 1}, (s_n)_{n\geqslant 1})$ se numeşte *serie de termen general* a_n şi se notează cu $\sum_{n\geqslant 1} a_n$, $\sum_{n} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sau $a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots$. Elementele şirului $(a_n)_{n\geqslant 1}$ se numesc *termenii seriei*, iar elementele şirului $(s_n)_{n\geqslant 1}$ se numesc *sumele parţiale* ale seriei date; elementul a_n (resp. s_n) se numeşte *termenul* (resp. *suma*) *de rang* n a seriei date. Fixăm $n \geqslant 1$; seria asociată şirului $(x_k)_{k\geqslant n+1}$ i.e. seria $a_{n+1}+a_{n+2}+\ldots$ se numeşte *restul de rang* n a seriei date şi se notează cu $\sum_{i\geqslant n+1} a_i$ sau $\sum_{i\geqslant 1} a_{n+i}$.

3.1.2. Definiţie. O serie de numere reale $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ se numeşte *convergentă* dacă şirul $(s_n)_{n\geqslant 1}$ este convergent; limita a a şirului $(s_n)_{n\geqslant 1}$ se numeşte *suma* seriei şi se scrie $a = \sum_{n\geqslant 1} a_n$. Dacă $\lim_{n\to\infty} s_n = +\infty$ (resp. $-\infty$), vom spune, prin abuz de limbaj că suma seriei date este egală cu $+\infty$ (resp. $-\infty$) şi vom scrie $\sum_{n\geqslant 1} a_n = +\infty$ (resp. $-\infty$). O serie care nu este convergentă se numeşte *divergentă*.

Observația 1. Am notat cu $\sum_{n\geq 1} a_n$ atît seria de termen general a_n cît și suma s a acestei serii în cazul în care $s := \lim_{n\to\infty} s_n$ există (finită sau infinită).

Observația 2. O serie $\sum_{n\geq 1} a_n$ este divergentă $\Leftrightarrow (s_n \to +\infty) \vee (s_n \to -\infty) \vee$ $\vee ((s_n)_{n\geq 1}$ nu are limită).

Exemple.

1. *Seria* $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{2^n}$ *este convergentă și are suma* 1.

Avem

$$s_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^n} \ (\forall)\ n \geq 1.$$

Cum $\frac{1}{2^n} \to 0$ $(n \to \infty)$, rezultă $s_n \to 1$, deci $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{2^n} = 1$.

2. *Seria* $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ *este divergentă și avem* $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} = \infty$.

Presupunem seria dată convergentă și fie s suma sa. Punem $s_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ $(n \geq 1)$. Evident avem

$$s_{2n} - s_n = \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n} > n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} \ (\forall)\ n \geq 1,$$

deci $s_{2n} > \frac{1}{2} + s_n (\forall)\ n \geq 1$, de unde prin trecere la limită, $n \to \infty$, obținem $s \geq \frac{1}{2} + s$, absurd, etc.

3. *Seria* $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ *este convergentă și are suma* ≤ 2.

Evident avem :

$$\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \ (\forall)\ n \geq 1,$$

deci

$$s_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} < 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k-1} - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} = 2 - \frac{1}{n} < 2 \ (\forall)\ n \geq 1$$

Așadar șirul $(s_n)_{n\geq 1}$ este strict crescător și majorat, deci convergent.

4. *Seria* $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ *este convergentă.*

Fie $s_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ $(n \geq 1)$ și $\varepsilon > 0$ fixat. Atunci $(\forall)\ n,\ p \geq 1$ avem :

$$|s_{n+p} - s_n| = |(-1)^{n+2}| \cdot \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{(-1)^{p-1}}{n+p}\right) < \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+p},$$

deci

$$|s_{n+p} - s_n| < \frac{2}{n+1} < \varepsilon,\ (\forall)\ n \geqslant n_\varepsilon := 1 + E\left(\frac{2}{\varepsilon}\right) \wedge p \geqslant 1.$$

Aşadar $(s_n)_{n\geqslant 1}$ este şir Cauchy, deci convergent etc.

5. *Seria* $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ este *divergentă şi avem* $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{\sqrt{n}} = +\infty$.

$$s_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} > \frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n} \to \infty\ (n \to \infty)\ \text{etc.}$$

6. *Seria* $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}$ *este divergentă şi avem* $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}} = +\infty$.

$$s_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k-1}} = \sum_{k=1}^{n} (\sqrt{k} - \sqrt{k-1}) = \sqrt{n} \to \infty\ (n \to \infty)\ \text{etc.}$$

7. *Seria* $\sum_{n\geqslant 1} (-1)^{n+1}$ *este divergentă.*

$s_n := \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} = 0$ (resp. 1), dacă n par (resp. impar), deci $(s_n)_{n\geqslant 1}$ nu are limită şi deci seria dată e divergentă.

8. *Seria* $1 - 1 + 1 + 1 - 1 + 1 + 1 + 1 - 1 + \ldots$ *este divergentă.* Şirul sumelor parţiale are limita $+\infty$.

3.1.3. Propoziţie. *Fie* $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ *o serie de numere reale. Atunci cond.* 1°—3° *sînt echivalente*:

1° $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ *convergentă (resp. divergentă, resp. are suma* $\pm\infty$);

2° $(\exists)\ N \geqslant 1$ *a.î.* $\sum_{n\geqslant N+1} a_n$ *convergentă (resp. divergentă, resp. are suma* $\pm\infty$);

3° $(\forall)\ N \geqslant 1$ *seria* $\sum_{n\geqslant N+1} a_n$ *convergentă (resp. divergentă, resp. are suma* $\pm\infty$).

Dem. 1° $\Leftrightarrow$ 2°. Fie $s_n := \sum_{i=1}^{n} a_i$, $\sigma_n := \sum_{i=1}^{n} a_{N+i}$ $(n \geqslant 1)$.

Evident avem $s_{n+N} = s_N + \sigma_n\ (\forall)\ n \geqslant 1$. Atunci $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ convergentă : $\Leftrightarrow (s_n)_{n\geqslant 1}$ convergent $\Leftrightarrow (s_{n+N})_{n\geqslant 1}$ convergent $\Leftrightarrow (\sigma_n)_{n\geqslant 1}$ convergent $\Leftrightarrow$ seria $\sum_{n\geqslant N+1} a_n$ convergentă etc.

3.1.4. Propoziţie. *Fie* $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ *o serie convergentă de numere reale. Atunci şirurile* $(a_n)_{n\geqslant 1}$ *şi* $(r_n)_{n\geqslant 1}$, *unde* $r_n := \sum_{i\geqslant n+1} a_i$, *sînt convergente la* 0, *deci sînt mărginite.*

Dem. Fie $s_n := \sum_{i=1}^{n} a_i\ (n \geqslant 1)$ *şi* a suma seriei date. Atunci

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (s_n - s_{n-1}) = a - a = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} r_n = \lim_{n\to\infty} (a - s_n) = a - a = 0$$

Corolar 1. *Fie* $\sum_{n\geq 1} a_n$ *o serie de numere reale. Dacă șirul* $(a_n)_{n\geq 1}$ *nu are limită sau are limită nenulă, atunci seria dată este divergentă.*

Observație. Fie $\sum_{n\geq 1} a_n$ o serie de numere reale. Dacă șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ converge la 0, nu rezultă numaidecît că seria dată este convergentă.

Contraexemplu. Seria $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ este divergentă și $\frac{1}{n} \to 0$ $(n \to \infty)$.

Exemple

1. *Seria* $\sum_{n\geq 1} \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^3}$ *este divergentă.*

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n} = \lim_{n\to\infty}\left(\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}\right)^{-1} = e^{-1} \neq 0$$

2. *Seria* $\sum_{n\geq 1} (-1)^n$ *este divergentă.*

Într-adevăr șirul $((-1)^n)_{n\geq 1}$ nu are limită.

3.1.5. Propoziție. *Seria* $\sum_{n\geq 0} a^n$, *cu* $a \in \mathbf{R}$, *este convergentă și are suma* $\frac{1}{1-a}$, *dacă* $|a| < 1$ *și divergentă* $|a| \geq 1$.

Dem. $s_n := \sum_{k=0}^{n-1} a^k = \frac{1}{1-a} - \frac{a^n}{1-a}$ $(\forall)$ $n \geq 1$, deci $\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{1}{1-a}$, dacă $|a| < 1$ și $(s_n)_{n\geq 1}$ nu are limită sau are limita $+\infty$, dacă $|a| \geq 1$.

3.1.6. Definiție. Seria $\sum_{n\geq 0} a^n$ cu $a \in \mathbf{R}$, se numește *seria geometrică*, de rație a,

Corolar 1. *Seria* $\sum_{n\geq 0} (-1)^n a^n$ *este convergentă și are suma* $\frac{1}{1+a}$, *dacă* $|a| < 1$ *și este divergentă dacă* $|a| \geq 1$.

3.1.7. Propoziție. *Fie* $\sum_{n\geq 1} a_n$ *și* $\sum_{n\geq 1} b_n$ *două serii convergente de numere reale care au suma a respectiv b și fie* $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$. *Atunci seria* $\sum_{n\geq 1} (\alpha a_n + \beta b_n)$ *este convergentă și are suma egală cu* $\alpha a + \beta b$.

Dem. Evident avem :

$$\sum_{i=1}^{n} (\alpha a_i + \beta b_i) = \alpha \sum_{i=1}^{n} a_i + \beta \sum_{i=1}^{n} b_i \; (n \geq 1),$$

de unde prin trecere la limită, $n \to \infty$, obținem :

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} (\alpha a_i + \beta b_i) = \alpha \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} a_i + \beta \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} b_i = \alpha a + \beta b,$$

deci seria $\sum_{n\geq 1} \alpha a_n + \beta b_n$ este convergentă și are suma $\alpha a + \beta b$.

Corolar 1. *Presupunem că seria* $\sum_{n\geq 1} (\alpha a_n + \beta b_n)$ *este convergentă pentru anumiți* $\alpha, \beta \in \mathbf{R}^*$. *Atunci* $\sum_{n\geq 1} a_n$ *este convergentă* $\Leftrightarrow$ $\sum_{n\geq 1} b_n$ *este convergentă.*

Observație. Dacă seria $\sum_{n\geq 1} (a_n + b_n)$ este convergentă, nu rezultă numaidecît că cel puțin una din seriile $\sum_{n\geq 1} a_n$ și $\sum_{n\geq 1} b_n$ este convergentă.

Contraexemplu. Seria $\sum_{n\geq 1}((-1)^n + (-1)^{n+1})$ este convergentă, în timp ce ambele serii $\sum_{n\geq 1}(-1)^n$ și $\sum_{n\geq 1}(-1)^{n+1}$ sînt divergente.

3.1.8. Propoziție. *Fie* $\sum_{n\geq 1} a_n$ *o serie convergentă de numere reale și a suma sa. Atunci* $|a| \leq \sum_{n\geq 1} |a_n|$.

Dem. Evident $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)_{n\geq 1}$ este un șir monoton crescător de numere nenegative, deci are limită și limita sa este egală cu $\sum_{n\geq 1} a_n$. Prin ipoteză avem $a = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} a_i$, deci $|a| = \lim_{n\to\infty} \left|\sum_{i=1}^{n} a_i\right|$. Cum avem $\left|\sum_{i=1}^{n} a_i\right| \leq \sum_{i=1}^{n} |a_i|$, $(\forall)\ n \geq 1$, prin trecere la limită obținem $|a| \leq \sum_{n\geq 1} |a_n|$.

3.1.9. Propoziție. *Fie* $\sum_{n\geq 1} a_n$ *o serie de numere reale nenegative. Atunci* $\sum_{n\geq 1} a_n$ *este convergentă* $\Leftrightarrow$ *șirul* $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)_{n\geq 1}$ *este majorat. In acest caz avem* $\sum_{n\geq 1} a_n = \sup_{n\geq 1} \sum_{i=1}^{n} a_i$.

Dem. Fie $s_n := \sum_{i=1}^{n} a_i (n \geq 1)$. Deoarece $a_n \geq 0$ $(\forall)$ $n \geq 1$, rezultă că $(s_n)_{n\geq 1}$ este monoton crescător. Atunci $\sum_{n\geq 1} a_n$ este convergentă $\Leftrightarrow$ șirul $(s_n)_{n\geq 1}$ este convergent $\Leftrightarrow$ șirul $(s_n)_{n\geq 1}$ este majorat. În acest caz avem $\lim_{n\to\infty} s_n = \sup_{n\geq 1} s_n$, deci $\sum_{n\geq 1} a_n = \sup_{n\geq 1} \sum_{i=1}^{n} a_i$.

Corolar 1. *Fie* $\sum_{n\geq 1} a_n$ *o serie de numere reale nenegative. Atunci* $\sum_{n\geq 1} a_n$ *este convergentă* $\Leftrightarrow \sum_{n\geq 1} a_n < +\infty$.

Observație. Sensul Corolarului 1 trebuie înțeles astfel. Deoarece $a_n \geq 0$, rezultă că seria $\sum_{n\geq 1} a_n$ are sumă, finită sau $+\infty$. Cum $\sum_{n\geq 1} a_n$ reprezintă și suma seriei, avem că seria $\sum_{n\geq 1} a_n$ este convergentă $\Leftrightarrow$ suma sa i.e. numărul $\sum_{n\geq 1} a_n$ este $< +\infty$.

3.1.10. Propoziție (Prop. de asociativitate). *Fie* $\sum_{n\geq 1} a_n$ (1) *o serie de numere reale și* $\sum_{k\geq 1}\left(\sum_{n_{k-1}<i\leq n_k} a_i\right)$ (2) *unde* $0 = n_0 < n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$ *Atunci avem*: 1° *Dacă seria* (1) *este convergentă, rezultă că seria* (2) *este convergentă*; 2° *Dacă seria* (2) *este convergentă și termenii care compun fiecare grupă* $(a_i)_{n_{k-1}<i\leq n_k}$ $(k \geq 1)$ *au același semn, rezultă că seria* (1) *este convergentă*; 3° *Dacă* $a_n \to 0$ $(n \to \infty)$, *seria* (2) *este convergentă și* $(\exists)\ p \geq 1$ *a.î. fiecare grupă* $(a_i)_{n_{k-1}<i\leq n_k}$ $(k \geq 1)$ *are cel mult p termeni, rezultă că seria* (1) *este convergentă*; 4° *In fiecare din cazurile* 1°—3° *cele două serii au aceeași sumă.*

Dem. 1° Punem $s_n := \sum_{i=1}^{n} a_i (n \geq 1)$ și $\sigma_k := \sum_{j=1}^{k}\left(\sum_{n_{j-1}<i\leq n_j} a_i\right)$ $(k \geq 1)$. Evident avem $\sigma_k = s_{n_k}$ $(\forall)\ k \geq 1$, deci $(\sigma_k)_{k\geq 1}$ este un subșir al șirului $(s_n)_{n\geq 1}$. Atunci $\sum_{n\geq 1} a_n$ este convergentă : $\Leftrightarrow$ $(s_n)_{n\geq 1}$ este convergent, deci (P.2.3.9.)

$(\sigma_k)_{k\geqslant 1}$ este convergent $\Leftrightarrow$ seria (2) este convergentă. Evident $\lim\limits_{k\to\infty}\sigma_k=\lim\limits_{n\to\infty}s_n$, deci cele două serii au aceeași sumă.

2° Presupunem seria (2) convergentă și fie σ suma sa. Fixăm $\varepsilon>0$; deci $(\exists)\ k_\varepsilon\geqslant 1$ cu $\sigma-\varepsilon<\sigma_k<\sigma+\varepsilon$ $(\forall)\ k\geqslant k_\varepsilon$. Fie mai departe $m>n_{k_\varepsilon}$ fixat și $k\geqslant k_\varepsilon$ cu $n_k<m<n_{k+1}$. Evident putem scrie

$$(a_1+\ldots+a_{n_1})+\ldots+(a_{n_k+1}+\ldots+a_m+\ldots+a_{n_{k+1}})+\ldots, \qquad (1)$$

deci avem $s_{n_k}\leqslant s_m\leqslant s_{n_k+1}$ (resp. $s_{n_k}\geqslant s_m\geqslant s_{n_{k+1}}$) după cum termenii din grupa $(a_i)_{n_k<i\leqslant n_{k+1}}$ sînt $\geqslant 0$ (resp. $\leqslant 0$). Cum însă

$$\sigma-\varepsilon<\sigma_k=s_{n_k}<\sigma+\varepsilon,\quad \sigma-\varepsilon<\sigma_{k+1}=s_{n_{k+1}}<\sigma+\varepsilon,$$

rezultă imediat că $\sigma-\varepsilon<s_n<\sigma+\varepsilon$.

Așadar $|\sigma-s_m|<\varepsilon\,(\forall)\ m>n_{k_\varepsilon}$, deci $s_m\to\sigma\ (m\to\infty)$, prin urmare seria (2) este convergentă și are suma σ.

3° Plecăm de la relația (1). Deoarece $a_n\to 0$, putem presupune că $|a_n|\leqslant \dfrac{\varepsilon}{p}$ $(\forall)\ n\geqslant n_{k_\varepsilon}$. Evident putem scrie

$$s_n=s_{n_k}+\sum_{n_k<i\leqslant m}a_i=\sigma_k+\sum_{n_k<i\leqslant m}a_i,$$

deci

$$|\sigma-s_m|\leqslant|\sigma-\sigma_k|+\sum_{n_k<i\leqslant m}|a_i|<\varepsilon+p\cdot\frac{\varepsilon}{p}=2\varepsilon.$$

Prin urmare seria (1) este convergentă și are suma σ.

4° Rezultă din raționamentele făcute mai sus.

Corolar 1. *Fie* $a_n\geqslant 0$ $(\forall)\ n\geqslant 1$. *Atunci seria* $\sum\limits_{n\geqslant 1}a_n$ *este convergentă* $\Leftrightarrow$ $(\exists)/(\forall)$ $0=n_0<n_1<n_2<n_3<\ldots$ *a.î. wseria* $\sum\limits_{k\geqslant 1}\ (\sum\limits_{n_{k-1}<i\leqslant n_k}a_i)$ *este convergentă. In acest caz cele două serii au aceeași sumă.*

Observație. Dacă seria (2) din P.3.1.10. este convergentă și are termenii arbitrari, nu rezultă numaidecît că seria (1) este convergentă.

Contraexemplu. Seria $(1+(-1))+(1+(-1))+\ldots$ este convergentă în timp ce seria $1+(-1)+1+(-1)+\ldots$ este divergentă.

3.1.11. Teoremă (C a u c h y). *Fie* $\sum\limits_{n\geqslant 1}a_n$ *o serie de numere reale. Atunci* $\sum\limits_{n\geqslant 1}a_n$ *este convergentă* $\Leftrightarrow$ $(\forall)\ \varepsilon>0$ $(\exists)\ n_\varepsilon\geqslant 1$ *a.î.* $\left|\sum\limits_{i=n+1}^{n+p}a_i\right|\leqslant\varepsilon$, $(\forall)\ n\geqslant n_\varepsilon\wedge p\geqslant 1$.

Dem. Fie $s_n:=\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\ (n\geqslant 1)$. Atunci $\sum\limits_{n\geqslant 1}a_n$ convergentă $:\Leftrightarrow$ $(s_n)_{n\geqslant 1}$ este convergent $\overset{2.3.21.(6^\circ)}{\Leftrightarrow}$ $(s_n)_{n\geqslant 1}$ este șir Cauchy : $\Leftrightarrow$ $(\forall)\ \varepsilon>0$ $(\exists)\ n_\varepsilon\geqslant 1$ a.î. $|s_{n+p}-s_n|\leqslant\varepsilon$, $(\forall)\ n\geqslant n_\varepsilon\wedge p\geqslant 1$. Cum însă $s_{n+p}-s_n=\sum\limits_{i=n+1}^{n+p}a_i$, $(\forall)\ n\geqslant 1\wedge p\geqslant 1$, avem :

$$\sum_{n\geqslant 1}a_n\ \text{conv.}\Leftrightarrow(\forall)\ \varepsilon>0\ (\exists)\ n_\varepsilon\geqslant 1\ \text{a.î.}\ \left|\sum_{i=n+1}^{n+p}a_i\right|\leqslant\varepsilon,\ (\forall)\ n\geqslant n_\varepsilon\wedge p\geqslant 1.$$

Corolar 1. *O serie absolut convergentă de numere reale, este convergentă.*
Dem. Fie $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ absolut convergentă și $\varepsilon > 0$ fixat. Atunci $(\exists)\ n_\varepsilon \geqslant 1$ a.î.

$$\sum_{i=n+1}^{n+p} |a_i| \leqslant \varepsilon,\ (\forall)\ n \geqslant n_\varepsilon \wedge p \geqslant 1,$$

deci

$$\left|\sum_{i=n+1}^{n+p} a_i\right| \leqslant \sum_{i=n+1}^{n+p} |a_i| \leqslant \varepsilon,\ (\forall)\ n_\varepsilon \wedge p \geqslant 1$$

și deci (T.3.1.11.) $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ este convergentă.

Observația 1. Condiția din dreapta T.3.1.11. se numește „condiția Cauchy pentru serii".

Observația 2. Reciproca Cor. 1 nu este numaidecît adevărată.

Contraexemplu. Seria $\sum_{n\geqslant 1} (-1)^n \frac{1}{n}$ este convergentă și nu este absolut convergentă (T.3.2.6.; T.3.2.5. Cor. 1).

3.2. Criterii de convergență pentru serii

3.2.1. Definiție. Fie $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ și $\sum_{n\geqslant 1} b_n$ două serii de numere reale nenegative. Vom spuue că seria $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ este *majorată* de seria $\sum_{n\geqslant 1} b_n$ și vom scrie $\sum_{n\geqslant 1} a_n \ll \sum_{n\geqslant 1} b_n$ dacă $(\exists)\ M \in \mathbf{R}_+ \wedge n_0 \in \mathbf{N}$ a.î. $a_n \leqslant M\, b_n$, $(\forall)\ n \geqslant n_0$. Dacă $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ este majorată de $\sum_{n\geqslant 1} b_n$ și $\sum_{n\geqslant 1} b_n$ este majorată de $\sum_{n\geqslant 1} a_n$, vom spune că cele două serii sînt *echivalente* și vom scrie $\sum_{n\geqslant 1} a_n \sim \sum_{n\geqslant 1} b_n$. Vom spune că cele două serii au *aceeași natură*, dacă amîndouă sînt convergente sau amîndouă sînt divergente.

Relația de echivalență astfel introdusă este reflexivă, antisimetrică și tranzitivă. Să observăm că

$$\sum_{n\geqslant 1} a_n \sim \sum_{k\geqslant n} a_k,\ (\forall)\ n \geqslant 1\ ;\quad \sum_{n\geqslant 1} a_n \sim \sum_{n\geqslant 1} \lambda a_n,\ (\forall)\ \lambda \in \mathbf{R}^*.$$

3.2.2. Propoziție (I Criteriu de comparație). *Fie* $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ *și* $\sum_{n\geqslant 1} b_n$ *două serii de numere reale nenegative a.î.* $\sum_{n\geqslant 1} a_n \ll \sum_{n\geqslant 1} b_n$. *Atunci au loc afirmațiile:*

1° $\sum_{n\geqslant 1} b_n$ *convergentă* $\Rightarrow \sum_{n\geqslant 1} a_n$ *convergentă*;

2° $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ *divergentă* $\Rightarrow \sum_{n\geqslant 1} b_n$ *divergentă.*

Dem. 1° Cf. ipotezei $(\exists)\ M \in \mathbf{R}_+ \wedge n_0 \in \mathbf{N}$ a.î. $a_n \leqslant M\ b_n$, $(\forall)\ n \geqslant n_0$. Cum $\sum_{n\geqslant 1} b_n$ este convergentă, avem (P.3.1.9.) $\sup_{n\geqslant 1} \sum_{i=1}^{n} b_i < +\infty$, deci

$$\sup_{n\geqslant 1} \sum_{i=1}^{n} a_i \leqslant M \sup_{n\geqslant 1} \sum_{i=1}^{n} b_i < +\infty$$

și deci (P.3.1.9.) $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ este convergentă.

$1° \Leftrightarrow 2°$. Într-adevăr, dacă scriem afirmația 1° sub forma : $P \Rightarrow Q$, atunci afirmația 2° se scrie : non $Q \Rightarrow$ non P, care este echivalentă cu prima.

Corolar 1. *Fie* $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ *și* $\sum_{n\geqslant 1} b_n$ *două serii de numere reale nenegative. Dacă* $\sum_{n\geqslant 1} a_n \sim \sum_{n\geqslant 1} b_n$, *atunci cele două serii au aceeași natură.*

Corolar 2. *Fie* $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ *și* $\sum_{n\geqslant 1} b_n$ *două serii de numere reale a.î.* $\sum_{n\geqslant 1} |a_n| \ll \sum_{n\geqslant 1} |b_n|$. *Atunci dacă seria* $\sum_{n\geqslant 1} b_n$ *este absolut convergentă, rezultă că seria* $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ *este absolut convergentă.*

Exemple.

1. *Seria* $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ *este divergentă.*

Avem $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n} \ll \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ și $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ este divergentă.

2. *Seria* $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^3}$ *este convergentă.*

Avem $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^3} \ll \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ și $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ convergentă.

3.2.3. Propoziție (A l II-lea c r i t e r i u d e c o m p a r a ț i e). *Fie* $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ *și* $\sum_{n\geqslant 1} b_n$ *două serii cu termeni strict pozitivi. Atunci au loc afirmațiile :*

$1° \ \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{a_n}{b_n} < +\infty \Rightarrow \sum_{n\geqslant 1} a_n \ll \sum_{n\geqslant 1} b_n$;

$2° \ \underline{\lim_{n\to\infty}} \frac{a_n}{b_n} > 0 \Rightarrow \sum_{n\geqslant 1} b_n \ll \sum_{n\geqslant 1} a_n$;

$3° \ 0 < \underline{\lim_{n\to\infty}} \frac{a_n}{b_n} \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{a_n}{b_n} < +\infty \Rightarrow \sum_{n\geqslant 1} a_n \sim \sum_{n\geqslant 1} b_n$

Dem. $1°$ Fie $l := \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{a_n}{b_n} < +\infty$ și $l < c < +\infty$ fixat. Atunci (P.2.5.6.) $(\exists)\ n_0 \geqslant 1$ a.î. $\frac{a_n}{b_n} \leqslant c$, $(\forall)\ n \geqslant n_0$, deci $a_n \leqslant l\, b_n$, $(\forall)\ n \geqslant n_0$ și deci $\sum_{n\geqslant 1} a_n \ll \sum_{n\geqslant 1} b_n$.

$2°$ Fie $l := \underline{\lim_{n\to\infty}} \frac{a_n}{b_n} > 0$ și $0 < c < l$ fixat. Atunci (P.2.5.6.) $(\exists)\ n_0 \geqslant 1$ a.î. $\frac{a_n}{b_n} \geqslant c$, $(\forall)\ n \geqslant n_0$, deci $b_n \leqslant \frac{1}{c}\, a_n$, $(\forall)\ n \geqslant n_0$ etc.

$3°$ rezultă din $1°$ și $2°$.

Corolar 1. *In același cadru, presupunem că* $l = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$ *există. Atunci au loc afirmațiile* : $1°\ l < \infty \Rightarrow \sum_{n\geqslant 1} a_n \ll \sum_{n\geqslant 1} b_n$; $2°\ l > 0 \Rightarrow \sum_{n\geqslant 1} b_n \ll \sum_{1\geqslant 1} a_n$;

$3°\ 0 < l < +\infty \Rightarrow \sum_{n\geqslant 1} a_n \sim \sum_{n\geqslant 1} b_n$; $4°\ l = 0$ *și* $\sum_{n\geqslant 1} b_n$ *convergentă* $\Rightarrow \sum_{n\geqslant 1} a_n$ *convergentă* ; $5°\ l = \infty$ *și* $\sum_{n\geqslant 1} b_n$ *divergentă* $\Rightarrow \sum_{n\geqslant 1} a_n$ *convergentă.*

Exemple.

1. *Seria* $\sum_{n\geqslant 1} \frac{n}{n^2+1}$ *este divergentă.*

Fie $a_n := \dfrac{n}{n^2+1}$ și $b_n := \dfrac{1}{n}$ $(n \geqslant 1)$. Atunci $\sum\limits_{n\geqslant 1} b_n$ este divergentă; $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 1$, deci $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n \sim \sum\limits_{n\geqslant 1} b_n$.

2. *Seria* $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n!}$ *este divergentă.*

Fie $a_n := \dfrac{1}{n!}$ și $b_n := \dfrac{1}{n(n-1)}$ $(n > 1)$. Atunci $\sum\limits_{n\geqslant 1} b_n \sim \sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^2}$, deci $\sum\limits_{n\geqslant 1} b_n$ este convergentă. Cum $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{(n-2)!} = 0$, rezultă că $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n \sim \sum\limits_{n\geqslant 1} b_n$ etc.

3.2.4. Propoziție (A l III-lea c r i t e r i u d e c o m p a r a ț i e). *Fie* $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ *și* $\sum\limits_{n\geqslant 1} b_n$ *două serii de numere reale nenegative. Dacă* $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \dfrac{b_{n+1}}{b_n}$, $(\forall)\ n \geqslant n_0$, *atunci* $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n \leqslant \sum\limits_{n\geqslant 1} b_n$.

Dem. Din ipoteză rezultă $\dfrac{a_{n+1}}{b_{n+1}} \leqslant \dfrac{a_n}{b_n}$, $(\forall)\ n \geqslant n_0$, deci

$$\frac{a_{n+p}}{b_{n+p}} \leqslant \frac{a_{n+p-1}}{b_{n+p-1}} \leqslant \ldots \leqslant \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} \leqslant \frac{a_n}{b_n},\ (\forall)\ n \geqslant n_0 \wedge p \geqslant 1$$

și deci

$$\frac{a_{n+p}}{b_{n+p}} \leqslant M := \frac{a_{n_0}}{b_{n_0}},\ (\forall)\ n \geqslant n_0 \wedge p \geqslant 1. \tag{1}$$

Relația (1) se transcrie : $a_n \leqslant M\, b_n$, $(\forall)\ n \geqslant n_0$, deci $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n \leqslant \sum\limits_{n\geqslant 1} b_n$.

Corolar 1. *Fie* $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ *o serie cu termeni strict pozitivi. Dacă* $(\exists)\ 0 < \rho < 1$ *(resp.* $\rho \geqslant 1$*) a.î.* $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \rho$ *(resp.* $\geqslant \rho$*)* $(\forall)\ n \geqslant n_0$, *atunci seria* $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ *este convergentă (resp. divergentă).*

Dem. Aplicăm P.3.2.4. pentru $a_n = \rho^n$ (resp. $b_n = \rho^n$) $(n \geqslant 1)$.

3.2.5. Teoremă (C r i t e r i u l d e c o n d e n s a r e a l l u i C a u c h y). *Fie* $(a_n)_{n\geqslant 1}$ *un șir monoton descrescător de numere reale pozitive. Atunci seriile* $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ *și* $\sum\limits_{i\geqslant 1} 2^i a_{2^i}$ *au aceeași natură.*

Dem. Din P.3.1.10. avem că seria $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ are aceeași natură cu seria :

$$\Big(\sum_{2^0\leqslant i<2^1} a_i\Big) + \Big(\sum_{2^1\leqslant i<2^2} a_i\Big) + \ldots + \Big(\sum_{2^m\leqslant i<2^{m+1}} a_i\Big) + \ldots$$

Deoarece suma $b_m := \sum\limits_{2^m\leqslant i<2^{m+1}} a_i$ este formată din $2^{m+1} - 2^m$ termeni i.e. din 2^m termeni și deoarece $a_i \geqslant a_{i+1}$, $(\forall)\ i \geqslant 1$, rezultă

$$\frac{1}{2}\,(2^{m+1}\, a_{2^{m+1}}) = 2^m\, a_{2^{m+1}} \leqslant b_m \leqslant 2^m\, a_{2^m},\ (\forall) m \geqslant 0.$$

Aşadar avem :

$$\sum_{m\geqslant 0} 2^{m+1}\, a_{2m+1} \leqslant \sum_{m\geqslant 0} a_m \leqslant \sum_{m\geqslant 0} 2^m\, a_{2m},$$

deci seriile $\sum_{n\geqslant 0} b_m$ şi $\sum_{n\geqslant 0} 2^m\, a_{2m}$ au aceeaşi natură, prin urmare seriile $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ şi $\sum_{m\geqslant 0} 2^m\, a_{2m}$ au aceeaşi natură.

Corolar 1. *Seria* $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ $(\alpha \in \mathbf{R})$, *numită seria armonică generalizată, este convergentă, dacă* $\alpha > 1$ *şi divergentă dacă* $\alpha \leqslant 1$.

Dem. Fie $a_n := \frac{1}{n^\alpha}$ $(n \geqslant 1)$; atunci $2^m a_{2m} = 2^m \cdot \frac{1}{2^{m\alpha}} = \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^n$, deci (T.3.2.5.) seria $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ are aceeaşi natură cu seria $\sum_{m\geqslant 0} \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^n$. Or, seria $\sum_{m\geqslant 0} \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^m$ este convergentă $\Leftrightarrow \frac{1}{2^{\alpha-1}} < 1 \Leftrightarrow 2^{\alpha-1} > 1 \Leftrightarrow \alpha > 1$.

Prin urmare seria $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ este convergentă $\Leftrightarrow \alpha > 1$.

Corolar 2. *Fie* $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ *o serie cu termeni pozitivi. Atunci :*

1° *Dacă* $(\exists)\ \alpha > 1$ *a.î.* $\overline{\lim_{n\to\infty}}\, n^\alpha a_n < +\infty \Rightarrow \sum_{n\geqslant 1} a_n < +\infty$;

2° *Dacă* $(\exists)\ \alpha \leqslant 1$ *a.î.* $\underline{\lim_{n\to\infty}}\, n^\alpha a_n > 0 \Rightarrow \sum_{n\geqslant 1} a_n = +\infty$.

Dem. Dacă $\overline{\lim_{n\to\infty}}\, n a_n < +\infty$ (resp. $\underline{\lim_{n\to\infty}}\, n a_n > 0$), rezultă (P.3.2.3.) că $\sum_{n\geqslant 1} a_n \leqslant \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ $\left(\text{resp. } \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha} \leqslant \sum_{n\geqslant 1} a_n\right)$. Aplicăm apoi Cor. 1.

Corolar 3. *Fie* $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ *o serie cu termeni pozitivi. Atunci*

1° *Dacă* $(\exists)\ \alpha > 1$ *a.î.* $\sup_{n\geqslant 1} n^\alpha a_n < +\infty \Rightarrow \sum_{n\geqslant 1} a_n < +\infty$;

2° *Dacă* $(\exists)\ \alpha \leqslant 1$ *a.î.* $\inf_{n\geqslant 1} n^\alpha a_n > 0 \Rightarrow \sum_{n\geqslant 1} a_n = +\infty$.

Dem. Ţinem seama că $\inf_{n\geqslant 1}(\cdot) \leqslant \underline{\lim_{n\to\infty}}(\cdot) \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}}(\cdot) \leqslant \sup_{n\geqslant 1}(\cdot)$.

3.2.6. Teoremă (Criteriul lui Leibniz) *Fie* $(a_n)_{n\geqslant 1}$ *un şir monoton de numere reale care converge la* 0. *Atunci seria* $\sum_{n\geqslant 1} (-1)^{n+1} a_n$ *este convergentă.*

Dem. Presupunem $(a_n)_{n\geqslant 1}$ monoton descrescător, deci $a_n \geqslant 0$, $(\forall)\ n \geqslant 1$ şi fie $s_n := \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_k$ $(n \geqslant 1)$. Atunci avem :

(i) $s_2 \leqslant s_4 \leqslant \ldots \leqslant s_{2n} \leqslant \ldots$, $s_1 \geqslant s_3 \geqslant \ldots \geqslant s_{2n+1} \geqslant \ldots$;

(ii) $s_{2n} \leqslant s_{2n+1}$ $(\forall)\ n \geqslant 1$; (iii) $s_{2n+1} - s_{2n} = a_{2n+1} \to 0$ $(n \to \infty)$. Din T.2.3.19. (3°) rezultă că şirurile $(s_{2n})_{n\geqslant 1}$ şi $(s_{2n+1})_{n\geqslant 1}$ sînt convergente şi au aceeaşi limită, deci şirul $(s_n)_{n\geqslant 1}$ este convergent, prin urmare seria $\sum_{n\geqslant 1} (-1)^{n+1} a_n$ este convergentă.

Corolar 1. *In acelaşi cadru : suma s a seriei* $\sum_{n\geqslant 1} (-1)^{n+1} a_n$ *cu* $(a_n)_{n\geqslant 1}$ *monoton descrescător, poate fi aproximată de suma parţială* s_n *cu o eroare mai mică decît*

modulul primului termen neglijat; prin lipsă, dacă n este par și prin adaos, dacă n este impar.

Dem. Deoarece $s_{2n} \leqslant s \leqslant s_{2n-1}$, $(\forall)\ n \geqslant 1$, avem $s - s_{2n} \geqslant 0$ și $s_{2n-1} - s \geqslant 0$. Mai departe, ținînd seama că $(a_n)_{n\geqslant 1}$ este monoton descrescător rezultă,

$$s - s_{2n} = a_{2n+1} - (a_{2n+2} - a_{2n+3}) - (a_{2n+4} - a_{2n+5}) - \ldots \leqslant a_{2n+1}$$

și analog $s_{2n-1} - s \leqslant a_{2n}$. Așadar

$$0 \leqslant s - s_{2n} \leqslant a_{2n+1}, \quad 0 \leqslant s_{2n-1} - s \leqslant a_{2n}\ (\forall)\ n \geqslant 1.$$

Exemple.

Seriile $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n}$, $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, $\sum\limits_{n\geqslant 1} (-1)^n \sin\frac{1}{n}$ și în general $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ $(\alpha \in \mathbf{R}_+^*)$ sînt convergente. Seria $\sum\limits_{n\geqslant 1} (-1)^n a^n$ este convergentă, $(\forall)\ |a| < 1$.

3.2.7. Teoremă (Criteriul raportului al lui D'Alembert) *Fie $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ o serie de numere reale strict pozitive, $l^* := \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ și $l_* := \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n}$. Atunci*

1° *Dacă $l^* < 1$, seria $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ este convergentă;*

2° *Dacă $l_* > 1$, seria $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ este divergentă;*

3° *Dacă $l_* \leqslant 1$, sau $l^* \geqslant 1$, natura seriei $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ poate fi oricum.*

Dem. 1° Fie $l^* < 1$ și $0 < \varepsilon < 1 - l^*$ fixat, deci $\rho := l^* + \varepsilon < 1$. Cf. P.2.5.6. $(\exists)\ N \geqslant 1$ a.î. $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant l^* + \varepsilon = \rho$, $(\forall)\ n \geqslant N$. Atunci $a_{n+1} \leqslant \rho a_n$, $(\forall)\ n \geqslant N$, de unde rezultă imediat că $a_{N+p} \leqslant \rho^p a_N$, $(\forall)\ p \geqslant 1$. Cum seria $\sum\limits_{p\geqslant 1} \rho^p$ este convergentă (P.3.1.5.), rezultă (P.3.2.2.) că seria $\sum\limits_{p\geqslant 1} a_{N+p}$ este convergentă, deci (P.3.1.3.) seria $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ este convergentă.

2° Fie acum $l_* > 1$ și $0 < \varepsilon < l_* - 1$ fixat, deci $l_* - \varepsilon > 1$. Cf. P.2.5.6. $(\exists)\ N \geqslant 1$ a.î. $\frac{a_{n+1}}{a_n} > l_* - \varepsilon > 1$, $(\forall)\ n \geqslant N$. Atunci $a_{n+1} \geqslant a_n (\forall)\ n \geqslant N$, de unde rezultă imediat că $a_{N+p} \geqslant a_N > 0$, $(\forall)\ n \geqslant N$. Așadar șirul $(a_n)_{n\geqslant 1}$ nu converge la 0, deci (P.3.1.4.). seria $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ este divergentă.

3° Considerăm seria $1, \frac{1}{2^\alpha}, \frac{2}{2^\alpha}, \frac{1}{3^\alpha}, \frac{2}{3^\alpha}, \ldots$, $(\alpha \in \mathbf{R})$. Atunci această serie este convergentă pentru $\alpha > 1$ și divergentă pentru $\alpha \leqslant 1$, în timp ce avem $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2} < 1$, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 2 > 1$, $(\forall)\ \alpha \in \mathbf{R}$.

Corolar 1. *Fie $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ o serie de numere reale nenule, $l^* := \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ și $l_* = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$. Atunci*

1° *Dacă $l^* < 1$, seria $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ este absolut convergentă;*

2° *Dacă* $l_* > 1$, *seria* $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ *este divergentă*;

3° *Dacă* $l_* \leqslant 1$ *sau* $l^* \geqslant 1$, *natura seriei* $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ *poate fi oricum.*

Dem. 1° și 3° sînt evidente. 2° Dacă $l_* > 1$, atunci $a_n \not\to 0$, deci (P.3.1.4.) seria $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ este divergentă.

Corolar 2. *Fie* $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ *o serie de numere reale nenule a.î.* $l = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ *există, finită sau infinită. Atunci*:

1° *Dacă* $l < 1$, *seria* $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ *este absolut convergentă*;

2° *Dacă* $l > 1$, *seria* $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ *este divergentă*;

3° *Dacă* $l = 1$, *natura seriei* $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ *poate fi oricum.*

Corolar 3. *Fie* $(a_n)_{n\geqslant 1}$ *un șir de numere reale nenule. Atunci* 1° *Dacă* $\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$; 2° *Dacă* $\underline{\lim_{n\to\infty}} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} |a_n| = \infty$.

Dem. 1° Din Cor. 1 rezultă că seria $\sum_{n\geqslant 1} |a_n|$ este convergentă, deci (P.3.1.4.) $|a_n| \to 0$ $(n \to \infty)$.

2° Aplicăm 1° pentru șirul $\left(\frac{1}{|a_n|}\right)_{n\geqslant 1}$.

Exemple.

1. *Seria* $\sum_{n\geqslant 1} \frac{n^n}{n!}$ *este divergentă.*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \to e > 1$$

2. *Seria* $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n!}$ *este convergentă*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{1} = \frac{1}{n+1} \to 0 < 1$$

3. *Seria* $\sum_{n\geqslant 1} \frac{n}{2^n}$ *este convergentă*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{2^{n+1}} \frac{2^n}{n} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right) \to \frac{1}{2} < 1$$

3.2.8. Teoremă (Criteriul radical al lui Cauchy). *Fie* $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ *o serie de numere reale nenegative și* $l = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n}$. *Atunci*:

1° *Dacă* $l < 1$, *seria* $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ *este convergentă*;

2° *Dacă* $l > 1$, *seria* $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ *este divergentă*;

3° *Dacă* $l = 1$, *natura seriei* $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ *poate fi oricum.*

Dem. 1° Fie $l < 1$ și $0 < \varepsilon < 1 - l$ fixat, deci $\rho := l + \varepsilon < 1$. Atunci (P.2.5.6.) $(\exists)\ N \geqslant 1$ a.î. $\sqrt[n]{a_n} < l + \varepsilon = \rho$, $(\forall)\ n \geqslant N$, deci $a_n \leqslant \rho^n$ $(\forall)\ n \geqslant N$ și deci $\sum_{n\geqslant 1} a_n \ll \sum_{n\geqslant 1} \rho^n$. Cum seria $\sum_{n\geqslant 1} \rho^n$ este convergentă (P.3.1.5.), rezultă (P.3.2.2.) că $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ este convergentă.

2° Fie $l > 1$ și $0 < \varepsilon < l - 1$ fixat. Atunci (P.2.5.6.):

$$(\exists)\ n_1 < n_2 < n_3 < \ldots \text{ a.î. } \sqrt[n_k]{a_{n_k}} \geqslant l - \varepsilon > 1,\ (\forall)\ k \geqslant 1,$$

deci $a_{n_k} \geqslant 1$, $(\forall)\ k \geqslant 1$ și deci $(a_n)_{n\geqslant 1}$ nu converge la 0. Din P.3.1.4. rezultă că seria $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ este divergentă.

3° Considerăm seria $\sum_{n\geqslant 1} a_n$, unde $a_n = \frac{1}{n^\alpha}$ $(\alpha \in \mathbf{R})$. Atunci $\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(\sqrt[n]{n})^\alpha} = 1$, iar seria dată este convergentă pentru $\alpha > 1$ și divergentă pentru $\alpha \leqslant 1$.

Corolar 1. *Fie* $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ *o serie de numere reale și* $l = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}$. *Atunci*

1° *Dacă* $l < 1$, *atunci* $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ *este absolut convergentă*;

2° *Dacă* $l > 1$, *seria* $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ *este divergentă*;

3° *Dacă* $l = 1$, *natura seriei* $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ *poate fi oricum.*

Dem. 1° și 3° sînt evidente. 2° Dacă $l > 0$, atunci $|a_n| \not\to 0$, deci (P.3.1.4.) seria $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ este divergentă.

Corolar 2. *Fie* $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ *o serie de numere reale a.î.* $l = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ *există finită sau infinită. Atunci au loc proprietățile* 1°—3° *din* Cor. 1.

Corolar 3. *Fie* $(a_n)_{n\geqslant 1}$ *un șir de numere reale. Dacă* $\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$, *atunci* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Dem. Din Cor. 1 rezultă că $\sum_{n\geqslant 1} |a_n|$ este convergentă, deci (P.3.1.4.) $|a_n| \to 0$ $(n \to \infty)$ etc

Exemple.

1. *Seria* $\sum_{n\geqslant 1} \frac{n^\alpha}{2^n}$ *este convergentă,* $(\forall)\ \alpha \in \mathbf{R}_+$.

Într-adevăr, $\sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{2}(\sqrt[n]{n})^\alpha \to \frac{1}{2} < 1$.

2. *Seria* $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{2}\right)^{n^2}}$ *este convergentă.*

Într-adevăr, $\sqrt[n]{a_n} = \frac{\sqrt[n]{n}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \to \frac{1}{e} < 1$.

3.2.9. Teoremă (Criteriul Raabe — Duhamel). *Fie* $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ *o serie de numere reale pozitive,* $l_* = \varliminf_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right)$ *şi* $l^* = \varlimsup_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right)$. *Atunci*

1° *Dacă* $l_* > 1$ *seria* $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ *este convergentă;*

2° *Dacă* $l^* < 1$, *seria* $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ *este divergentă;*

3° *Dacă* $l_* \leqslant 1$ *sau* $l^* \geqslant 1$, *natura seriei* $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ *poate fi oricum.*

Dem. 1° Fie $l_* > 1$ şi $0 < \varepsilon < l_* - 1$ fixat, deci $1 + \varepsilon < l_*$. Atunci (P.2.5.6.) $(\exists)\ N \geqslant 1$ a.î.

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \geqslant 1 + \varepsilon,\ (\forall)\ \ n \geqslant N,$$

deci

$$na_n - (n+1)\, a_{n+1} \geqslant \varepsilon a_{n+1},\ (\forall)\ \ n \geqslant N \tag{1}$$

şi deci $(\forall)\ n \geqslant N \wedge p \geqslant 1$ avem :

$$\begin{aligned} &na_n - (n+1)\, a_{n+1} \geqslant \varepsilon a_{n+1} \\ &(n+1)\, a_{n+1} - (n+2)\, a_{n+2} \geqslant \varepsilon a_{n+2} \\ &\vdots \\ &(n+p-1)\, a_{n+p-1} - (n+p)\, a_{n+p} \geqslant \varepsilon a_{n+p}, \end{aligned}$$

de unde, prin adunare, se obţine relaţia :

$$na_n - (n+p)\, a_{n+p} \geqslant \varepsilon(a_{n+1} + \ldots + a_{n+p}),$$

prin urmare

$$\sum_{k\geqslant 1} a_{N+k} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{p} a_{N+k} \leqslant \frac{1}{\varepsilon} N a_N < +\infty,$$

de unde deducem P.3.1.9. Cor.1 şi P.3.1.3. că seria $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ este convergentă.

2° Fie $l^* < 1$ şi $0 < \varepsilon < 1 - l^*$ fixat, deci $l^* + \varepsilon < 1$. Atunci (P.2.5.6) $(\exists)\ N \geqslant 1$ a.î.

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \leqslant l^* + \varepsilon < 1,\ \ (\forall)\ n \geqslant N,$$

deci

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant \frac{n}{n+1} = \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}},\ \ (\forall)\ n \geqslant N.$$

Atunci (P.3.2.4.) $\sum_{n\geqslant 1} a_n \geqslant \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$, deci (T.3.2.5. Cor. 1) $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ este divergentă.

3° Se consideră seria $\sum_{n\geqslant 1} a_n$, cu $a_n = \frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha \in \{1, 2\}$. Atunci $\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = 1$ (resp. 2), dacă $\alpha = 1$ (resp. $\alpha = 2$) și seria $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ este divergentă, dacă $\alpha = 1$ (resp. convergentă, dacă $\alpha = 2$).

Corolar 1. *Fie* $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ *o serie de numere reale nenule. Dacă* $\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} - 1\right) > 0$, *atunci* $\sum_{n\geqslant 1} |a_n| < +\infty$.

Corolar 2. *Fie* $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ *o serie de numere reale pozitive a.î.* $l = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right)$ *există, finită sau infinită. Dacă* $l > 1$ *(resp.* $l < 1$*), atunci seria* $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ *este convergentă (resp. divergentă).*

Corolar 3. *Fie* $(a_n)_{n\geqslant 1}$ *un șir de numere reale nenule. Dacă* $\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) > 1$, *atunci* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Dem. Din Cor. 1 avem $\sum_{n\geqslant 1} |a_n| < +\infty$, deci $|a_n| \to 0$ etc.

3.2.10. Propoziție (Identitatea lui Abel). *Fie* $(a_n)_{n\geqslant 1}$ *și* $(b_n)_{n\geqslant 1}$ *două șiruri de numere reale. Atunci* $(\forall)\ n \geqslant 1 \wedge p \geqslant 1$ *avem :*

$$\sum_{i=n}^{n+p} a_i(b_i - b_{i-1}) = \sum_{i=n}^{n+p-1} (a_i - a_{i-1})\, b_i - a_n b_{n-1} + a_{n+p} b_{n+p}$$

Dem. Evident avem :

$$\sum_{i=n}^{n+p} a_i(b_i - b_{i-1}) = a_n(b_n - b_{n-1}) + a_{n+1}(b_{n+1} - b_n) + \ldots + a_{n+p}(b_{n+p} - b_{n+p-1}) =$$

$$= [(a_n - a_{n+1})\, b_n + (a_{n+1} - a_{n+2})\, b_{n+1} + \ldots +$$

$$+ (a_{n+p-1} - b_{n+p})\, b_{n+p-1}] - a_n b_{n-1} + a_{n+p} \text{ etc.}$$

3.2.11. Teoremă (Criteriul lui Abel-Dirichlet). *Fie* $(a_n)_{n\geqslant 1}$ *și* $(b_n)_{n\geqslant 1}$ *două șiruri de numere reale cu proprietățile :*

1° $a_n \to 0$ *și* $\sum_{n\geqslant 1} |a_{n+1} - a_n| < +\infty$;

2° $M := \sup_{n\geqslant 1} |s_n| < +\infty$, *unde* $s_n := \sum_{i=1}^{n} b_i$.

Atunci seria $\sum_{n\geqslant 1} a_n b_n$ *este convergentă.*

Dem. Utilizînd identitatea lui Abel (P.3.2.10.), deducem :

$$\sum_{i=n}^{n+p} a_i b_i = \sum_{i=n}^{n+p} a_i(s_i - s_{i-1}) = \sum_{i=n}^{n+p-1} (a_i - a_{i+1})\, s_i - a_n s_{n-1} + a_{n+p} s_{n+p},$$

deci

$$\left|\sum_{i=n}^{n+p} a_i b_i\right| \leqslant \sum_{i=n}^{n+p-1} |a_i - a_{i+1}| \cdot |s_i| + |a_n s_{n-1}| + |a_{n+p} s_{n+p}| \leqslant$$

$$\leqslant M\left(\sum_{i=n}^{n+p} |a_i - a_{i-1}| + |a_n| + |a_{n+p}|\right),\ (\forall)\ n \geqslant 1 \wedge p \geqslant 1.$$

Fie $\varepsilon > 0$ fixat. Seria $\sum_{n\geqslant 1} |a_n - a_{n+1}|$ fiind convergentă, cf. T.3.1.11. $(\exists)\ N \geqslant 1$ a.î.

$$\sum_{i=n}^{n+p} |a_i - a_{i+1}| \leqslant \frac{\varepsilon}{3M},\ (\forall)\ n \geqslant N \wedge p \geqslant 1.$$

Deoarece $a_n \to 0$, $(\exists)\ N' \geqslant 1$ a.î. $|a_n| \leqslant \frac{\varepsilon}{3M}$, $(\forall)\ n \geqslant N'$. Atunci

$$\left|\sum_{i=n}^{n+p} a_i b_i\right| \leqslant M\left(\frac{\varepsilon}{3M} + \frac{\varepsilon}{3M} + \frac{\varepsilon}{3M}\right) = \varepsilon,\ (\forall) n \geqslant \max\{N,\ N'\} \wedge p \geqslant 1.$$

Așadar seria $\sum_{n\geqslant 1} a_n b_n$ satisface condiția lui Cauchy (T.3.1.11.), deci este convergentă.

Corolar 1. *Fie $(a_n)_{n\geqslant 1}$ și $(b_n)_{n\geqslant 1}$ două șiruri de numere reale cu proprietățile:*
1° $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_n \geqslant \ldots$, $a_n \to 0$;
2° $\sup_{n\geqslant 1} |s_n| < +\infty$, *unde* $s_n := \sum_{i=1}^{n} b_i$.
Atunci seria $\sum_{n\geqslant 1} a_n b_n$ este convergentă.

Dem. Deoarece $\sum_{i=1}^{n} |a_{i+1} - a_i| = a_1 - a_{n+1} \to a_1$, rezultă că $\sum_{n\geqslant 1} |a_{n+1} - a_n| = a_1 < +\infty$. Aplicăm mai departe T.3.2.10.

Corolar 2. *Fie $(a_n)_{n\geqslant 1}$ și $(b_n)_{n\geqslant 1}$ două șiruri de numere reale cu proprietățile:*
1° $\sum_{n\geqslant 1} |a_{n+1} - a_n| < +\infty$; 2° *Seria $\sum_{n\geqslant 1} b_n$ este convergentă.*
Atunci seria $\sum_{n\geqslant 1} a_n b_n$ este convergentă.

Dem. Din 1° rezultă că seria $\sum_{n\geqslant 1} (a_{n+1} - a_n)$ este convergentă, deci șirul $a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (a_{k+1} - a_k)$ $(n \geqslant 1)$ este convergent; fie $a := \lim_{n\to\infty} a_n$. Punem $\alpha_n := a_n - a$ $(n \geqslant 1)$ și observăm că

$$\alpha_n \to 0\ (n \to \infty);\ \sum_{n\geqslant 1} |\alpha_{n+1} - \alpha_n| = \sum_{n\geqslant 1} |a_{n+1} - a_n| < +\infty,$$

deci (T.3.2.11.) seria $\sum_{n\geqslant 1} (a_n - a) b_n$ este convergentă. Însă cf. 2° seria $\sum_{n\geqslant 1} a b_n$ este convergentă, de unde prin adunare rezultă că seria $\sum_{n\geqslant 1} a_n b_n$ este convergentă.

Corolar 3. *Fie $(a_n)_{n\geqslant 1}$ și $(b_n)_{n\geqslant 1}$ două șiruri de numere reale cu proprietățile:*
1° *$(a_n)_{n\geqslant 1}$ este monoton și mărginit;*
2° *seria $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ este convergentă.*
Atunci seria $\sum_{n\geqslant 1} a_n b_n$ este convergentă.

Dem. Presupunem $(a_n)_{n\geqslant 1}$ monoton crescător majorat și fie $a = \lim_{n\to\infty} a_n$. Atunci

$$\sum_{n\geqslant 1} |a_{n+1} - a_n| = \lim_{n\to\infty} (a_{n+1} - a_1) = a - a_1 < +\infty,$$

deci putem aplica mai departe Cor. 2.

Corolar 4 (L e i b n i z). *Fie* $(a_n)_{n\geq 1}$ *un şir de numere reale cu proprietăţile:* $a_n \to 0$ *şi* $\sum_{n\geq 1} |a_{n+1} - a_n| < +\infty$; *în particular* $(a_n)_{n\geq 1}$ *este monoton descrescător la* 0. *Atunci seria* $\sum_{n\geq 1} (-1)^{n+1} a_n$ *este convergentă.*

Dem. Aplicăm T.3.2.10. şirurilor $(a_n)_{n\geq 1}$ şi $((-1)^{n+1})_{n\geq 1}$.

Exemple.

1. *Seria* $\sum_{n\geq 1} \frac{a^n}{n^\alpha}$ *este convergentă,* $(\forall)\ |a| < 1$ *şi* $\alpha \in \mathbf{R}_+^*$.

Într-adevăr, $\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)_{n\geq 1}$ converge monoton la 0 şi $\sum_{n\geq 1} a^n$ este convergentă. Aplicăm Cor. 1.

2. *Seria* $\sum_{n\geq 1} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ *este convergentă,* $(\forall)\ x \in \mathbf{R} \setminus 2\pi\,\mathbf{Z}$, *dacă* $a_n \searrow 0$ *şi* $b_n \searrow 0$.

Plecăm de la relaţiile cunoscute:

$$\begin{cases} \cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx = \dfrac{\sin \dfrac{nx}{2}}{\sin \dfrac{x}{2}} \cos\left(x + \dfrac{n-1}{2}\, x\right) \\ \sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx = \dfrac{\sin \dfrac{nx}{2}}{\sin \dfrac{x}{2}} \sin\left(x + \dfrac{n-1}{2}\, x\right). \end{cases}$$

Atunci $\left|\sum_{k=1}^{n} \cos kx\right| \leq \dfrac{1}{\left|\sin \dfrac{x}{2}\right|}$, $x \notin 2\pi\,\mathbf{Z}$ $(n \geq 1)$. Aplicînd Cor. 1 deducem că seria $\sum_{n\geq 1} a_n \cos nx$ este convergentă, $(\forall)\ x \in \mathbf{R} \setminus 2\pi\,\mathbf{Z}$. Raţionament analog pentru seria $\sum_{n\geq 1} b_n \sin nx$.

3.3. Serii semiconvergente şi comutativ convergente

3.3.1. Definiţie. O serie de numere reale $\sum_{n\geq 1} a_n$ se numeşte *semicovenrgentă*, dacă este convergentă şi nu este absolut convergentă.

3.3.2. Teoremă (R i e m a n n). *Fie* $\sum_{n\geq 1} a_n$ *o serie semiconvergentă de numere reale. Atunci* $(\forall)\ x \in \overline{\mathbf{R}}$, *există* π *o permutare a lui* $\mathbf{N}$ *a.î.* $x = \sum_{n\geq 1} a_{\pi(n)}$.

Dem. [23]

3.3.3. Definiţie. O serie de numere reale $\sum_{n\geq 1} a_n$ se numeşte *comutativ* (*necondiţionat*) convergentă, dacă $(\forall)\ \pi$ o permutare a mulţimii $\mathbf{N}$, seria $\sum_{n\geq 1} a_{\pi(n)}$ este convergentă.

Reamintim că o *permutare* a unei mulţimi X este o bijecţie a lui X pe ea însăşi. Notăm în continuare cu $G(\mathbf{N})$ *grupul permutărilor* lui $\mathbf{N}$ şi cu $\Phi(\mathbf{N})$ mulţimea tuturor submulţimilor finite ale mulţimii $\mathbf{N}$.

3.3.4. Propoziție. *Fie* $(a_n)_{n\geq 1}$ *un șir de numere reale nenegative. Atunci* $(\forall)\ \pi \in G(\mathbf{N})$, *avem relația:*

$$\sum_{n\geq 1} a_{\pi(n)} = \sum_{n\geq 1} a_n = \sup_{n\geq 1}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) = \sup_{n\in\Phi(\mathbf{N})}\left(\sum_{i\in H} a_i\right)$$

Dem. Fie $\alpha := \sup_{n\geq 1}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)$; fixăm $\pi \in G(N)$, Atunci $(\forall)\ n \geq 1\ (\exists)\ N \geq 1\ (N = \max_{i=1,n} \pi(i))$ a.î. $\{\pi(1), \pi(2), \ldots, \pi(n)\} \subseteq \{1, 2, \ldots, N\}$, deci

$$\sum_{i=1}^{n} a_{\pi(i)} \leq \sum_{i=1}^{N} a_i \leq \alpha.$$

Fie acum $c < \alpha$ fixat. Din P.2.3.16. rezultă că $(\exists)\ m \geq 1$ cu $\sum_{i=1}^{m} a_i \geq c$. Mai departe $(\exists)\ N \geq 1\ (N = \max_{i=1,m} \pi^{-1}(i))$ a.î. $\{1, 2, \ldots, m\} \subseteq \{\pi(1), \pi(2), \ldots, \pi(N)\}$, deci $\sum_{i=1}^{N} a_{\pi(i)} \geq \sum_{i=1}^{n} a_i \geq c$.

Așadar $\sup_{n\geq 1}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{\pi(i)}\right) = \alpha$, prin urmare (P.3.1.9.):

$$\sum_{n\geq 1} a_{\pi(n)} = \sup_{n\geq 1}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{\pi(i)}\right) = \alpha.$$

Egalitatea $\sum_{n\geq 1} a_n = \sup_{n\geq 1}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)$ rezultă din P.3.1.9.

Rămîne să arătăm relația $\sup_{H\in\Phi(\mathbf{N})} \sum_{i\in H} a_{\pi(i)} = \alpha$.

Fie în acest scop $H \in \Phi(\mathbf{N})$ fixat și $m = \text{card } H$. Evident $(\exists)\ \pi \in G(N)$ a.î $H = \{\pi(1), \pi(2), \ldots, \pi(m)\}$. Atunci

$$\sum_{i\in H} a_i = \sum_{i=1}^{m} a_{\pi(i)} \leq \sum_{n\geq 1} a_{\pi(n)} = \alpha,$$

deci $\sup_{H\in\Phi(\mathbf{N})}\left(\sum_{i\in H} a_i\right) \leq \alpha$ și cum inegalitatea contrarie este evidentă, rezultă egalitatea.

Corolar 1. *Fie* $\sum_{n\geq 1} a_n$ *o serie convergentă de numere reale nenegative. Atunci* $\sum_{n\geq 1} a_n$ *este comutativ convergentă și avem :* $\sum_{n\geq 1} a_{\pi(n)} = \sum_{n\geq 1} a_n$, $(\forall)\ \pi \in G(\mathbf{N})$.

3.3.5. Teoremă. *Fie* $\sum_{n\geq 1} a_n$ *o serie de numere reale. Atunci* $\sum_{n\geq 1} a_n$ *este comutativ convergentă* $\Leftrightarrow$ $\sum_{n\geq 1} a_n$ *este absolut convergentă. In acest caz avem relația:*

$$\sum_{n\geq 1} a_{\pi(n)} = \sum_{n\geq 1} a_n,\ (\forall)\ \pi \in G(\mathbf{N}).$$

Dem. $(\Rightarrow)$ Presupunem că $\sum_{n\geq 1} a_n$ nu este absolut convergentă. Atunci $\sum_{n\geq 1} a_n$ este semiconvergentă, deci $(\exists)\ \pi_0 \in G(\mathbf{N})$ a.î. $\sum_{n\geq 1} a_{\pi_0(n)} = +\infty$, absurd,

deoarece $\sum_{n\geqslant 1} a_{\pi(n)}$ este convergentă, $(\forall)\ \pi \in G(\mathbf{N})$. Rămîne că seria dată este absolut convergentă.

($\Leftarrow$) Fie $\pi \in G(\mathbf{N})$ fixat. Atunci (P.3.3.4.) $\sum_{n\geqslant 1} |a_{\pi(n)}| = \sum_{n\geqslant 1} |a_n| < +\infty$ deci $\sum_{n\geqslant 1} a_{\pi(n)}$ este absolut convergentă (P.3.1.9.) și deci este convergentă (T.3.1.11. Cor.1.). Prin urmare $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ este comutativ convergentă.

Presupunem acum că seria $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ este comutativ sau absolut convergentă și fie $\pi \in G(\mathbf{N})$ fixat. Atunci* (P.3.3.4.):

$$\sum_{n\geqslant 1} a^+_{\pi(n)} = \sum_{n\geqslant 1} a^+_n \leqslant \sum_{n\geqslant 1} |a_n| < +\infty$$

și analog $\sum_{n\geqslant 1} a^-_{\pi(n)} = \sum_{n\geqslant 1} a^-_n < +\infty$, deci

$$\sum_{n\geqslant 1} a_{\pi(n)} = \sum_{n\geqslant 1} a^+_{\pi(n)} - \sum_{n\geqslant 1} a^-_{\pi(n)} = \sum_{n\geqslant 1} a^+_n - \sum_{n\geqslant 1} a^-_n = \sum_{n\geqslant 1} a_n.$$

Corolar 1. *Fie* $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ *o serie de numere reale. Atunci cond.* 1°—4° *sînt echivalente*: 1° $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ *este comutativ convergentă*; 2° $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ *este absolut convergentă*; 3° $\sum_{n\geqslant 1} |a_n| < +\infty$; 4° $\sup_{H\in\mathfrak{P}(\mathbf{N})} (\sum_{i\in H} |a_i|) < +\infty$.

Dem. 1°$\Leftrightarrow$2° rezultă din T.3.3.5.; 2°$\Leftrightarrow$3° rezultă din P.3.1.9.; 3°$\Leftrightarrow$4° rezultă din P.3.3.4.

3.4. Produs convolutiv a două serii

3.4.1. Definiție. Fie $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ și $\sum_{n\geqslant 0} b_n$ două serii de numere reale. Se numește *serie produs* (*produs convolutiv*) al celor două serii, seria următoare $\sum_{n\geqslant 0} c_n$, unde $c_n = \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i} (n \geqslant 0)$.

Lemă. Fie $(a_n)_{n\geqslant 0}$ *un șir de numere reale convergent la* 0 *și* $\sum_{n\geqslant 0} b_n$ *o serie absolut convergentă de numere reale. Atunci* $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i} = 0$.

Dem. Fie $\varepsilon > 0$ fixat și $M := \sum_{n\geqslant 0} |b_n|$. Deoarece $a_n \to 0$, $(\exists)\ N \geqslant 1$ a.î. $|a_n| \leqslant \varepsilon/2M$, $(\forall)\ n \geqslant N$. Deoarece $b_n \to 0$ $(\exists)\ N' \geqslant N$ a.î. $|b_n| \leqslant (2\sum_{n=0}^{N} |a_i|)^{-1}\varepsilon$, $(\forall)\ n \geqslant N'$. Atunci $(\forall)\ n \geqslant 2N'$, avem $n - k \geqslant N'$, $(\forall)\ k = \overline{0, N}$, deci

$$|(a_0 b_n + \ldots + a_N b_{n-N}) + (a_{N+1} b_{n-N-1} + \ldots + a_n b_1)| \leqslant$$

$$\leqslant \left(\sum_{i=1}^{N} |a_i|\right)\left(2\sum_{i=1}^{N} |a_i|\right)^{-1}\varepsilon + \varepsilon/2M \cdot \sum_{i=0}^{n-N-1} |b_i| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \varepsilon/2M \cdot M = \varepsilon.$$

Prin urmare $\sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i} \to 0$ $(n \to \infty)$.

---

* $a^+ = \max\{a, 0\}$, $a^- = \max\{-a, 0\}$, $a = a^+ - a^-$, $|a| = a^+ + a^-$, $(\forall)\ a \in \mathbf{R}$.

3.4.2. Teoremă (M e r t e n s). *Fie* $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ *și* $\sum_{n\geqslant 0} b_n$ *două serii de numere reale, una convergentă, cealaltă absolut convergentă. Atunci seria produs a celor două serii este o serie convergentă și are suma egală cu produsul sumelor seriilor date i.e.*

$$\sum_{n\geqslant 0}\left(\sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}\right) = \left(\sum_{n\geqslant 0} a_n\right)\cdot\left(\sum_{n\geqslant 0} b_n\right).$$

Dem. Presupunem că prima serie este absolut convergentă și a doua convergentă. Să notăm $a := \sum_{n\geqslant 0} a_n$, $b := \sum_{n\geqslant 0} b_n$, $A_n := \sum_{i=0}^{n} a_i$, $B_n := \sum_{i=0}^{n} b_i$, $r_n := b - B_n$, $c_i := \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}$, $C_n := \sum_{i=0}^{n} c_i$. Atunci

$$\begin{aligned} C_n = {} & a_0 b_0 + \\ & + a_0 b_1 + a_1 b_0 + \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ & a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_n b_0. \end{aligned}$$

Sumînd pe coloane obținem :

$$C_n = a_0 B_n + a_1 B_{n-1} + \ldots + a_n B_0,$$

deci

$$\begin{aligned} C_n &= a_0 (b - r_n) + a_1 (b - r_{n-1}) + \ldots + a_n (b - b_0) = \\ &= (a_0 + a_1 + \ldots + a_n)\, b - (a_0 r_n + a_1 r_{n-1} + \ldots + a_n r_0) = \\ &= A_n b - (a_0 r_n + a_1 r_{n-1} + \ldots + a_n r_0) \end{aligned}$$

și deci

$$ab - C_n = (a - A_n)\, b + \sum_{i=0}^{n} r_i a_{n-i} \tag{1}$$

Deoarece $A_n \to a$, avem $(a - A_n)\, b \to 0$. Aplicînd mai departe Lema, șirului $(r_n)_{n\geqslant 0}$ care converge la 0 și seriei $\sum_{n\geqslant 0} a_n$, rezultă $\sum_{i=0}^{n} r_i a_{n-i} \to 0$ $(n \to \infty)$.

Prin urmare din (1) deducem că $ab - C_n \to 0$ $(n \to \infty)$, prin urmare seria $\sum_{n\geqslant 0} c_n$ este convergentă și are suma ab.

Corolar 1 (t h. C a u c h y). *Fie* $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ *și* $\sum_{n\geqslant 0} b_n$ *două serii absolut convergente de numere reale. Atunci seria produs al celor două serii este absolut convergentă.*

Dem. Aplicînd T.3.4.2. seriilor $\sum_{n\geqslant 0} |a_n|$ și $\sum_{n\geqslant 0} |b_n|$, rezultă că seria $\sum_{n\geqslant 0}\left(\sum_{i=0}^{n} |a_i b_{n-i}|\right)$ este convergentă. Deoarece $\left|\sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}\right| \leqslant \sum_{i=0}^{n} |a_i b_{n-i}|$, $(\forall)\ n \geqslant 0$, rezultă (P.3.2.2.) că seria $\sum_{n\geqslant 0}\left|\sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}\right|$ este convergentă, ceea ce înseamnă că seria $\sum_{n\geqslant 0}\left(\sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}\right)$ este absolut convergentă.

3.5. Serii remarcabile de numere

3.5.1. Propoziție. *Seria* $\sum_{n\geqslant 1} na^{n-1}$, $a \in \mathbf{R}$, *este convergentă și are suma* $\frac{1}{(1-a)^2}$, *dacă* $|a|<1$ *și este divergentă, dacă* $|a| \geqslant 1$.

Dem. Plecăm de la identitatea:

$$1+2a+3a^2+\ldots+na^{n-1}=\frac{1+na^{n+1}-(n+1)a^n}{(1-a)^2}, \quad (\forall)\ a\in \mathbf{R}\setminus\{1\} \wedge n\in \mathbf{N},$$

care poate fi obținută fie prin inducție relativ la n, fie prin derivare în raport cu a a relației $1+a+a^2+\ldots+a^n=\frac{1-a^{n+1}}{1-a}$.

Dacă $|a|<1$, avem (P.2.4.1.(2°) $na^n \to 0$ $(n\to\infty)$, deci

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} ka^{k-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+na^{n+1}-(n+1)a^n}{(1-a)^2}=\frac{1}{(1-a)^2},$$

prin urmare seria $\sum_{n\geqslant 1} na^{n-1}$ este convergentă și are suma $\frac{1}{(1-a)^2}$.

Dacă $|a|\geqslant 1$, șirul $(na^n)_{n\geqslant 1}$ nu converge la 0, deci seria dată este divergentă.

Corolar 1. *Seria* $\sum_{n\geqslant 1}\frac{n}{a^n}$ *este convergentă și are suma* $\frac{a}{(1-a)^2}$, *dacă* $|a|>1$.

Dem. Punem $b:=\frac{1}{a}$. Cum $|a|>1$, avem $|b|<1$. Atunci

$$\sum_{n\geqslant 1} nb^n = b\left(\sum_{n\geqslant 1} nb^{n-1}\right)=b\cdot\frac{1}{(1-b)^2}=\frac{a}{(1-a)^2}.$$

3.5.2. Propoziție. *Fie* $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ *o serie de numere reale cu proprietatea că există* $(f(n))_{n\geqslant 1}$ *un șir convergent de numere reale și* $p\geqslant 1$ *a.î.* $a_n=f(n+p)-f(n)$ $(\forall)\ n\geqslant 1$. *Atunci seria* $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ *este convergentă și are suma egală cu* $p\cdot\lim_{n\to\infty} f(n)-\sum_{k=1}^{p} f(k)$.

Dem. Fie $s_n:=\sum_{k=1}^{n} a_k$ $(n\geqslant 1)$. Atunci $(\forall)\ n>p$ avem:

$$s_n=\sum_{k=1}^{n}(f(k+p)-f(k))=\sum_{i=p+1}^{n+p} f(i)-\sum_{i=1}^{n} f(i)=$$

$$=\sum_{i=p+1}^{n} f(i)+\sum_{i=n+1}^{n+p} f(i)-\left(\sum_{i=1}^{p} f(i)+\sum_{i=p+1}^{n} f(i)\right)=$$

$$=\sum_{i=n+1}^{n+p} f(i)-\sum_{i=1}^{p} f(i)=\sum_{k=1}^{p} f(n+k)-\sum_{i=1}^{p} f(k),$$

de unde prin trecere la limită, $n \to \infty$, obținem :

$$s := \lim s_n = p \cdot \lim_{j\to\infty} f(j) - \sum_{k=1}^{p} f(k)$$

Prin urmare seria $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ este convergentă și are suma s.

Corolar 1. *Fie* $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ *o serie de numere reale cu proprietatea că există* $(f(n))_{n\geqslant 1}$ *un șir de numere reale a.î.* $a_n = f(n+1) - f(n)$, $(\forall)\ n \geqslant 1$. *Atunci seria* $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ *este convergentă* $\Leftrightarrow$ *șirul* $(f(n))_{n\geqslant 1}$ *este convergent*; *în acest caz avem relația* $\sum_{n\geqslant 1} a_n = \lim_{n\to\infty} f(n) - f(1)$.

Corolar 2.

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n(n+p)} = \frac{1}{p} \cdot \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k}, \quad (\forall)\ p \in \mathbf{N}.$$

Dem. $a_n := \dfrac{1}{n(n+p)} = \dfrac{1}{p}\left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+p}\right)$ $(\forall)\ n \geqslant 1$. Punem $f(n) := -\dfrac{1}{p} \cdot \dfrac{1}{n}$ $(n \geqslant 1)$ și observăm că $a_n := f(n+p) - f(n)$, $(\forall)\ n \geqslant 1$, deci (P.3.5.2.) avem :

$$\sum_{n\geqslant 1} a_n = p \lim_{n\to\infty} f(n) - \sum_{k=1}^{p} f(k) = \frac{1}{p} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

Corolar 3.

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{n!}{(n+k)!} = \frac{1}{k-1} \cdot \frac{1}{k!}; \quad \sum_{n\geqslant 1} \frac{n!\,k!}{(n+k)!} = \frac{1}{k-1}, \quad (\forall)\ k \in \mathbf{N}\setminus\{1\}$$

Dem. $a_n := \dfrac{n!}{(n+k)!} = \dfrac{1}{k-1}\left(\dfrac{n!}{(n+k-1)!} - \dfrac{(n+1)!}{(n+k)!}\right)$ $(n \geqslant 1)$. Punem $f(n) := \dfrac{1}{k-1} \cdot \dfrac{n!}{(n+k-1)!}$ $(n \geqslant 1)$ și observăm că $a_n = f(n) - f(n+1)$, $(\forall)\ n \geqslant 1$, deci (P.3.5.2. Cor. 1) avem :

$$\sum_{n\geqslant 1} a_n = f(1) - \lim_{n\to\infty} f(n) = f(1) = \frac{1}{k-1} \cdot \frac{1}{k!} \text{ etc.}$$

Corolar 4.

$1^\circ\ \sum_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{(n-1)!+n!} = 1$; $2^\circ\ \sum_{n\geqslant 1} \dfrac{n}{(an+1)!!} = \dfrac{1}{2}$; $3^\circ\ \sum_{n\geqslant 1} \dfrac{n}{(n+1)!} = 1$;

$4^\circ\ \sum_{n\geqslant 1} \dfrac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!} = \dfrac{1}{2}$; $5^\circ\ \sum_{n\geqslant 1} \dfrac{(p+1)(p+2)\ldots(p+n)}{(q+1)(q+2)\ldots(q+n)} = \dfrac{p+1}{q-p-1}$ $(q-p>1)$.

Dem. $1^\circ\ a_n := \dfrac{1}{(n-1)!+n!} = \dfrac{1}{n!}\left(1 - \dfrac{1}{n+1}\right) = \dfrac{1}{n!} - \dfrac{1}{(n+1)!}$.

Punem $f(n) := \frac{1}{n!}$ $(n \geqslant 1)$ şi observăm că $a_n = f(n) - f(n+1)$, $(\forall)$ $n \geqslant 1$, deci (Cor. 1) avem :

$$\sum_{n \geqslant 1} a_n = f(1) - \lim_{n \to \infty} f(n) = f(1) = 1$$

$$2^\circ \quad a_n := \frac{n}{(2n+1)!!} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(2n-1)!!} - \frac{1}{(2n+1)!!}\right).$$

Punem $f(n) = \frac{1}{2} \frac{1}{(2n-1)!!}$ $(n \geqslant 1)$ şi observăm că $a_n = f(n) - f(n+1)$, $(\forall)$ $n \geqslant 1$, deci (Cor. 1).

$$\sum_{n \geqslant 1} (a_n = f(1) - \lim_{n \to \infty} j(n) = f(1) = \frac{1}{2}$$

$$3^\circ \quad a_n := \frac{n}{(n+1)!} = \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!} \quad (n \geqslant 1).$$

Punem $f(n) := \frac{1}{n!}$ $(n \geqslant 1)$ şi observăm că $a_n = f(n) - f(n+1)$, $(\forall)$ $n \geqslant 1$, deci (Cor. 1)

$$\sum_{n \geqslant 1} a_n = f(1) - \lim_{n \to \infty} f(n) = f(1) = 1$$

$$4^\circ \quad a_n := \frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!} = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} - \frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!} \quad (n \geqslant 1).$$

Punem $f(n) := \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$ $(n \geqslant 1)$. Atunci (P.1.4.3. Exemplul 2) :

$$0 < f(n) = \frac{1 \ 3 \ldots (2n-1)}{2 \ 4 \ \ldots \ (2n)} < \frac{1}{\sqrt{3n+1}} \to 0 \ (n \to \infty),$$

deci (Cor. 1)

$$\sum_{n \geqslant 1} a_n = f(1) - \lim_{n \to \infty} f(n) = f(1) = \frac{1}{2}.$$

$$5^\circ \quad a_n := \frac{(p+1) \ldots (p+n)}{(q+1) \ldots (q+n)} = \frac{q!}{p!} \frac{(p+n)!}{(q+n)!} \qquad (n \geqslant 1).$$

Punem $f(n) := -\frac{1}{q-p-1} \cdot \frac{q!}{p!} \cdot \frac{(p+n)!}{(q+n-1)!}$ $(n \geqslant 1)$. Atunci $a_n = f(n+1) - f(n)$ $(\forall)$ $n \geqslant 1$ şi deoarece $(q+n-1)! \geqslant (p+n+1)!$, avem $|f(n)| \leqslant \frac{q!}{p!} \cdot \frac{1}{p+n} \to 0$ $(n \to \infty)$, deci (Cor. 1)

$$\sum_{n \geqslant 1} a_n = \lim_{n \to \infty} f(n) - f(1) = -f(1) = \frac{p+1}{q-p-1}.$$

Corolar 5.

$$1^\circ \sum_{n \geqslant 1} \operatorname{arctg} \frac{1}{2n^2} = \frac{\pi}{4}; \quad 2^\circ \sum_{n \geqslant 1} \operatorname{arctg} \frac{1}{n^2+n+1} = \frac{\pi}{4}.$$

Dem. 1° $a_n := \operatorname{arctg}\frac{1}{2n^2} = \operatorname{arctg}\frac{n}{n+1} - \operatorname{arctg}\frac{n-1}{n}$ $(n \geqslant 1)$. Punem $f(n) := \operatorname{arctg}\frac{n-1}{n}$ $(n \geqslant 1)$ și observăm că $a_n = f(n+1) - f(n)$, $(\forall)$ $n \geqslant 1$, deci (Cor. 1)

$$\sum_{n\geqslant 1} a_n = \lim_{n\to\infty} f(n) - f(1) = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$$

2° $\operatorname{arctg}\frac{1}{n^2+n+1} = \operatorname{arctg}\frac{1}{n} - \operatorname{arctg}\frac{1}{n+1}$ etc.

3.5.3. Propoziție (Leibniz). *Seria* $\sum_{n\geqslant 1}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ *este convergentă și are suma* ln 2.

Dem. Din T.3.2.6. avem că seria dată este convergentă; fie x suma sa. Evident $(\forall)$ $n \geqslant 1$ avem identitatea:

$$\sum_{k=1}^{2n}(-1)^{k+1}\frac{1}{k} = \left(\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k} - \ln 2n\right) - \left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln n\right) + \ln 2 \qquad (1)$$

Notînd cu γ constanta lui Euler, avem (P.2.4.3.):

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k} - \ln 2n\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln n\right) = \gamma$$

Trecînd în (1) la limită, $n \to \infty$, obținem:

$$x = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n}(-1)^{k+1}\frac{1}{k} = \gamma - \gamma + \ln 2 = \ln 2$$

3.5.4. Propoziție (Euler). *Seria* $\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{1}{n} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)$ *este convergentă și are suma egală cu constanta lui Euler.*

Dem. Fie $s_n := \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)\right)$ $(n \geqslant 1)$. Evident avem

$$\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = \ln\left(\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\ldots\cdot\frac{n+1}{n}\right) = \ln(n+1),$$

deci

$$s_n = \left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln n\right) - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right), \quad (\forall)\ n \geqslant 1 \qquad (1)$$

Deoarece (P.2.4.3.) $\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln n\right) = \gamma$ (constanta lui Euler), din (1) prin trecere la limită, $n \to \infty$, obținem $\lim_{n\to\infty} s_n = \gamma$, etc.

3.5.5. Propoziție (Euler). *Seria* $\sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{n!}$ *este convergentă și are suma egală cu* e.

Dem. Fie $s_n := 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}$ și $x_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n (n \geqslant 1)$. Evident $(s_n)_{n\geqslant 1}$ este strict crescător, deci are limită, finită sau egală cu $+\infty$; să o notăm cu e'. Am văzut (P.2.4.2) că șirul $(x_n)_{n\geqslant 1}$ este strict crescător și are limita e. Aplicînd formula binomială (P.2.1.16. (9°)), deducem :

$$x_n = 1 + \frac{1}{1!} + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\frac{1}{2!} + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{3}{n}\right)\frac{1}{3!} + \ldots +$$
$$+ \left(\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\ldots\left(1 - \frac{n-1}{n}\right)\right)\frac{1}{n!} < 1 +$$
$$+ \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} = s_n,$$

de unde prin trecere la limită, obținem :

$$\mathrm{e} = \lim_{n\to\infty} x_n \leqslant \lim_{n\to\infty} s_n = \mathrm{e}' \tag{1}$$

Mai departe, $(\forall)$ k, $\mathrm{n} \in \mathbf{N}$, $k \leqslant n$, avem

$$x_n(k) := 1 + \frac{1}{1!} + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\frac{1}{2!} + \ldots$$
$$+ \left(\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\ldots\left(1 - \frac{k-1}{n}\right)\right)\frac{1}{k!} \leqslant x_n,$$

de unde prin trecere la limită, obținem

$$s_k = \lim_{n\to\infty} x_n(k) \leqslant \lim_{n\to\infty} x_n = \mathrm{e},$$

deci $s_k \leqslant \mathrm{e}$, $(\forall)$ $k \in \mathbf{N}$ și deci $\mathrm{e}' = \lim_{k\to\infty} s_k \leqslant \mathrm{e}$ (2). Din (1) și (2) rezultă că seria $\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{n!}$ este convergentă și are suma e.

Corolar 1.

$$0 < \mathrm{e} - \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}\right) < \frac{1}{n!\,n}, \quad (\forall)\ n \geqslant 1.$$

Dem. Fie $s_n := 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}$ $(n \geqslant 1)$. Evident avem

$$0 < \mathrm{e} - s_n = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \ldots <$$

$$< \frac{1}{(n+1)!}\left[1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \ldots\right] = \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{n+1}} = \frac{1}{n!\,n}$$

Corolar 2. *Numărul* e *este irațional.*

Dem. Din Cor. 1 rezultă : $(\forall)$ $n \in \mathbf{N}$ $(\exists)$ $\theta_n \in (0,1)$ a.î.

$$\mathrm{e} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \frac{\theta_n}{n!\,n}$$

Presupunem e rațional, deci $(\exists)\ p,\ q \in \mathbf{N},\ (p,\ q) = 1$ cu $\frac{p}{q} = e$. Atunci $(\exists)\ \theta = \theta(q) \in (0,1)$ a.î.

$$\frac{p}{q} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{q!} + \frac{\theta}{q!\,q},$$

deci

$$0 = q!\,p - \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{q!}\right) q!\,q \in \mathbf{Z},$$

absurd. Rămîne că e este irațional.

Observația 1. Fie seria (1) $\sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{n!}$, unde $a_n \in \{0,1\}$ și o infinitate de numere a_n sînt 1. Raționînd ca în Cor. 2 deducem că seria (1) evident convergentă are suma un număr irațional. Obținem astfel o infinitate nenumărabilă de numere irașionale.

Observația 2. Considerăm șirul $(x_n)_{n\geq 1}$, unde $x_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$. Ca în Cor. 1 se arată că $0 \leqslant x_m - x_n < \frac{1}{n!\,n}$, $(\forall)\ m \geqslant n \geqslant 1$, deci $(x_n)_{n\geq 1}$ este un șir Cauchy de elemente din $\mathbf{Q}$, care nu are limită în $\mathbf{Q}$. Obținem astfel pe o altă cale că $\mathbf{Q} \neq \mathbf{R}$ (v. P.2.3.23. Cor. 1).

Observația 3. Utilizînd inegalitatea $0 < e - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} < \frac{1}{n!\,n}$, $(\forall)\ n \geqslant 1$, putem calcula valoarea aproximativă a lui e. Să calculăm, spre exemplu, valoarea aproximativă a lui e cu o eroare $\leqslant 10^{-7}$.

Notăm $r_n := \sum_{k\geqslant n+1} \frac{1}{k!}$. Atunci avem:

$$0 < r_n < \frac{1}{n!}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \ldots\right) < \frac{1}{n!\,n},\ (\forall)\ n \geqslant 1.$$

Să determinăm pe $n \geqslant 1$ a.î. $\frac{1}{n!\,n} \leqslant 10^{-7}$, obținem imediat că $n \geqslant 10$. Prin urmare $e \approx 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{10!}$, cu o eroare mai mică decît 10^{-7}, deci

$$e \approx 2 + \frac{1}{6} + \frac{1}{21} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720} + \frac{1}{40320} + \frac{1}{362880} + \frac{1}{3628800} =$$
$$= 2 + 0{,}1666666 + 0{,}0476666 + 0{,}0083333 + 0{,}0013888 +$$
$$+ 0{,}0000248 + 0{,}0000027 + 0{,}0000002 = 2{,}718083.$$

3.5.6. Propoziție. *Să se arate că seria* $\sum_{n\geq 1} \frac{n^p}{n!}$, $(p \in \mathbf{N})$, *este convergentă și să se calculeze suma sa în cazul* $p = 2$ *și* $p = 3$.

Dem. Fixăm $p \in \mathbf{N}$. Deoarece $\lim_{n\to\infty} \frac{n^p}{n(n-1)\ldots(n-p+1)} = 1$, $(\exists)\ N \geqslant 1$ a.î. $n^p < 2n(n-1)\ldots(n-p+1)$, $(\forall)\ n \geqslant N$. Atunci $\frac{n^p}{n!} < \frac{2}{(n-p)!}$ $(\forall)\ n \geqslant N'$,

unde $N'_1 = \max\{N, p\}$. Cum seria $\sum_{n>p} \frac{1}{(n-p)!}$ este convergentă (P.3.5.5.), rezultă (P.3.2.3. Cor. 1) că seria $\sum_{n>1} \frac{n^p}{n!}$ este convergentă.

1° Să calculăm suma seriei $\sum_{n>1} \frac{n^2}{n!}$.

Deoarece $n^2 = n(n-1) + n$ $(\forall)$ $n \geqslant 1$, avem:

$$\frac{n^2}{n!} = \frac{n(n-1)}{n!} + \frac{n}{n!} = \frac{1}{(n-2)!} + \frac{1}{(n-1)!}, \quad (\forall) \quad n \geqslant 2,$$

deci

$$\sum_{n>1} \frac{n^2}{n!} = 1 + \frac{4}{2!} + \sum_{n>2} \frac{n^2}{n!} = 3 + \sum_{n>2} \frac{1}{(n-2)!} + \sum_{n>2} \frac{1}{(n-1)!} =$$

$$= 3 + \sum_{k>0} \frac{1}{k!} - 1 + \sum_{k>0} \frac{1}{k!} = 2 + 2e$$

2° Să calculăm suma seriei $\sum_{n>1} \frac{n^3}{n!}$.

Încercăm să determinăm trei constante α, β, γ a.î. $n^3 = n(n-1)(n-2) + \alpha n(n-1) + \beta n + \gamma$ $(\forall)$ $n \geqslant 1$. După efectuarea înmulțirilor, deducem prin identificare: $\alpha = 3$, $\beta = 1$, $\gamma = 0$, deci $n^3 = n(n-1)(n+2) + 3n(n-1) + n$, $(\forall)$ $n \geqslant 1$. Atunci

$$\frac{n^3}{n!} = \frac{n(n-1)(n-2)}{n!} + 3\frac{n(n-1)}{n!} + \frac{n}{n!} = \frac{1}{(n-3)!} +$$

$$+ 3\frac{1}{(n-2)!} + \frac{1}{(n-1)!}, \quad (\forall) \quad n \geqslant 3,$$

deci

$$\sum_{n>1} \frac{n^3}{n!} = \frac{1^3}{1!} + \frac{2^3}{2!} + \sum_{n>3} \frac{n^3}{n!} = 5 + \sum_{n>3} \frac{1}{(n-3)!} + 3\sum_{n>3} \frac{1}{(n-2)!} +$$

$$+ \sum_{n>3} \frac{1}{(n-1)!} = 5 + \sum_{k>0} \frac{1}{k!} - 3 + \sum_{k>0} \frac{1}{k!} - 2\sum_{k>0} \frac{1}{k!} = 5e$$

3.6. Produse infinite de numere

Produsul infinit este analogul seriei, în care operația de adunare se înlocuiește cu operația de înmulțire.

3.6.1. Definiție. Fie $(a_n)_{n>1}$ un șir de numere reale și $p_n = \prod_{i=1}^{n} a_i$ $(n \geqslant 1)$. Perechea $((a_n)_{n>1}, (p_n)_{n>1})$ se numește *produs infinit de termen general* a_n și se notează cu $\prod_{n>1} a_n$, $\prod_{n} a_n$, $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ sau $a_1 \cdot a_2 \ldots a_n \ldots$. Elementele șirului $(a_n)_{n>1}$ se numesc *termenii* produsului iar elementele șirului $(p_n)_{n>1}$ se numesc *produsele*

parțiale ale produsului dat; elementul a_n (resp. p_n) se numește *termenul* (resp. *produsul*) *de rang* n. Fixăm $n \geqslant 1$; produsul infinit asociat șirului $(a_k)_{k \geqslant n+1}$ se notează cu $\prod_{k \geqslant n+1} a_k$. Dacă șirul $(p_n)_{n \geqslant 1}$ este convergent către un element nenul (resp. $(p_n)_{n \geqslant 1}$ convergent la $x \in \mathbf{R}^*$), vom spune că produsul infinit $\prod_{n \geqslant 1} a_n$ este *convergent.* (resp. *și este egal cu* x) și vom scrie $x = \prod_{n \geqslant 1} a_n$. Un produs infinit care nu este convergent se numește *divergent.* Dacă $\lim_{n \to \infty} p_n = +\infty$ (resp. $-\infty$) vom spune că produsul infinit $\prod_{n \geqslant 1} a_n$ este egal cu $+\infty$ (resp. $-\infty$) și vom scrie $\prod_{n \geqslant 1} a_n = +\infty$ (resp. $-\infty$).

Observația 1. Rolul elementului 0 din cadrul seriilor convergente îl ocupă, în cadrul produselor infinite, elementul 1.

Observația 2. 1° Un produs infinit nu-și schimbă natura, nici valoarea, dacă dăm la o parte toți termenii (sau o parte dintre ei) egali cu 1.

2° Fie $a_n \in \mathbf{R}^*$, $(\forall)\ n \geqslant 1$. Atunci produsul infinit $\prod_{n \geqslant 1} a_n$ este convergent $\Leftrightarrow$ produsul infinit $\prod_{n \geqslant 1} (a_n^{-1})$ este convergent. În acest caz avem: $\prod_{n \geqslant 1} (a_n^{-1}) = (\prod_{n \geqslant 1} a_n)^{-1}$.

3.6.2. Definiție. Un produs infinit $\prod_{n \geqslant 1} a_n$ se numește *absolut convergent*, dacă produsul infinit $\prod_{n \geqslant 1} (1 + |a_n - 1|)$ este convergent i.e. dacă produsul infinit $\prod_{n \geqslant 1} (1 + |\alpha_n|)$ este convergent, unde $a_n = 1 + \alpha_n$, $(\forall)\ n \geqslant 1$. Un produs infinit care este convergent și nu este absolut convergent se numește *semiconvergent.*

Exemple

1. *Produsul infinit* $\prod_{n \geqslant 1} (1 + n)$ *este divergent și egal cu* $+\infty$.

Într-adevăr $p_n := \prod_{k=1}^{n} (1 + k) > 1 + n$, deci $\lim_{n \to \infty} p_n = +\infty$.

2. *Produsul infinit* $\prod_{n \geqslant 2} \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)$ *este convergent și egal cu* 1.

Fie $p_{n-1} := \prod_{k=2}^{n} \left(1 + \frac{(-1)^k}{k}\right)$ $(n \geqslant 2)$. Atunci

$$p_{n-1} = \left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 + \frac{1}{4}\right) \ldots \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right) =$$

$$= \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{4}{5} \ldots \frac{n + (-1)^n}{n} = \begin{cases} 1 + \frac{1}{n}, & n \text{ par} \\ 1, & n \text{ impar,} \end{cases}$$

deci $\lim_{n \to \infty} p_{n-1} = 1 \Leftrightarrow \prod_{n \geqslant 1} \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right) = 1$.

3. *Produsul infinit* $\prod_{n \geqslant 1} \left(1 + \frac{1}{n}\right)$ *este divergent și egal cu* $+\infty$.

Într-adevăr avem:

$$p_{n-1} = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k}\right) \geqslant 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \to \infty \ (n \to \infty) \text{ etc.}$$

4. *Produsul infinit* $\prod_{n\geq 1} \frac{n(n+2)}{(n+1)^2}$ *este convergent și egal cu* $\frac{1}{2}$.

Într-adevăr avem :

$$p_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{k(k+2)}{(k+1)^2} = \frac{(1\cdot 2\ldots n)\,(2\cdot 3\ldots n(n+1)\,(n+2))}{(2\cdot 3\ldots n(n+1))^2} = \frac{n+2}{2n+2} \to \frac{1}{2}$$

3.6.3. Propoziție. *Fie* $\prod_{n\geq 1} a_n$ *un produs infinit de numere reale. Atunci :*

1° *Dacă* $\prod_{n\geq 1} a_n$ *este convergent, avem* $a_n \neq 0$, $(\forall)\ n \geq 1$ *și* $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$.

2° *Dacă* $a_n \neq 0$, $(\forall)\ n \geq 1$, *avem* $\prod_{n\geq 1} a_n$ *este convergent* $\Leftrightarrow$ $(\exists)\ k \geq 1$ *a.î.* $\prod_{n\geq k} a_n$ *este convergent* $\Leftrightarrow$ $(\forall)\ k \geq 1$, $\prod_{n\geq k} a_k$ *este convergent.*

Dem. 1° Dacă $(\exists)\ k \geq 1$ cu $a_k = 0$, atunci $p_n := \prod_{i=1}^{n} a_i = 0$, $(\forall)\ n \geq k$, deci $p_n \to 0$, absurd. Rămîne că $a_n \neq 0$, $(\forall)\ n \geq 1$. Fie mai departe $p := \prod_{n\geq 1} a_n$; atunci $a_n = \frac{p_{n+1}}{p_n} \to \frac{p}{p} = 1$.

2° $(\forall)\ n \geq k \geq 1$, avem $p_n = p_k \cdot q_{n-k}$, unde $q_m := \prod_{i=1}^{m} a_{k+i}$. Atunci $\prod_{n\geq 1} a_n$ este convergent : $\Leftrightarrow$ $(p_n)_{n\geq 1}$ este convergent către un element nenul $\Leftrightarrow$ $(q_m)_{m\geq 1}$ este convergent către un element nenul $\Leftrightarrow$ $\prod_{m\geq 0} a_{k+m}$ este convergent $\Leftrightarrow$ $\prod_{n\geq k} a_n$ este convergent.

Corolar 1. *Fie* $\prod_{n\geq 1} a_n$ *un produs infinit convergent de numere reale. Atunci*

1° $0 < \inf_{n\geq 1} |a_n| \leq \sup_{n\geq 1} |a_n| < +\infty$; 2° $0 < \inf_{n\geq 1} |p_n| \leq \sup_{n\geq 1} |p_n| < +\infty$.

Dem. 1° Din P.3.6.3. rezultă că $(a_n)_{n\geq 1}$ este convergent și are limita nenulă. De aici rezultă imediat inegalitățile din enunț.

2° Raționament analog cu 1°.

Corolar 2. *Fie* $\prod_{n\geq 1} a_n$ *un produs infinit convergent de numere reale. Atunci* $(\exists)\ n_0 \geq 1$ *și* $\alpha \in \mathbf{R}_+^*$ *a.î.* $a_n \geq \alpha$ *și* $p_n \geq \alpha$, $(\forall)\ n \geq n_0$.

Corolar 3. *Fie* $\prod_{n\geq 1} (1 + a_n)$ *un produs infinit convergent cu* $a_n \in \mathbf{R}$, $(\forall)\ n \geq 1$. *Atunci* $a_n \neq -1$, $(\forall)\ n \geq 1$ *și* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Observație. Din P.3.6.3. se observă că pentru studiul produselor infinite convergente de numere reale, este suficient să considerăm produse infinite de forma $\prod_{n\geq 1} a_n$ cu $a_n > 0$, $(\forall) n \geq 1$ sau de forma $\prod_{n\geq 1} (1 + a_n)$ cu $a_n > -1$, $(\forall)\ n \geq 1$.

3.6.4. Teoremă (C a u c h y). *Fie* $(a_n)_{n\geq 1}$ *un șir de numere reale nenule. Atunci produsul infinit* $\prod_{n\geq 1} a_n$ *este convergent* $\Leftrightarrow$ $(\forall)\ \varepsilon > 0$ $(\exists)\ n_\varepsilon \geq 1$ *a.î.* $\left| \prod_{i=n+1}^{n+k} a_i - 1 \right| < \varepsilon$, $(\forall)\ n \geq n_\varepsilon \wedge k \geq 1$ *i.e.* $\lim_{n,\,k\to\infty} \prod_{i=n+1}^{n+k} a_i = 1$.

Dem. ($\Rightarrow$) Presupunem $\prod_{n\geq 1} a_n$ convergent ; fie $p = \prod_{n\geq 1} a_n$, $p_n := \prod_{i=1}^{n} a_i$ $(n \geq 1)$. Atunci prin definiție avem $p \neq 0$ și $p_n \to p$, deci (P. 3.6.3.) $(\exists)\ \alpha > 0$ cu

$|p_n| \geqslant \alpha$, $(\forall)\ n \geqslant 1$. Fixăm $\varepsilon > 0$; şirul $(p_n)_{n\geqslant 1}$ fiind convergent, este Cauchy, deci $(\exists)\ n_\varepsilon \geqslant 1$ a.î.

$$|p_{n+k} - p_n| < \alpha\varepsilon,\ (\forall)\ n \geqslant n_\varepsilon \wedge k \geqslant 1$$

şi deci

$$\left|\prod_{i=n+1}^{n+k} a_i - 1\right| = \left|\frac{p_{n+k}}{p_n} - 1\right| \leqslant \frac{|p_{n+k} - p_n|}{\alpha} < \varepsilon,\ (\forall)\ n \geqslant n_\varepsilon \wedge k \geqslant 1$$

($\Leftarrow$) Presupunem că $\lim\limits_{n,\,k\to\infty} \prod\limits_{i=n+1}^{n+k} a_i = 1$ (1). Atunci pentru $\varepsilon = 1$, $(\exists)\ N \geqslant 1$ a.î. $\left|\frac{p_{N+k}}{p_N} - 1\right| \leqslant 1$, $(\forall)\ k \geqslant 1$, deci

$$|p_{N+k}| \leqslant 1 + |p_N|,\ (\forall)\ n \geqslant N$$

şi deci

$$\alpha := \sup_{n\geqslant 1} |p_n| \leqslant \max\{|p_1|, \ldots |p_N|,\ 1 + |p_N|\} < +\infty.$$

Fie acum $\varepsilon > 0$ fixat arbitrar. Cf. (1) $(\exists)\ n_\varepsilon \geqslant 1$ a.î.

$$\left|\frac{p_{n+k}}{p_n} - 1\right| \leqslant \varepsilon\alpha^{-1},\ (\forall)\ n \geqslant n_\varepsilon \wedge k \geqslant 1,$$

deci

$$|p_{n+k} - p_n| < \varepsilon\alpha^{-1}|p_n| \leqslant \varepsilon,\ (\forall)\ n \geqslant n_\varepsilon \wedge k \geqslant 1$$

Am obţinut că $(p_n)_{n\geqslant 1}$ este şir Cauchy, deci (T.2.3.19.(6°)) convergent.

Să arătăm că $p := \prod\limits_{n\geqslant 1} a_n \neq 0$; presupunem $p = 0$. Cf. (1) $(\exists)\ N \geqslant 1$ a.î.

$$\left|\frac{p_{N+k}}{p_N} - 1\right| < \frac{1}{2},\ (\forall)\ k \geqslant 1. \tag{2}$$

Trecînd în (2) la limită, $k \to \infty$, obţinem $|0 - 1| \leqslant \frac{1}{2}$ absurd. Rămîne $p \neq 0$ prin urmare $\prod\limits_{n\geqslant 1} a_n$ este convergent.

Lemă. $(\forall)\ \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbf{R}$, *avem inegalitatea*:

$$\left|\prod_{i=1}^{n}(1 + \alpha_i) - 1\right| \leqslant \prod_{i=1}^{n}(1 + |\alpha_i|) - 1.$$

Dem. Se arată mai întîi prin inducţie relaţia:

$$\prod_{i=1}^{n}(1 + \alpha_i) = 1 + \sum_{i=1}^{n}\alpha_i + \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\alpha_i\alpha_j + \ldots + \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n$$

Atunci

$$\left|\prod_{i=1}^{n}(1+\alpha_i)-1\right| \leqslant \sum_{i=1}^{n}|\alpha_1| + \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}|\alpha_i\alpha_j| + \ldots + |\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n| = \prod_{i=1}^{n}(1+|\alpha_i|)-1.$$

Corolar 1. *Orice produs absolut convergent cu termeni nenuli, este convergent.*

Dem. Fie $\prod_{n\geq 1}(1+\alpha_n)$ un produs infinit absolut convergent cu $1+\alpha_n \neq 0$, $(\forall)\ n \geq 1$. Fixăm $\varepsilon > 0$. Atunci (T.3.6.4.) $(\exists)\ n_\varepsilon \geq 1$ a.î.

$$\prod_{i=n+1}^{n+k}(1+|a_i|)-1 < \varepsilon,\quad (\forall)\ n \geq n_\varepsilon \wedge k \geq 1,$$

deci, cf. Lemei, avem :

$$\left|\prod_{i=n+1}^{n+p}(1+a_i)-1\right| \leq \prod_{i=n+1}^{n+p}(1+|a_i|)-1 \leq \varepsilon,\quad (\forall)\ n \geq n_\varepsilon \wedge k \geq 1.$$

Aplicînd din nou T.3.6.4. deducem că produsul infinit $\prod_{n\geq 1}(1+a_n)$ este convergent.

3.6.5. Teoremă. *Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ un şir de numere strict pozitive. Atunci $\prod_{n\geq 1} a_n$ este convergent $\Leftrightarrow$ seria $\sum_{n\geq 1} \ln a_n$ este convergentă.*

Dem. Să notăm cu p_n (resp. s_n) produsul parţial (resp. suma parţială) de ordinul n a produsului infinit (resp. seriei) din enunţ. Deoarece $x = e^{\ln x}$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}_+^*$, avem :

$$p_n = \prod_{i=1}^{n} a_i = e^{\ln \prod_{i=1}^{n} a_i} = e^{\sum_{i=1}^{n} \ln a_i} = e^{s_n},\quad (\forall)\ n \geq 1,$$

deci $p_n = e^{s_n}$ şi $s_n = \ln p_n$, $(\forall)\ n \geq 1$. Atunci seria $\sum_{n\geq 1} \ln a_n$ este convergentă $\Leftrightarrow$ şirul $(p_n)_{n\geq 1}$ este convergent şi are limita nenulă $\Leftrightarrow$ produsul infinit este convergent.

3.6.6. Teoremă. *Fie $(a_n)_{n\geq 1} \subseteq \mathbf{R}\setminus\{1\}$ a.î. $\sum_{n\geq 1} a_n^2 < +\infty$. Atunci produsul infinit $\prod_{n\geq 1}(1+a_n)$ este convergent $\Leftrightarrow$ seria $\sum_{n\geq 1} a_n$ este convergentă.*

Dem. Deoarece $\lim_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)-x}{x^2} = -\dfrac{1}{2}$, rezultă că $(\forall)\ [a, b] \subseteq (-1, \infty)$, $(\exists)\ M > 0$ a.î.

$$|\ln(1+x)-x| \leq Mx^2,\quad (\forall)\ x \in [a, b] \qquad (1)$$

Dacă produsul infinit $\prod_{n\geq 1}(1+a_n)$ este convergent sau seria $\sum_{n\geq 1} a_n$ este convergentă, putem presupune (P.3.6.3.; P.3.1.4.) că $(\exists)\ -1 < a < b < +\infty$ cu $a_n \in [a, b]$ $(\forall)\ n \geq 1$. Atunci cf. (1) $(\exists)\ M > 0$ a.î.

$$|\ln(1+a_n)-a_n| \leq M a_n^2,\quad (\forall)\ n \geq 1,$$

deci

$$\sum_{n\geq 1} |\ln(1+a_n)-a_n| \leq \sum_{n\geq 1} a_n^2 < +\infty.$$

De aici rezultă că seria $\sum_{n\geq 1}(\ln(1+a_n)-a_n)$ este absolut convergentă, deci seriile $\sum_{n\geq 1} a_n$ şi $\sum_{n\geq 1} \ln(1+a_n)$ au aceeaşi natură. Însă (T.3.6.5.) ultima serie are

aceeași natură cu produsul infinit $\prod_{n\geq 1}(1 \dotplus a_n)$, prin urmare seria $\sum_{n\geq 1} a_n$ și produsul infinit $\prod_{n\geq 1}(1 + a_n)$ au aceeași natură.

3.6.7. Teoremă. *Fie* $(a_n)_{n\geq 1} \subseteq \mathbf{R}_+^*$ *sau* $(a_n)_{n\geq 1} \subseteq \mathbf{R}_-^* \setminus \{-1\}$. *Atunci produsul infinit* $\prod_{n\geq 1}(1 + a_n)$ *este convergent* $\Leftrightarrow$ *seria* $\sum_{n\geq 1} a_n$ *este convergentă.*

Dem. Dacă produsul infinit $\prod_{n\geq 1}(1+a_n)$ este convergent sau seria $\sum_{n\geq 1} a_n$ este convergentă, atunci (P.3.6.3.; P.3.1.4.) $a_n \to 0$, deci dînd la o parte un număr finit de termeni a_n, ceea ce nu schimbă natura produsului (resp. seriei), putem presupune că $(a_n)_{n\geq 1} \subseteq (0,1)$ sau $(a_n)_{n\geq 1} \subseteq (-1,0)$. Atunci avem (P.5.3.16.(2°)):

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1 + a_n)}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{-\ln(1 \dotplus a_n)}{-a_n} = 1 \qquad (1)$$

(i) Dacă $(a_n)_{n\geq 1} \subseteq (0,1)$, avem că seriile $\sum_{n\geq 1} a_n$ și $\sum_{n\geq 1} \ln(1 \dotplus a_n)$ au termenii strict pozitivi, deci din (1) și P.3.2.3. Cor. 1, rezultă că ele sînt echivalente, deci ele au aceeași natură.

(ii) Dacă $(a_n)_{n\geq 1} \subseteq (-1,0)$, raționînd ca mai sus, obținem că $\sum_{n\geq 1}(-a_n) \sim \sum_{n\geq 1}(-\ln(1 + a_n))$, deci $\sum_{n\geq 1} a_n \sim \sum_{n\geq 1} \ln(1 \dotplus a_n)$.

În fine (T.3.6.5.), produsul infinit $\prod_{n\geq 1}(1 \dotplus a_n)$ are aceeași natură cu seria $\sum_{n\geq 1} \ln(1 \dotplus a_n)$, deci cu seria $\sum_{n\geq 1} a_n$.

Corolar 1. *Produsele infinite* $\prod_{n\geq 1}\left(1 + \frac{1}{n^\alpha}\right)$ *și* $\prod_{n\geq 1}\left(1 - \frac{1}{n^\alpha}\right)$ $(\alpha \in \mathbf{R})$ *sînt convergente pentru* $\alpha > 1$ *și divergente pentru* $\alpha \leqslant 1$.

Dem. Aplicăm T.3.2.5.Cor.1 și T.3.6.7.

Corolar 2. *In același cadru avem : produsul infinit* $\prod_{n\geq 1}(1 \dotplus a_n)$ ***este absolut convergent*** $\Leftrightarrow$ *seria* $\sum_{n\geq 1} a_n$ ***este absolut convergentă.***

CAPITOLUL 4

FUNCȚII REALE DE O VARIABILĂ REALĂ

Vom face la început cîteva considerații cu privire la funcțiile elementare, pe care le vom studia amănunțit în capitolele următoare. În continuare vom defini unele funcții particulare remarcabile: funcția parte întreagă, funcția signum, funcția lui Dirichlet etc. În restul capitolului ne vom opri asupra unor clase importante de funcții reale: monotone, cu proprietatea Darboux, mărginite, polinomiale etc.

4.1. Funcții reale de o variabilă reală. Generalități

Funcțiile definite pe mulțimi abstracte au puține proprietăți din care cauză au și puține aplicații. De aceea, vom considera funcții de la $\mathbf{R}$ la $\mathbf{R}$. O funcție $f: A \to B$, unde $B \subseteq \mathbf{R}$ (resp. $A \subseteq \mathbf{R}$) o vom numi *funcție reală* (resp. *de o variabilă reală*). Și aceste funcții sînt mult prea generale. De aceea se studiază funcții reale *concrete* de o variabilă reală i.e. a căror expresie analitică poate fi scrisă (precizată) și al căror grafic poate fi ușor reprezentat. Cele mai importante și mai utile în aplicații funcții concrete de la $\mathbf{R}$ la $\mathbf{R}$ sînt următoarele: funcțiile *polinomiale*, funcțiile *trigonometrice*, funcțiile *trigonometrice inverse*, funcția *exponențială*, funcția *logaritmică*, funcția *putere*, funcțiile *etajate* și altele. Vom defini pe parcurs fiecare din aceste funcții și vom prezenta principalele lor proprietăți.

Notăm cu *trig* una din cele patru funcții trigonometrice: sin, cos, tg, ctg; notăm cu *arc trig*, una din cele patru funcții trigonometrice inverse: arc sin etc. Considerăm apoi următoarea clasă de funcții $\mathcal{E}_0 := \{c;\ \mathbf{1}_{\mathbf{R}},\ \exp_a,\ (\cdot)^a,\ \log_a,\ \text{trig},\ \text{arc trig}\}$ i.e. $\mathcal{E}_0$ este formată din: funcțiile *constante*, funcția *identitate* pe $\mathbf{R}$, *funcția exponențială* (de bază a), funcția *putere*, funcția *logaritmică* (de bază a), funcțiile *trigonometrice* și funcțiile *trigonometrice inverse*. Vom spune că o funcție f este *funcție elementară* dacă poate fi obținută din $\mathcal{E}_0$ aplicînd de un număr finit de ori, cele 4 operații aritmetice: *adunarea*, *scăderea*, *înmulțirea* și *împărțirea* cît și *compunerea* a două funcții. Elementele lui $\mathcal{E}_0$ se numesc funcții *elementare de bază*.

Să notăm cu $\mathcal{E}$ mulțimea funcțiilor elementare. Observăm că funcția x^n (i.e. $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^n$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$) aparține lui $\mathcal{E}$; ea poate fi obținută din funcția $\mathbf{1}_{\mathbf{R}}$ prin înmulțire cu ea însăși de n ori. De aici rezultă imediat că funcțiile *polinomiale* și funcțiile *raționale* aparțin lui $\mathcal{E}$. Funcția *radical* este un caz particular de funcție putere, deci aparține lui $\mathcal{E}$. De asemenea, funcțiile *trigonometrice hiperbolice* aparțin lui $\mathcal{E}$ etc. Orice funcție elementară f poate fi

dată printr-o *formulă* i.e. printr-un număr finit de simboluri matematice, aplicate elementelor din $\mathfrak{E}_0$. În fine, să observăm că funcția *modul*, funcțiile *etajate*, funcțiile *neconstante* care au un număr finit de valori etc. nu sînt funcții elementare.

Dacă f este o funcție elementară definită pe A și cu valori în $B (A, B \subseteq \subseteq \mathbf{R})$, prin *convenție* se scrie adesea $y = f(x)$ în loc de $f: A \to B$ și se spune prin abuz de limbaj „fie funcția $y = f(x)$" în loc de „fie funcția $f: A \to B$". Dacă *mulțimea de definiție a lui f nu este precizată se subînțelege că ea este mulțimea D_f a tuturor punctelor x din* $\mathbf{R}$ pentru *care $f(x)$ are sens*. Mulțimea D_f se numește impropriu *domeniu maxim de definiție* al funcției f. Dacă ρ este *relație* univocă de la mulțimea (abstractă) A la mulțimea (abstractă) B, atunci $(\exists)$ $A_0 \subseteq A$ maximă a.i. $f := \rho \cap (A \times B)$ este o funcție; să numim f *funcția naturală asociată* relației ρ. Atunci cînd spunem „fie funcția (elementară) $y = f(x)$" de fapt este vorba de funcția naturală asociată relației de la $\mathbf{R}$ la $\mathbf{R}$ definită prin egalitatea $y = f(x)$.

Exemple

1) Funcția $f(x) = \sqrt{x}$, $x \in [0, 1]$, este diferită de funcția $g(x) = \sqrt{x}$, deoarece în cazul al doilea se subînțelege că mulțimea de definiție este $[0, \infty)$. Analog funcția $f(x) = \sin x$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, este diferită de funcția $g(x) = \sin x$ i.e. de funcția $g(x) = \sin x$, $x \in \mathbf{R}$.

2. Dacă $f(x) = \sqrt{\ln x}$, atunci $D_f = [1, \infty)$.

3. Dacă $f(x) = \frac{\sqrt{1-x}}{\ln x}$, atunci $D_f = (0,1)$.

4. Dacă $f(x) = \arcsin \frac{x-1}{\sqrt{2x^2 - 10x + 17}}$, atunci $D_f = \mathbf{R}$.

5. Fie $f: A \to B$ o funcție elementară și $f(x) = \sqrt{\varphi(x)}$, $\ln \varphi(x)$, $\arcsin \varphi(x)$, resp. $\operatorname{tg} \varphi(x)$. Atunci D_f este egală cu $\{x \in A;\ \varphi(x) \geqslant 0\}$, $\{x \in A;\ \varphi(x) > 0\}$, $\{x \in A;\ |\varphi(x)| \leqslant 1\}$, resp. $\left\{x \in A;\ \varphi(x) \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbf{Z}\right\}$.

Dacă f și g sînt două funcții (abstracte), am putut defini cu ele o nouă funcție și anume *compunerea lor*. Dacă însă f și g sînt funcții *reale de o variabilă reală*, atunci putem defini cu ajutorul lor și alte funcții noi în afară de compunerea lor.

Fie $f: A \to \mathbf{R}$, $g: B \to \mathbf{R}$ două funcții elementare; atunci vom scrie:

$$\left.\begin{aligned}(f \pm g)(x) &:= f(x) \pm g(x)\\ (f \cdot g)(x) &:= f(x) \cdot g(x)\end{aligned}\right\}, \ (\forall)\ x \in A \cap B;$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) := \frac{f(x)}{g(x)}, (\forall)\ x \in A \cap B \setminus \{t \in B;\ g(t) = 0\}$$

Funcțiile trigonometrice sin și cos pot fi definite riguros prin relațiile:

$$\left.\begin{aligned}\sin x &:= \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots, (\forall)\ \ x \in \mathbf{R}\\ \cos x &:= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \ldots, (\forall)\ \ x \in \mathbf{R}\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Mai departe se utilizează definițiile standard :

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg} x &:= \frac{\sin x}{\cos x},\ (\forall)\ x \in \mathbf{R} \setminus \{t \in \mathbf{R};\ \cos t = 0\} \\ \operatorname{ctg} x &:= \frac{\cos x}{\sin x},\ (\forall)\ x \in \mathbf{R} \setminus \{t \in \mathbf{R};\ \sin t = 0\} \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Demonstrația tuturor proprietăților cunoscute ale funcțiilor trigonometrice plecîndu-se de la relațiile (1)—(2) este destul de anevoioasă ([23]). Considerăm însă că proprietățile pe care le au aceste funcții sînt mai importante decît definiția lor riguroasă, de aceea vom utiliza în acest volum, în mod frecvent, proprietățile elementare cunoscute ale funcțiilor trigonometrice, fără a ne preocupa de fapt de existența lor. Definiția lor geometrică simplă, bine cunoscută, dă totuși suficiente motive de credibilitate că asemenea funcții există. Relațiile (1)—(2) vor fi atunci demonstrate, cu ajutorul formulei lui Taylor (Cap. 12).

În continuare să definim unele funcții particulare remarcabile, care vor sta permanent în atenția noastră.

4.1.1. Definiție. Fie A o mulțime și $f : A \to \mathbf{R}$ o funcție. Dacă $(\exists)\ c \in \mathbf{R}$ a.î. $f(x) = c$, $(\forall)\ x \in A$, vom spune că f este (funcția) *constantă* și vom scrie $f = c$. În particular, dacă $c = 0$, vom spune că f este *funcția* (identic) *nulă* (pe A) și vom scrie $f = 0$.

4.1.2. Definiție. Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ o funcție definită astfel $f(x) = \dfrac{x}{|x|}$, dacă $x \neq 0$ și $f(0) = 0$. Atunci f se numește funcția *signum* și se notează cu sign.

Graficul funcției sign este reprezentat în fig. 5

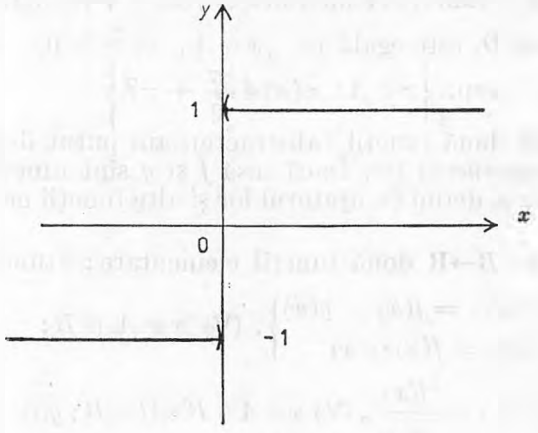
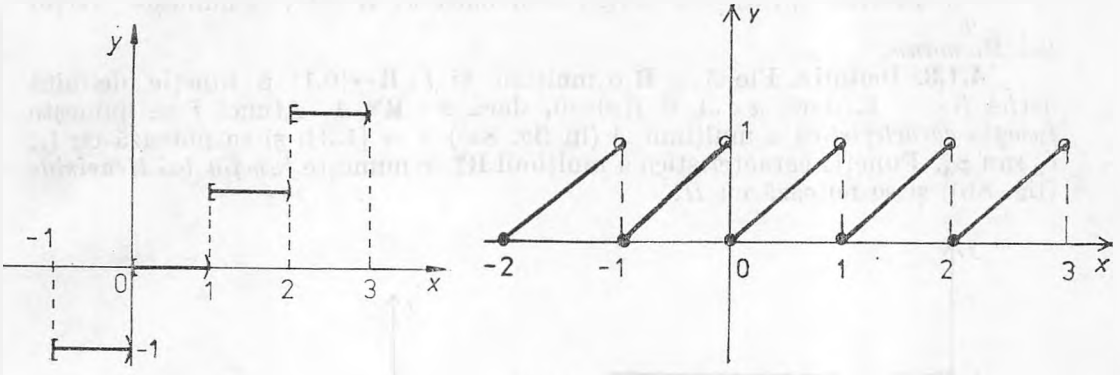


Fig. 5

4.1.3. Definiție. Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ o funcție definită astfel : $f(x)$ este cel mai mare întreg n cu proprietatea că $n \leqslant x$ i.e. $f(x) = \sup \{n \in \mathbf{Z},\ n \leqslant x\}$. Funcția f se numește *funcția parte întreagă* (fig. 6a), și se notează cu* E, $[\cdot]_*$ sau $[\cdot]$,

* Entier (întreg)

iar numărul $f(x)$ ($x \in \mathbf{R}$) se numește *partea întreagă* a lui x. Funcția $g(x) = x - E(x)$, $x \in \mathbf{R}$ se numește *funcția parte zecimală*, (fig. 6b)) iar numărul $x - E(x)$ ($x \in \mathbf{R}$) se numește *partea zecimală* a lui x.



a) Fig. 6 b)

4.1.4. Definiție. Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ o funcție definită astfel $f(x)$ este *distanța de la x la cel mai apropiat întreg* i.e. $f(x) = \inf \{|x - n|;\ n \in \mathbf{Z}\}$. Funcția f se notează cu $\{\cdot\}$ (fig. 7).

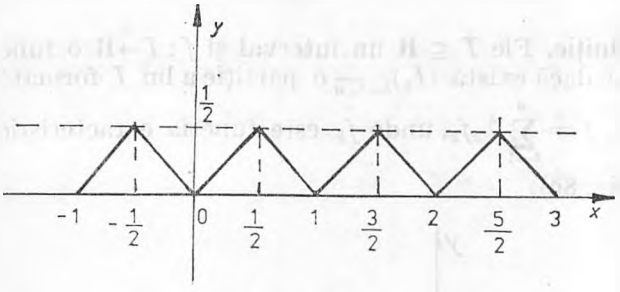


Fig. 7

a) $E(x) \leqslant x < E(x) + 1$, $(\forall)$ $x \in \mathbf{R}$;

b) $0 \leqslant x - E(x) < 1$, $(\forall)$ $x \in \mathbf{R}$;

c) $\{x\} = \min \{x - E(x),\ E(x) + 1 - x\}$, $(\forall)$ $x \in \mathbf{R}$;

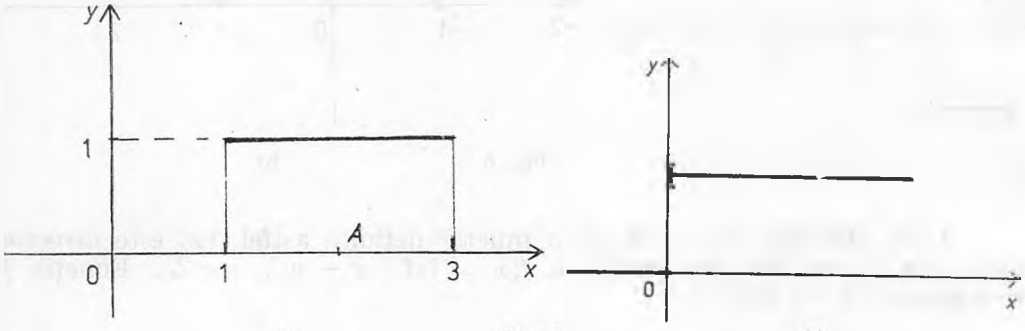
d) $\{x\} = x - n$, dacă $n \leqslant x \leqslant n + \frac{1}{2}$ și $\{x\} = n + 1 - x$, dacă $n + \frac{1}{2} < x \leqslant n + 1$.

4.1.5. Definiție. Funcția $f : \mathbf{R} \to \{0,1\}$ definită astfel : $f(x) = 1$, dacă $x \in \mathbf{Q}$ și $f(x) = 0$, dacă $x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$, se numește *funcția lui Dirichlet*.

4.1.6. Definiție. Funcția $f : \mathbf{R} \to (-1,1)$ definită astfel $f(x) = \dfrac{x}{1 + |x|}$, se numește *funcția lui Hahn*.

4.1.7. Definiție. Funcția $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definită astfel: $f(x) = \frac{1}{q}$, dacă $x \in \mathbf{Q}^*$, $x = \frac{p}{q}$, $q > 1$, și $(p, q) = 1$ și $f(x) = 0$, dacă $x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}^*$, se numește *funcția lui Riemann.*

4.1.8. Definiție. Fie $A \subseteq \mathbf{R}$ o mulțime și $f: \mathbf{R} \to \{0,1\}$ o funcție definită astfel $f(x) = 1$, dacă $x \in A$ și $f(x) = 0$, dacă $x \in \mathbf{R} \setminus A$. Atunci f se numește *funcția caracteristică* a mulțimii A (în fig. 8a)) $A = [1,3]$) și se notează cu 1_A, c_A sau φ_A. Funcția caracteristică a mulțimii $\mathbf{R}_+^*$ se numește *funcția lui Heaviside* (fig. 8b)) și se notează cu H.



a) Fig. 8 b)

4.1.9. Definiție. Fie $I \subseteq \mathbf{R}$ un interval și $f: I \to \mathbf{R}$ o funcție. Vom spune că f este *etajată* dacă există $(I_k)_{k=\overline{1,n}}$ o partiție a lui I formată cu intervale și $(\lambda_k)_{k=\overline{1,n}} \subseteq \mathbf{R}$ a.î. $f = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f_k$, unde f_k este funcția caracteristică a intervalului $I_k (k = \overline{1, n})$. (fig. 8c))

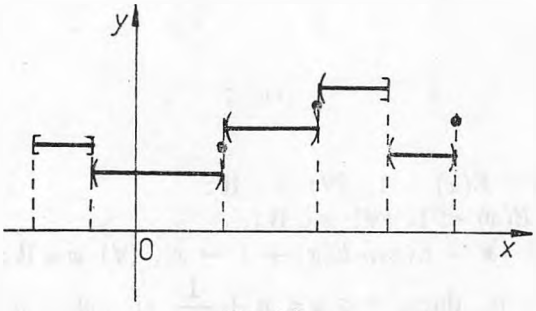


Fig. 8c)

a) Funcția $f: I \to \mathbf{R}$ este etajată $\Leftrightarrow (\exists)$ $(I_k)_{k=\overline{1,n}}$ o partiție a lui I a.î. f este constantă pe fiecare I_k $(k = \overline{1, n})$.

b) Funcția $f: I \to \mathbf{R}$ este etajată $\Leftrightarrow$ Există o diviziune a lui I a.î. f este constantă pe interiorul fiecărui interval parțial al diviziunii.

4.1.10. Definiție. Fie $A \subseteq \mathbf{R}$ o mulțime și $f: A \to \mathbf{R}$ o funcție. Vom spune că f este *izometrică* (*izometrie*), dacă

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |x_1 - x_2|, \ (\forall)\ x_1, x_2 \in A$$

Dacă $(\exists)\ \lambda > 0$ a.î.

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant \lambda |x_1 - x_2|,\ (\forall)\ x_1,\ x_2 \in A,$$

vom spune că f satisface *condiția lui Lipschitz* sau că este λ — *lipschitziană*. O funcție λ — lipschitziană cu $0 < \lambda < 1$ se numește *contracție* (λ — contracție). Vom spune că f este *local lipschitziană*, dacă $(\forall)\ x \in A$, $(\exists)\ V \in \mathcal{V}(x)$ a.î. $f|_{A \cap V}$ este lipschitziană.

Dacă $(\exists)\ p \in (0,1)$, $(\exists)\ M > 0$ a.i. $|f(x) - f(y)| \leqslant M|x - y|^p$, $(\forall)\ x, y \in A$, vom spune că f satisface condiția lui Hölder (este p — hölderiană).

a) Orice funcție izometrică este lipschitziană. Reciproca nu este numaidecît adevărată (v. Exemplul 1).

b) Orice funcție lipschitziană este local lipschitziană. Reciproca nu este numaidecît adevărată (v. Exemplul 2).

Exemplul 1. *Funcțiile* sin *și* cos *sînt* 1-*lipschitziene i.e.*

$$|\sin x - \sin y| \leqslant |x - y|,\ |\cos x - \cos y| \leqslant |x - y|,\ (\forall)\ x, y \in \mathbf{R}$$

Într-adevăr $(\forall)\ x, y \in \mathbf{R}$, avem :

$$\sin x - \sin y = 2 \sin \frac{x - y}{2} \cos \frac{x + y}{2},\ (\forall)\ x, y \in \mathbf{R}.$$

deci

$$|\sin x - \sin y| \leqslant 2 \cdot \left| \frac{x - y}{2} \right| \cdot 1 = |x - y|$$

(Ținem seamă că $|\sin t| \leqslant |t|$, $(\forall)\ t \in \mathbf{R}$ și $|\cos t| \leqslant 1$, $(\forall)\ t \in \mathbf{R}$)

Exemplul 2. *Funcția* $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *definită astfel* $f(x) = x^2$, *nu este lipschitziană.*

Presupunem prin absurd că $(\exists)\ \lambda > 0$ a.î.

$$|x^2 - y^2| \leqslant \lambda |x - y|,\ (\forall)\ x, y \in \mathbf{R} \Leftrightarrow |x + y| \leqslant \lambda,\ (\forall)\ x, y \in \mathbf{R},$$

deci $|x| \leqslant \lambda$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$, absurd.

Vom prezenta acum cîteva identități trigonometrice necesare în capitolele următoare :

4.1.11. Propoziție (E u l e r). *Să se arate identitățile* :

$$\cos\theta + \cos(\theta + h) + \ldots + \cos(\theta + (n-1)h) = \frac{\sin \frac{nh}{2}}{\sin \frac{h}{2}} \cos\left(\theta + \frac{n-1}{2} h\right)$$

$$\sin\theta + \sin(\theta + h) + \ldots + \sin(\theta + (n-1)h) = \frac{\sin \frac{nh}{2}}{\sin \frac{h}{2}} \sin\left(\theta + \frac{n-1}{2} h\right)$$

Dem. Să notăm prima sumă cu s_n, a doua cu σ_n și $\cos h + i \sin h$ cu z. Atunci avem :

$$s_n + i\sigma_n = (\cos\theta + i \sin\theta) + (\cos(\theta + h) + i \sin(\theta + h)) + \ldots +$$

$$+ (\cos(\theta + (n-1)h) + i \sin(\theta + (n-1)h)) =$$

$$= \cos(\theta + i \sin\theta)\,[1 + (\cos h + \sin h) + (\cos h + i \sin h)^2 + \ldots +$$

$$+ (\cos h + i \sin h)^{n-1}] = (\cos\theta + i \sin\theta)(1 + z + z^2 + \ldots + z^{n-1}) =$$

$$= (\cos\theta + i \sin\theta)\frac{1 - z^n}{1 - z} = (\cos\theta + i \sin\theta)\,\frac{1 - (\cos nh + i \sin nh)}{1 - (\cos h + i \sin h)} =$$

$$= (\cos\theta + i \sin\theta)\frac{2 \sin^2 \frac{nh}{2} - 2 i \sin \frac{nh}{2} \cos \frac{nh}{2}}{2 \sin^2 \frac{h}{2} - 2 i \sin \frac{h}{2} \cos \frac{h}{2}} =$$

$$= (\cos\theta + i \sin\theta)\frac{\sin \frac{nh}{2}}{\sin \frac{h}{2}} \cdot \frac{\sin \frac{nh}{2} - i \cos \frac{nh}{2}}{\sin \frac{h}{2} - i \cos \frac{h}{2}} =$$

$$= (\cos\theta + i \sin\theta)\frac{\sin \frac{nh}{2}}{\sin \frac{h}{2}} \cdot \frac{\cos \frac{nh}{2} + i \sin \frac{nh}{2}}{\cos \frac{h}{2} + i \sin \frac{h}{2}}$$

Ținînd seama ca și pînă acum că prin înmulțirea a două numere complexe argumentele se adună, iar prin împărțire argumentele se scad, obținem:

$$s_n + i\sigma_n = \frac{\sin \frac{nh}{2}}{\sin \frac{h}{2}} \left(\cos\left(\theta + \frac{nh}{2} - \frac{h}{2}\right)\right) + i \sin\left(\theta + \frac{nh}{2} - \frac{h}{2}\right)$$

De aici, prin identificare, se obțin identitățile căutate.

Corolar 1.

$$\cos\theta + \cos 2\theta + \ldots + \cos n\theta = \frac{\sin \frac{n\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}} \cos \frac{n+1}{2}\theta$$

$$\sin\theta + \sin 2\theta + \ldots + \sin n\theta = \frac{\sin \frac{n\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}} \sin \frac{n+1}{2}\theta$$

Dem. Înlocuim în identitățile arătate pe h cu θ.

Corolar 2.

$$\cos\theta + \cos 3\theta + \ldots + \cos (2n-1)\,\theta = \frac{\sin n\theta}{\sin \theta} \cos n\theta$$

$$\sin\theta + \sin 3\theta + \ldots + \sin (2n-1)\,\theta = \frac{\sin n\theta}{\sin \theta} \sin n\theta$$

Soluție. Înlocuim în identitățile arătate pe h cu 2θ.

Corolar 3.

$$\frac{1}{2} + \cos\theta + \cos 2\theta + \ldots + \cos n\theta = \frac{\sin\frac{2n+1}{2}\theta}{2\sin\frac{\theta}{2}}$$

$$1 + \sin 3\theta + \sin 5\theta + \ldots + (2n+1)\theta = \frac{\sin^2(n+1)\theta}{\sin\theta}$$

Corolar 4.

$$\sin^2\theta + \sin^2 2\theta + \ldots + \sin^2 n\theta = \frac{n}{2} - \frac{1}{2}\frac{\sin n\theta}{\sin\theta}\cos(n+1)\theta$$

$$\sin^2\theta + \cos^2 2\theta + \ldots + \cos^2 n\theta = \frac{n}{2} + \frac{1}{2}\frac{\sin n\theta}{\sin\theta}\cos(n+1)\theta$$

Dem. Înlocuim în prima identitate din Cor. 1 pe θ cu 2θ și ținem seama de relațiile $\sin^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{2}$, $\cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2}$

4.1.12. Propoziție. *Să se stabilească relația*

$$\frac{n+1}{2} + n\cos\theta + (n-1)\cos 2\theta + \ldots + \cos n\theta = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin(n+1)\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\right)^2$$

Dem. Din 4.1.11. Cor. 3 avem:

$$\frac{1}{2} + \cos\theta + \cos 2\theta + \ldots + \cos n\theta = \frac{\sin\frac{2n+1}{2}\theta}{2\sin\frac{\theta}{2}}$$

$$1 + \sin\theta + \sin 3\theta + \ldots + \sin(2n+1)\theta = \frac{\sin^2(n+1)\theta}{2\sin\frac{\theta}{2}},$$

deci

$$\frac{1}{2} = \frac{\sin\frac{\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}}$$

$$\frac{1}{2} + \cos\theta = \frac{\sin\frac{3\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}}$$

$$\frac{1}{2} + \cos\theta + \cos 2\theta = \frac{\sin\frac{5\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}}$$

. . . . . .

$$\frac{1}{2} + \cos\theta + \cos 0 + \ldots + \cos n\theta = \frac{\sin\frac{2n+1}{2}\theta}{2\sin\frac{\theta}{2}}$$

Prin adunare se obține :

$$\frac{n+1}{2} + n\cos\theta + (n-1)\cos 2\theta + \ldots + \cos n\theta =$$

$$= \frac{1}{2\sin\frac{\theta}{2}}\left[\sin\frac{\theta}{2} + \sin 3\frac{\theta}{2} + \ldots + \sin(2n+1)\frac{\theta}{2}\right] =$$

$$= \frac{1}{2\sin\frac{\theta}{2}} \cdot \frac{\sin^2(n+1)\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin(n+1)\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\right)^2$$

4.1.13. Propoziție. *Să se calculeze sumele :*

$$\cos\theta + a\cos(\theta + h) + a^2\cos(\theta + 2h) + \ldots + a^n\cos(\theta + nh)$$

$$\sin\theta + a\sin(\theta + h) + a^2\sin(\theta + 2h) + \ldots + a^n\sin(\theta + nh),$$

unde $a,\ \theta,\ h \in \mathbf{R}$ *și* $n \in \mathbf{N}$.

Dem. Să notăm prima sumă cu s_n a doua sumă că σ_n și $\cos h + i\sin h$ cu z. Atunci, ținînd seama că prin înmulțirea (resp. împărțirea) a două numere complexe argumentele se adună (resp. se scad), obținem :

$$s_n + i\sigma_n = [\cos\theta + i\sin\theta] + a[\cos(\theta + h) + i\sin(\theta + h)] +$$

$$+ a^2[\cos(\theta + 2h) + i\sin(\theta + 2h)] + \ldots + a^n[\cos(\theta + nh) + i\sin(\theta + nh)] =$$

$$= [\cos\theta + i\sin\theta] \cdot [1 + a(\cos h + i\sin h) + \ldots + a^n(\cos nh + i\sin nh)] =$$

$$= [\ldots][1 + az + (az)^2 + \ldots + (az)^n] = [\ldots]\frac{1 - (az)^{n+1}}{1 - az} =$$

$$= [\ldots] \cdot \frac{1 - a^{n+1}[\cos(n+1)h + i\sin(n+1)h]}{(1 - a\cos h) - ia\sin h} =$$

$$= [\cdots]\frac{[(1 - a^{n+1}\cos(n+1)h) - ia^{n+1}\sin(n+1)h] \cdot [(1 - a\cos h) + ia\sin h]}{(1 - a\cos h)^2 + a^2\sin^2 h} =$$

$$= [\ldots]\frac{\{[1 - a^{n+1}\cos(n+1)h](1 - a\cos h) + a^{n+2}\sin(n+1)h\sin h\}}{1 - 2a\cos h + a^2} +$$

$$+ [\ldots]\frac{i\{[1 - a^{n+1}\cos(n+1)h]a\sin h - a^{n+1}\sin(n+1)h(1 - a\cos h)\}}{1 - 2a\cos h + a^2}$$

Efectuînd calculele în fiecare paranteză $\{\ldots\ldots\}$, avem :

$$s_n + i\sigma_n = [\ldots]\frac{1 - a\cos h - a^{n+1}\cos(n+1)h + a^{n+2}\cos nh}{1 - 2a\cos h + a^2} +$$

$$+ [\ldots]\frac{i(a\sin h - a^{n+1}\sin(n+1)h + a^{n+2}\sin nh)}{1 - 2a\cos h + a^2} =$$

Înmulţind cu $\cos\theta + i\sin\theta$ şi efectuînd calculele, deducem :

$$s_n + i\sigma_n = \frac{\cos\theta - a\cos(\theta - h) - a^{n+1}\cos(\theta + (n+1)h) + a^{n+2}\cos(\theta + nh)}{1 - 2a\cos h + a^2} +$$

$$+ i\,\frac{\sin\theta - a\sin(\theta - h) - a^{n+1}\sin(\theta + (n+1)h) + a^{n+2}\sin(\theta + nh)}{1 - 2a\cos h + a^2}$$

De aici rezultă relaţiile :

$$s_n = \frac{\cos\theta - a\cos(\theta - h) - a^{n+1}\cos(\theta + (n+1)h) + a^{n+2}\cos(\theta + nh)}{1 - 2a\cos h + a^2}$$

$$\sigma_n = \frac{\sin\theta - a\sin(\theta - h) - a^{n+1}\sin(\theta + (n+1)h) + a^{n+2}\sin(\theta + nh)}{1 - 2a\cos h + a^2}$$

Corolar 1.

$$\left.\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} a^k\cos kh &= \frac{1 - a\cos h - a^{n+1}\cos(n+1)h + a^{n+2}\cos nh}{1 - 2a\cos h + a^2}\\ \sum_{k=0}^{n} a^k\sin kh &= \frac{a\sin h - a^{n+1}\sin(n+1)h + a^{n+2}\sin nh}{1 - 2a\cos h + a^2},\end{aligned}\right| \begin{array}{l}(\forall)\ a,\ h \in \mathbf{R},\\ (\forall)\ n \in \mathbf{N}\end{array}$$

Corolar 2.

$$\sum_{n\geq 0} a^n\cos nh = \frac{1 - a\cos h}{1 - 2a\cos k + a^2};\quad \sum_{n\geq 0} a^n\sin nh = \frac{a\sin h}{1 - 2a\cos h + a^2},$$

$$(\forall)\ a,\ h \in \mathbf{R}$$

4.2. Funcţii monotone reale

Am definit monotonia pentru funcţii definite pe o mulţime ordonată cu valori într-o mulţime ordonată (D.1.4.14). Corpul numerelor reale $\mathbf{R}$ fiind o mulţime (complet) ordonată, are sens monotonia pentru funcţii reale de o variabilă reală.

a) Fie $A \subseteq \mathbf{R}$ o mulţime şi $f : A \to \mathbf{R}$ o funcţie. Atunci f este monoton crescătoare (resp. strict crescătoare) $\Leftrightarrow \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \geq 0$ (resp. >0), $(\forall)\ x_1, x_2 \in A$, $x_1 \neq x_2 \Leftrightarrow (f(x_1) - f(x_2))(x_1 - x_2) \geq 0$ (resp >0), $(\forall)\ x_1, x_2 \in A$, $x_1 \neq x_2$.

b) Un şir $(x_n)_{n\geq 1}$ cu elemente din $\mathbf{R}$ este monoton crescător (resp. strict crescător) $\Leftrightarrow \frac{x_n - x_m}{n - m} \geq 0$, (resp. >0) $(\forall)\ n, m, \in \mathbf{N}$, $n \neq m$.

Exemple

1. Funcția $x \mapsto E(x)$, $x \in \mathbf{R}$, este monoton crescătoare.

2. Funcțiile $x \mapsto \operatorname{sign} x$, $x \in \mathbf{R}$; $x \mapsto e^x$, $x \in \mathbf{R}$; $x \mapsto \ln x$, $x \in \mathbf{R}_+^*$; $x \mapsto x^n$, $x \in \mathbf{R}_+$, sînt strict crescătoare. Funcția $x \mapsto x^{2n}$, $x \in \mathbf{R}$, nu este monotonă.

3. Funcțiile trigonometrice sin și cos nu sînt monotone, însă $\sin|_A$ și $\cos|_B$ sînt strict monotone, dacă $A = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ și $B = [0, \pi]$.

4. Funcția lui Dirichlet nu este monotonă pe nici un interval nedegenerat $I \subseteq \mathbf{R}$.

5. Funcția caracteristică a unui interval $I \subseteq \mathbf{R}$ este monotonă $\Leftrightarrow I$ este nemărginit.

4.2.1. Propoziție. *Fie* $f : \mathbf{R} \to (-1,1)$ *funcția lui Hahn i.e.* $f(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$. *Atunci* f *este strict crescătoare, surjectivă și avem* $f^{-1}(y) = \dfrac{y}{1-|y|}$, $(\forall)\ y \in (-1,1)$.

Dem. Fie $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$, $x_1 < x_2$, fixați. Dacă $x_1 \geqslant 0$, avem :

$$f(x_1) - f(x_2) = \frac{x_1}{1+x_1} - \frac{x_2}{1+x_2} = \frac{x_1 - x_2}{(1+x_1)(1+x_2)} < 0,$$

deci $f(x_1) < f(x_2)$. Raționament analog dacă $x_2 < 0$. Dacă $x_1 < 0$ și $x_2 > 0$ atunci $f(x_1) < 0 < f(x_2)$.

Prin urmare, f este strict crescătoare.

Dacă $0 \leqslant y < 1$, atunci ecuația $\dfrac{x}{1+x} = y$ admite soluția unică $x = \dfrac{y}{1-y}$. Cum $x \geqslant 0$, avem $f(x) = \dfrac{x}{1+|x|} = y$, deci $x = f^{-1}(y)$.

Dacă $-1 < y < 0$, atunci ecuația $\dfrac{x}{1-x} = y$ admite soluția unică $x = \dfrac{y}{1+y}$. Cum $x < 0$, avem $f(x) = \dfrac{x}{1+x} = \dfrac{x}{1-x} = y$, deci $x = f^{-1}(y)$.

Așadar, $(-1,1) \subseteq f(\mathbf{R})$ și cum evident $f(\mathbf{R}) \subseteq (-1,1)$, avem egalitate etc.

Corolar 1.

$$\frac{|x_1+x_2|}{1+|x_1+x_2|} \leqslant \frac{|x_1|}{1+|x_1|} + \frac{|x_2|}{1+|x_2|}, \quad (\forall)\ x_1, x_2 \in \mathbf{R}$$

Dem. Deoarece f este strict crescătoare și $|x_1 + x_2| \leqslant |x_1| + |x_2|$, avem .

$$\frac{|x_1+x_2|}{1+|x_1+x_2|} = f(|x_1+x_2|) \leqslant f(|x_1|+|x_2|) =$$

$$= \frac{|x_1|+|x_2|}{1+|x_1|+|x_2|} = \frac{|x_1|}{1+|x_1|+|x_2|} + \frac{|x_2|}{1+|x_1|+|x_2|} \leqslant \frac{|x_1|}{1+|x_1|} + \frac{|x_2|}{1+|x_2|}$$

4.2.2. Propoziție. *Fie* $A \subseteq \mathbf{R}$ *o mulțime și* $f : A \to \mathbf{R}$ *o funcție. Atunci* f *este monotonă (resp. strict monotonă)* $\Leftrightarrow (\forall)\ x_1, x_2, x_3 \in A$, $x_1 < x_2 < x_3$, *rezultă*

$f(x_1) \leqslant f(x_2) \leqslant f(x_3)$ *sau* $f(x_1) \geqslant f(x_2) \geqslant f(x_3)$ (*resp.* $f(x_1) < f(x_2) < f(x_3)$ *sau* $f(x_1) > f(x_2) > f(x_3)$).

Dem. Implicaţia ($\Rightarrow$) este evidentă.

($\Leftarrow$) Presupunem f neconstantă, deci $(\exists)\ x_1, x_2 \in A$ cu $f(x_1) \neq f(x_2)$, spre exemplu $f(x_1) < f(x_2)$. Să arătăm că $(\forall)\ x, x' \in A$, $x < x'$, avem $f(x) \leqslant f(x')$.

Într-adevăr, intervalul $[x, x']$ este situat faţă de intervalul $[x_1, x_2]$ în următoarele şase poziţii (fig. 9) :

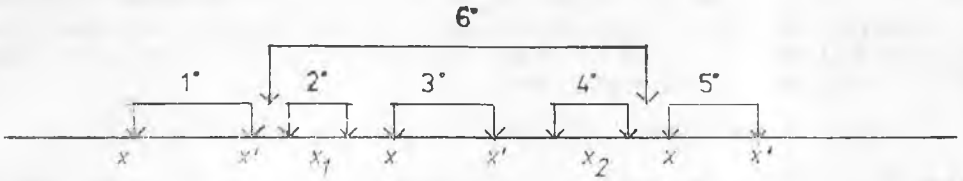


Fig. 9

Să analizăm prima situaţie:

1° $x < x' \leqslant x_1 < x_2$. Din $x' \leqslant x_1 < x_2$, rezultă

(i) $f(x') \leqslant f(x_1) \leqslant f(x_2)$ sau (ii) $f(x') \geqslant f(x_1) \geqslant f(x_2)$. Cum $f(x_1) < f(x_2)$, rezultă că (ii) este imposibil deci este adevărat (i) şi deci $f(x') < f(x_2)$. Analog din $x < x' < x_2$ rezultă (iii) $f(x) \leqslant f(x') \leqslant f(x_2)$ sau (iv) $f(x) \geqslant f(x') \geqslant f(x_2)$. Cum $f(x') < f(x_2)$, rezultă că (iv) este imposibil, deci este adevărat (iii) şi deci $f(x) \leqslant f(x')$.

Raţionament analog şi în cazurile 2°—6°.

Prin urmare, f este monoton crescătoare.

Corolar 1. *Fie* $A \subseteq \mathbf{R}$ *o mulţime şi* $f: A \to \mathbf{R}$ *o funcţie. Atunci* f *este monoton (resp. strict) crescătoare* $\Leftrightarrow (\forall)\ x_1, x_2, x_3 \in I$, *cu* x_2 *cuprins (resp. strict) între* x_1 *şi* x_3, *rezultă că* $f(x_2)$ *este cuprins (resp. strict) între* $f(x_1)$ *şi* $f(x_3)$.

4.2.3. Propoziţie. *Fie* $I \subseteq \mathbf{R}$ *un interval deschis şi* $f: I \to \mathbf{R}$ *o funcţie monotonă. Atunci* f *constantă (resp.* $f = 1_I$) $\Leftrightarrow (\exists)\ A \subseteq I$ *densă în* I *a.î.* f *este constantă pe* A (*resp.* $f(x) = x$, $(\forall)\ x \in A$).

Dem. ($\Leftarrow$) Fie $A \subseteq I$ densă în I şi $\alpha \in \mathbf{R}$ a.î. $f(a) = \alpha$, $(\forall)\ a \in A$ şi fie $x \in I$ fixat. Deoarece I este deschis, $(\exists)\ y, z \in I$ cu $y < x < z$, deci A fiind densă în I, $(\exists)\ a, b, \in A$ cu $y < a < x < b < z$. Funcţia f fiind monotonă, spre exemplu monoton crescătoare, avem $f(a) \leqslant f(x) \leqslant f(b)$, deci $\alpha \leqslant f(x) \leqslant \alpha$ (resp. $a \leqslant f(x) \leqslant b$) şi deci $f(x) = \alpha$ (resp. $f(x) = x$, considerăm) $y_n \nearrow x$ şi $z_n \searrow x$ cu $y_n, z_n \in I$ $(\forall)$ $n \geqslant 1$ etc.).

Corolar 1. *Fie* $I \subseteq \mathbf{R}$ *un interval deschis şi* $f: I \to \mathbf{R}$ *o funcţie monotonă. Atunci* f *constantă (resp.* $f = 1_I$) $\Leftrightarrow f$ *constantă pe* $I \cap \mathbf{Q}$ (*resp.* $f(x) = x$, $(\forall)$ $x \in I \cap \mathbf{Q}$).

Observaţie. În acelaşi mod se poate arăta o afirmaţie mai generală. *Fie* $I \subseteq \mathbf{R}$ *un interval deschis şi* $f, g: I \to \mathbf{R}$ *două funcţii, cu* f *monotonă şi* g *continuă; atunci* $f = g \Leftrightarrow (\exists)\ A \subseteq I$ *densă în* I *a.î.* $f(x) = g(x)$, $(\forall)\ x \in A$.

4.2.4. Definiţie. Fie $I \subseteq \mathbf{R}$ un interval şi $f: I \to \mathbf{R}$ o funcţie. Vom spune că f este *monoton crescătoare în punctul* $x_0 \in I$, dacă $(\exists)\ \eta = \eta(x_0) > 0$ a.î. $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geqslant 0$, $(\forall)\ x \in I$, $0 < |x - x_0| < \eta$. Înlocuind inegalitatea $\geqslant$ prin $>$, obţinem f *strict crescătoare în* x_0. Dacă schimbăm sensul inegalităţii $\geqslant$ (resp. $>$) prin $\leqslant$ (resp. $<$), obţinem f *monoton descrescătoare* (resp. *strict descrescătoare*) în x_0.

a) f monoton crescătoare în $x_0 \Leftrightarrow (\exists)\ \eta = \eta(x_0) > 0$ a.î. $f(y) \leqslant f(x_0) \leqslant f(z)$, $(\forall)\ y, z \in I$, $x_0 - \eta < y \leqslant x_0 \leqslant z < x_0 + \eta$.

b) f monoton descrescătoare în $x_0 \Leftrightarrow -f$ monoton crescătoare în x_0.

4.2.5. Propoziție. *Fie $I \subseteq \mathbf{R}$ un interval și $f : I \to \mathbf{R}$ o funcție. Atunci f monoton crescătoare (resp. descrescătoare) $\Leftrightarrow f$ monoton crescătoare (resp. descrescătoare) în fiecare punct din I.*

Dem. Implicația ($\Rightarrow$) este evidentă.

($\Leftarrow$) Fie $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$, fixați. Cum f este monoton crescătoare în x_1, $(\exists)\ 0 < \eta < x_2 - x_1$ cu $f(x_1) \leqslant f(x)$, $(\forall)\ x \in (x_1, x_1 + \eta)$. Considerăm mulțimea $A := \{t \in (x_1, x_2);\ f(x_1) \leqslant f(x),\ (\forall)\ x \in (x_1, t)\}$ și fie $c = \sup A$. Evident avem $x_1 < c \leqslant x_2$. Dacă $c < x_2$, fie $\eta > 0$ a.î. $(c - \eta, c + \eta) \subseteq I$ și $f(y) \leqslant f(c) \leqslant f(z)$, $(\forall)\ c - \eta < y \leqslant c \leqslant z < c + \eta$, deci

$$f(x_1) \leqslant f(y) \leqslant f(c) \leqslant f(z),\ (\forall)\ c - \eta < y \leqslant c \leqslant z < c + \eta$$

și deci $f(x_1) \leqslant f(x)$, $(\forall)\ x \in (x_1, c + \eta)$, încît $c + \eta \in A$, de unde rezultă $c = \sup A \geqslant c + \eta$, absurd. Rămîne că $c = x_2$. Atunci, f fiind monotonă în x_2, $(\exists)\ 0 < \eta < x_2 - x_1$ a.î. $f(y) \leqslant f(x_2)$, $(\forall)\ x_2 - \eta < y \leqslant x_2$. Cum $f(x_1) \leqslant f(t)$, $(\forall)\ t \in (x_1, c) = (x_1, x_2)$, rezultă $f(x_1) \leqslant f(x_2)$, prin urmare f este monoton crescătoare.

Corolar 1. *Fie $I \subseteq \mathbf{R}$ un interval și $f : I \to \mathbf{R}$ o funcție. Atunci f strict crescătoare (resp. descrescătoare) $\Leftrightarrow f$ strict cerscătoare (resp. descrescătoare) în fiecare punct din I.*

Observație. Dacă f este monoton crescătoare într-un punct $x_0 \in I$, nu rezultă numaidecît că f este monoton crescătoare pe o vecinătate a lui x_0.

Contraexemplu. Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ o funcție definită astfel $f(x) = \dfrac{x}{2} + x^2 \sin \dfrac{1}{x}$, dacă $x \neq 0$ și $f(0) = 0$. Atunci f nu este monotonă pe nici o vecinătate a lui 0 și $f'(0) = \dfrac{1}{2} > 0$, deci f este strict monotonă în 0.

4.3. Funcții cu proprietatea Darboux

4.3.1. Definiție. Fie $I \subseteq \mathbf{R}$ un interval și $f : I \to \mathbf{R}$ o funcție. Vom spune că f are *proprietatea Darboux* (prescurtat P.D.) dacă : $(\forall)\ a, b \in I$, $a < b$, și oricare ar fi γ cuprins între $f(a)$ și $f(b)$, există $c \in (a, b)$ a.î. $f(c) = \gamma$. Vom nota cu $\mathfrak{D}_a$ (I) mulțimea tuturor funcțiilor f : I $\to$ **R** care au proprietatea Darboux.

a) Funcția $f : I \to \mathbf{R}$ are proprietatea Darboux $\Leftrightarrow (\forall)\ a, b \in I$, $a < b$, mulțimea valorilor funcției f pe $[a, b]$, i.e. mulțimea $f([a, b])$, conține toate numerele reale cuprinse între $f(a)$ și $f(b)$.

b) Funcția $f : I \to \mathbf{R}$ are proprietatea Darboux $\Leftrightarrow (\forall)\ a, b \in I$, $a < b$, $(\forall)\ 0 < \lambda < 1$, $(\exists)\ c \in (a, b)$ a.î. $f(c) = (1 - \lambda) f(a) + \lambda f(b)$.

c) Funcția $f : I \to \mathbf{R}$ are proprietatea Darboux $\Leftrightarrow (\forall)\ a, b \in I$, $a < b$, $(\forall)\ \gamma$ cuprins între $f(a)$ și $f(b)$, paralela la Ox care trece prin punctul $(0, \gamma)$ intersectează graficul lui f într-un punct $(x, f(x))$ cu $x \in [a, b]$.

Observația 1. Fie $I \subseteq \mathbf{R}$ un interval și $f : I \to \mathbf{R}$ o funcție cu proprietatea : $(\forall)\ a, b \in I$, $a < b$, și oricare ar fi γ cuprins între $f(a)$ și $f(b)$, există $c \in I$ a.î. $f(c) = \gamma$. De aici nu rezultă numaidecît că f are proprietatea Darboux, ci doar faptul că $f(I)$ este un interval (v. Exemple).

Observația 2. Punctul c din D.4.3.1. nu este întotdeauna unic determinat. Pot exista o infinitate de puncte c din (a, b) a.î. $f(c) = \gamma$.

Exemple

1. Fie $f:[-4,2]\to[0,4]$ o funcție definită astfel $f(x)=x+4$, dacă $x\in[-4,0]$ și $f(x)=x$, dacă $x\in(0,2]$. Atunci f nu are P. D. Numărul $\gamma=2$ este cuprins între $f(-1)=3$ și $f(1)=1$ și avem $f(x)\neq 2$, $(\forall)x\in[-1,1]$.

2. Funcțiile $x\mapsto \operatorname{sign} x$, $x\in\mathbf{R}$; $x\mapsto E(x)$, $x\in\mathbf{R}$; $x\mapsto x-E(x)$, $x\in\mathbf{R}$, nu au P.D.

3. Funcțiile sin, cos, $\mathbf{1}_{\mathbf{R}}$, $|\cdot|$ au toate P.D.

4. Funcția lui Dirichlet nu are P. D.

5. Fie $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ o funcție definită astfel $f(x)=x$, dacă $x\in\mathbf{Q}$ și $f(x)=-x$, dacă $x\in\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}$. Atunci f nu are P.D. Observăm că $f(J)=J$, dacă J este un interval de forma $[-n,n]$ cu $n\in\mathbf{N}$.

4.3.2. Propoziție. *Fie $I\subseteq\mathbf{R}$ un interval și $f:I\to\mathbf{R}$ o funcție. Atunci condițiile* 1° — 4° *sînt echivalente*:

1° *f are proprietatea Darboux*;

2° $(\forall)$ *$J\subseteq I$ un interval, rezultă $f(J)$ interval*;

3° $(\forall)$ *$a,b\in I$, $a<b$, rezultă că $f([a,b])$ este interval*;

4° $(\forall)$ *$A\subseteq I$ convexă, rezultă $f(A)$ convexă.*

Dem. 1° $\Rightarrow$ 2°. Fie $J\subseteq I$ un interval. Fixăm $y_1,y_2\in f(J)$, $y_1<y_2$ și $y_1<\lambda<y_2$. Evident există $x_1,x_2\in J$ cu $f(x_i)=y_i$, $i=\overline{1,2}$. Cf. 1° $(\exists)$ x_0 cuprins între x_1 și x_2 cu $f(x_0)=\lambda$. Cum J este interval, avem $x_0\in J$, deci $\lambda=f(x_0)\in f(J)$, încît $[y_1,y_2]\subseteq f(J)$. Prin urmare (P.2.2.13.) $f(J)$ este interval.

2° $\Rightarrow$ 3°. Evident.

3° $\Rightarrow$ 4°. Evident; $A\subseteq I$ convexă $\Leftrightarrow$ A interval (P. 2.2.13.)

4° $\Rightarrow$ 1°. Fie $a,b\in I$, $a<b$ și λ cuprins între $f(a)$ și $f(b)$.
Atunci $f(a)$, $f(b)\in f([a,b])$ și cf. 4° $f([a,b])$ este interval, deci (P.2.2.13.) $\lambda\in f([a,b])$ și deci $(\exists)$ $x_0\in[a,b]$ cu $f(x_0)=\lambda$. Prin urmare f are proprietatea Darboux.

Corolar 1. *Fie $I\subseteq\mathbf{R}$ un interval și $f:I\to\mathbf{R}$ o funcție. Atunci f are proprietatea Darboux $\Leftrightarrow$ $(\forall)$ $J\subseteq I$ un interval, rezultă că $f|_J$ are proprietatea Darboux.*

4.3.3. Propoziție. *Fie $I\subseteq\mathbf{R}$ un interval și $f:I\to\mathbf{R}$ o funcție injectivă cu proprietatea Darboux. Atunci f este strict monotonă.*

Dem. Fie $x_1,x_2,x_3\in I$, $x_1<x_2<x_3$, fixați. Atunci (P.4.3.2. (2°)) $J_1:=f([x_1,x_2])$ și $J_2:=f([x_2,x_3])$ sînt intervale. Cum $f(x_2)\in J_1\cap J_2$ și f este injectivă, rezultă că $J_1\cap J_2=\{f(x_2)\}$ (fig. 10).

Fig. 10

Așadar, $f(x_1)<f(x_2)<f(x_3)$ sau $f(x_3)<f(x_2)<f(x_1)$, prin urmare (P.4.2.2). f este strict monotonă.

Corolar 1. *Fie $I\subseteq\mathbf{R}$ un interval și $f:I\to\mathbf{R}$ o funcție cu proprietatea lui Darboux. Atunci f este strict monotonă $\Leftrightarrow$ f este injectivă.*

4.3.4. Propoziție. *Fie $I\subseteq\mathbf{R}$ un interval și $f:I\to\mathbf{R}$ o funcție cu proprietatea Darboux. Dacă mulțimea $f(I)$ este cel mult numerabilă, atunci f este constantă.*

Dem. Deoarece f are proprietatea Darboux, rezultă (P.4.3.2. (2°)) că $f(I)$ este un interval. Cum $f(I)$ este cel mult numerabilă, deducem (P.2.3.23.) că $f(I)$ se reduce la un punct. Așadar, $(\exists)$ $c\in\mathbf{R}$ a.î. $f(I)=\{c\}$, deci f este constantă.

Corolar 1. *Fie $I \subseteq \mathbf{R}$ un interval și $f : I \to \mathbf{R}$ o funcție cu proprietatea Darboux care se anulează cel puțin într-un punct. Dacă mulțimea $f(I)$ este cel mult numerabilă, atunci $f = 0$.*

4.4. Funcții pare și funcții impare

4.4.1. Definiție. Fie $A \subseteq \mathbf{R}$ o mulțime. Vom spune că A este *simetrică în raport* cu *originea* sau simplu *simetrică*, dacă $A = -A$ i.e. $x \in A \Leftrightarrow -x \in A$. Dacă $x_0 \in \mathbf{R}$ și $A - x_0$ este simetrică, vom spune că A este *simetrică în rapor* cu x_0.

a) A simetrică $\Leftrightarrow A \subseteq -A \Leftrightarrow -A \subseteq A$;

b) A simetrică în raport cu $x_0 = A - x_0 = x_0 - A$.

4.2. Definiție. Fie $A \subseteq \mathbf{R}$ o mulțime și $f : A \to \mathbf{R}$ o funcție. Vom spune că f este *pară* (resp. *impară*), dacă $f(-x) = f(x)$ (resp. $f(-x) = -f(x)$), $(\forall)\, x \in A$. Dacă A este simetrică în raport cu x_0 și graficul lui f este simetric în raport cu dreapta de ecuație $x = x_0$, vom spune că f este *pară* (resp. *impară*) *în raport cu* x_0.

a) Dacă $A = -A$ și $f : A \to \mathbf{R}$, atunci f este pară (resp. impară) $\Leftrightarrow f$ este pară (resp. impară) în raport cu 0.

Exemple

1) Funcțiile sin și tg sînt impare, iar cos și ctg sînt pare.

2) Funcția lui Dirichlet este pară, iar funcția lui Hahn este impară.

3) Funcțiile $x \mapsto x^n$, $x \in \mathbf{R}$ și $x \mapsto x^{-n}$, $x \in \mathbf{R}^*$ sînt pare (resp. impare) $\Leftrightarrow n$ este par (resp. impar).

4) Fie $A \subseteq \mathbf{R}$ o mulțime și $f : A \to \mathbf{R}$ funcția caracteristică a mulțimii A. Atunci f este pară $\Leftrightarrow A = -A$.

5) Funcția $|\cdot|$ este pară, iar sign impară.

6) Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ o funcție arbitrară. Atunci funcția $x \mapsto f(x^2)$, $x \in \mathbf{R}$, este pară.

4.4.3. Propoziție. *Fie $A \subseteq \mathbf{R}$ o mulțime simetrică și $f : A \to \mathbf{R}$ o funcție. Atunci $(\exists)\, f_1, f_2 : A \to \mathbf{R}$ două funcții cu proprietățile : f_1 pară, f_2 impară și $f = f_1 + f_2$.*

Dem. Să punem :

$$f_1(x) := \frac{1}{2}(f(x) + f(-x)), \quad x \in A\,; \quad f_2(x) := \frac{1}{2}(f(x) - f(-x)),\ x \in A$$

Evident f_1 și f_2 satisfac proprietățile din enunț.

4.4.4. Propoziție. *Fie $A, B \subseteq \mathbf{R}$ două mulțimi cu A pară și fie $f : A \to B$ o funcție impară bijectivă. Atunci mulțimea B este simetrică, iar funcția $f^{-1} : B \to A$ este impară.*

Dem. Fie $B := f^{-1}(A)$. Să arătăm că $B = -B$ și

$$f^{-1}(-y) = -f^{-1}(y),\ (\forall)\, y \in B.$$

Într-adevăr, fie $y \in B$ fixat, deci $(\exists)\, x \in A$ cu $f(x) = y$ și deci

$$-y = -f(x) = f(-x) \in f(-A) = f(A) = B$$

și

$$f^{-1}(-y) = f(f^{-1}(-x)) = -x = -f^{-1}(y) \text{ etc.}$$

Corolar 1. *Funcțiile* arc sin *și* arc cos *sînt impare.*

4.5. Funcții periodice

4.5.1. Definiție. Fie $A \subseteq \mathbf{R}$ o mulțime și $f : A \to \mathbf{R}$ o funcție. Vom spune că f este *periodică*, dacă $(\exists)\ T > 0$ a.î.

$$x + T \in A \text{ și } f(x + T) = f(x),\ (\forall)\ x \in A \tag{1}$$

Numărul T se numește *o perioadă* a lui f. Cel mai mic număr pozitiv cu proprietatea (1) se numește *perioadă minimă* (cea mai mică perioadă).

Exemple

1. Funcțiile trigonometrice sin și cos sînt periodice și au perioada minimă 2π. Funcțiile tg și ctg sînt periodice și au perioada minimă π.

2. Funcția $x \mapsto \sin x^2$, $x \in \mathbf{R}$, nu este periodică.

3. Funcțiile $x \mapsto x - E(x)$, $x \in \mathbf{R}$, $x \mapsto (-1)^{E(x)}$, $x \in \mathbf{R}$; $x \mapsto \{x\}$, $x \in \mathbf{R}$, sînt periodice și au perioada minimă egală cu 1,2 și 1 respectiv.

4. Funcțiile $x \mapsto \text{arc sin}(\sin x)$, $x \in \mathbf{R}$; $x \mapsto \text{arc cos}(\cos x)$, $x \in \mathbf{R}$; $x \mapsto$ $\mapsto \text{arc tg}(\text{tg } x)$, $x \in \mathbf{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbf{Z}\right)$, sînt periodice și au perioada minimă egală cu 2π, 2π și π respectiv.

5. Orice număr $r \in \mathbf{Q}_+^*$ este o perioadă pentru funcția f a lui Dirichlet și totuși f nu posedă perioadă minimă.

Observația 1. Mulțimea de definiție a unei funcții periodice nu este numai decît toată dreapta reală.

Observația 2. Definiția dată se generalizează astfel. O funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ se numește *aproape periodică*, dacă : $(\forall)\ \varepsilon > 0$, există un polinom trigonometric $P(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k e^{i\alpha_k x}$ $(c_k \in \mathbf{C},\ r_k \in \mathbf{R})$ a.î. $|f(x) - P(x)| < \varepsilon$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$, i.e. $(\exists)\,(P_n)_{n>1}$ un șir de polinoame trigonometrice, care converg uniform pe $\mathbf{R}$ către f.

Se demonstrează următoarele rezultate :

1) *O funcție $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ continuă și periodică este aproape periodică.*

2) *O funcție $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ este aproape periodică* $\Leftrightarrow (\forall)\ \varepsilon > 0$, *există* $\eta_\varepsilon > 0$ *cu proprietatea că pentru orice interval $I \subseteq \mathbf{R}$ cu $|I| \geqslant \eta_\varepsilon$, există $\xi \in I$ a.î.* $|f(x) - f(x + \xi)| < \varepsilon$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$ (*condiția lui H. Bohr*).

4.6. Funcții mărginite. Extreme

4.6.1. Definiție. Fie A o mulțime arbitrară și $f : A \to \mathbf{R}$ o funcție. Vom spune că f este *mărginită* dacă mulțimea $f(A)$ este mărginită. O funcție care nu este mărginită se numește *nemărginită*. Dacă f este mărginită, atunci marginea superioară (resp. inferioară) a mulțimii $f(A)$ se numește *marginea superioară* (resp. *inferioară*) *a lui f pe mulțimea A* și se notează $\sup f(A)$, $\sup_{x \in A} f(x)$ (resp. $\inf f(A)$, $\inf_{x \in A} f(x)$). Vom spune că f este *majorată* (resp. *minorată*) pe A dacă mulțimea $f(A)$ este majorată (resp. minorată).

4.6.2. Definiție. Fie A o mulțime arbitrară și $f : A \to \mathbf{R}$ o funcție. Vom spune că *f își atinge maximul* (resp. *minimul*) pe A, dacă mulțimea $f(A)$ admite maxim (resp. minim), i.e. $(\exists)\ x_0 \in A$ a.î. $f(x_0) \geqslant f(x)$, $(\forall)\ x \in A$ (resp. $f(x_0) \leqslant f(x)$), $(\forall)\ x \in A$). Atunci $f(x_0)$ se numește *maximul* (resp. *minimul*) *global* al lui f pe A și se notează cu $\max f(A)$, $\max_{x \in A} f(x)$ (resp. $\min f(A)$, $\min_{x \in A} f(x)$), iar x_0 se numește punct de *maxim* (resp. *minim*) *global* pentru f. Maximul și minimul lui f se numesc *extremele globale* ale lui f.

a) Fie $f: A \to \mathbf{R}$ o funcție. Atunci f este mărginită $\Leftrightarrow |f|$ este mărginită $\Leftrightarrow |f|$ majorată.

b) Fie $f: A \to \mathbf{R}$ o funcție. Atunci f își atinge marginea superioară (resp. inferioară) dacă $\sup f(A) \in f(A)$ (resp. $\inf f(A) \in f(A)$).

c) Un punct de maxim (resp. minim) global este punct de maxim (resp. minim) local. Afirmația reciprocă nu este numaidecît adevărată.

d) O funcție $f: A \to \mathbf{R}$ care are un număr finit de valori este mărginită.

4.6.3. Definiție. Fie $A \subseteq \mathbf{R}$ o mulțime și $f: A \to \mathbf{R}$ o funcție. Vom spune că $x_0 \in A$ este *punct de maxim* (resp. *minim*) *local*, pentru f, dacă $(\exists)$ $V \in \mathcal{V}(x_0)$ o vecinătate a lui x_0 a.î. $f(x_0) \geqslant f(x)$ (resp. $f(x_0) \leqslant f(x)$), $(\forall)$ $x \in A \cap V \setminus \{x_0\}$. Dacă înlocuim inegalitatea $\geqslant$ (resp. $\leqslant$) prin inegalitatea strictă $<$ (resp. $>$), obținem *maxim* (resp. *minim*) *local în sens strict*. Punctele de maxim și minim local se numesc *extremele locale* ale lui f (în sens larg respectiv în sens strict.) Valoarea funcției f într-un punct de extrem local se numește *extrem local* al funcției.

Exemple

1. sin este o funcție mărginită. Punctele $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ $\left(\text{resp. } \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right)$, $k \in \mathbf{Z}$, sînt puncte de maxim (resp. minim) absolut.

2. tg nu este o funcție mărginită și nu are extreme locale;

$$\inf_{x \in A} f(x) = -\infty \text{ și } \sup_{x \in A} f(x) = +\infty, \text{ dacă } A = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

3. Funcția $x \mapsto |x|$, $x \in \mathbf{R}$, nu este mărginită și își atinge minimul în $x = 0$.

4. Funcția lui Dirichlet este mărginită însă nu are extreme locale. Fiecare $x_0 \in \mathbf{Q}$ (resp. $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$) este punct de maxim (resp. minim) global.

5. Funcția $x \mapsto \frac{1}{x}$, $x \in \mathbf{R}^*$, este nemărginită și nu are extreme locale.

6. Funcția lui Hahn i.e. funcția $f(x) = \frac{x}{1 + |x|}$, $x \in \mathbf{R}$, este mărginită, nu are extreme locale și nu-și atinge marginile.

7. Funcțiile monotone sînt mărginite pe orice mulțime mărginită care-și conține marginile.

8. Funcția $f(x) = \frac{x^3 + 1}{x^4 + 1}$, $x \in \mathbf{R}$, este mărginită și avem:

$$|f(x)| \leqslant \frac{|x|^3 + 1}{x^4 + 1} \leqslant 2, \text{ dacă } |x| \leqslant 1 \text{ și } |f(x)| \leqslant \frac{|x|^{-1} + |x|^{-4}}{1 + |x|^{-4}} \leqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{|x|} + \frac{1}{|x|^4} \leqslant 2, \text{ dacă } |x| \geqslant 1.$$

4.6.4. Propoziție. *Fie A o mulțime și $f: A \to \mathbf{R}$ o funcție. Atunci cond. $1° - 4°$ sînt echivalente*: $1°$ *f este mărginită*; $2°$ $(\exists)$ $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ *a.î.* $\alpha \leqslant f(x) \leqslant \beta$, $(\forall)$ $x \in A$; $3°$ $(\exists)$ $k > 0$ *a.î.* $|f(x)| \leqslant k$, $(\forall)$ $x \in A$; $4°$ $\sup_{x \in A} |f(x)| < +\infty$.

Dem. Aplicăm P.2.2.4. pentru mulțimea $f(A)$.

4.6.5. Propoziție. *Fie A o mulțime și $f, g: A \to \mathbf{R}$ două funcții mărginite. Atunci $f \pm g$ și fg sînt mărginite.*

Dem. Funcțiile f și g fiind mărginite, $(\exists)\ k_1, k_2 \in \mathbf{R}$ a.î. $|f(x)| \leqslant k_1$ și $|g(x)| \leqslant k_2$, $(\forall)\ x \in A$. Atunci $|f(x) \pm g(x)| \leqslant k_1 + k_2$, $(\forall)\ x \in A$, deci $f \pm g$ este mărginită etc.

4.6.6. Propoziție *Fie $A \subseteq \mathbf{R}$ o mulțime mărginită și $f : A \to \mathbf{R}$ o funcție lipschitziană. Atunci f este mărginită.*

Dem. A fiind mărginită, $(\exists)\ k > 0$ a.î. $|x| \leqslant k$, $(\forall)\ x \in A$. Funcția f fiind lipschitziană, $(\exists)\ \alpha > 0$ a.î. $|f(x) - f(y)| \leqslant \alpha |x - y|$, $(\forall)\ x, y \in A$. Fixăm $x_0 \in A$; atunci avem:

$$|f(x)| \leqslant |f(x) - f(x_0)| + |f(x_0)| \leqslant \alpha |x - x_0| + |f(x_0)| \leqslant$$

$$\leqslant \alpha |x| + \alpha |x_0| + |f(x_0)| \leqslant 2\alpha k + |f(x_0)|,\ (\forall)\ x \in A,$$

deci

$$\sup_{x \in A} |f(x)| \leqslant 2\alpha k + |f(x_0)| < +\infty \text{ și deci } f \text{ mărginită.}$$

4.6.7. Propoziție. *Fie A o mulțime și $f, g : A \to \mathbf{R}$ două funcții a.î. $f \leqslant g$. Atunci* $1^\circ\ \sup_{x \in A} f(x) \leqslant \sup_{x \in A} g(x)$; $2^\circ\ \inf_{x \in A} f(x) \leqslant \inf_{x \in A} g(x)$.

Dem. $1^\circ\ f(t) \leqslant g(t) \leqslant \sup_{x \in A} g(x)$, deci $\sup_{x \in A} f(t) \leqslant \sup_{x \in A} g(x)$ etc.

Observație. Dacă $f(x) < g(x)$, $(\forall)\ x \in A$, nu rezultă numaidecît că inegalitățile 1°—2° sînt stricte.

Contraexemplu. Fie $A = (0, 1)$, $f(x) = x^2$, $(\forall)\ x \in A$ și $g(x) = x$, $(\forall)\ x \in A$. Atunci $f(x) < g(x)$, $(\forall)\ x \in A$ și avem $\inf_{x \in A} f(x) = \inf_{x \in A} g(x)$, $\sup_{x \in A} f(x) = \sup_{x \in A} g(x)$.

4.6.8. Propoziție. *Fie A o mulțime și $f, g : A \to \mathbf{R}$ două funcții. Atunci au loc inegalitățile:*

$1^\circ\ \inf_{x \in A} f(x) + \sup_{x \in A} g(x) \leqslant \sup_{x \in A} (f(x) + g(x)) \leqslant \sup_{x \in A} f(x) + \sup_{x \in A} g(x)$;

$2^\circ\ \inf_{x \in A} f(x) + \sup_{x \in A} g(x) \geqslant \inf_{x \in A} (f(x) + g(x)) \geqslant \inf_{x \in A} f(x) + \inf_{x \in A} g(x)$;

$3^\circ\ \sup_{x \in A} f(x)g(x) \leqslant (\sup_{x \in A} f(x))(\sup_{x \in A} g(x))$, *dacă* $f \geqslant 0$, $g \geqslant 0$;

$4^\circ\ \sup_{x \in A} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\inf_{x \in A} f(x)}$, *dacă* $\inf_{x \in A} f(x) > 0$;

$5^\circ\ \inf_{x \in A} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\sup_{x \in A} f(x)}$, *dacă* $\sup_{x \in A} f(x) > 0$.

Dem. 1° Fie $\alpha := \inf_{x \in A} f(x)$, $\beta := \sup_{x \in A} f(x)$ și $\gamma := \sup_{x \in A} g(x)$. Evident avem: $f(x) + g(x) \leqslant \beta + \gamma$, $(\forall)\ x \in A$, de unde rezultă relația $\sup_{x \in A} (f(x) + g(x)) \leqslant \beta + \gamma$. Mai departe, deoarece $g(x) = (f(x) + g(x)) - f(x)$, $(\forall)\ x \in A$, din inegalitatea demonstrată rezultă

$$\sup_{x \in A} g(x) \leqslant \sup_{x \in A} (f(x) + g(x)) + \sup_{x \in A} (-f(x))$$

Cum $\sup_{x \in A} (-f(x)) = -\inf_{x \in A} f(x)$, rezultă inegalitatea:

$$\sup_{x \in A} g(x) + \inf_{x \in A} f(x) \leqslant \sup_{x \in A} (f(x) + g(x))$$

2° Aplicăm 1° pentru funcțiile $-f$ și $-g$.

3° $f(x)g(x) \leqslant \beta \cdot \gamma$, $(\forall)\ x \in A$ etc.

Corolar 1. *Fie* $(a_n)_{n\geqslant 1}$ *și* $(b_n)_{n\geqslant 1}$ *două șiruri din* $\mathbf{R}$. *Atunci avem inegalitățile:*

1° $\inf\limits_{n\geqslant 1} a_n + \sup\limits_{n\geqslant 1} b_n \leqslant \sup\limits_{n\geqslant 1} (a_n + b_n) \leqslant \sup\limits_{n\geqslant 1} a_n + \sup\limits_{n\geqslant 1} b_n$;

2° $\inf\limits_{n\geqslant 1} a_n + \sup\limits_{n\geqslant 1} b_n \geqslant \inf\limits_{n\geqslant 1} (a_n + b_n) \geqslant \inf\limits_{n\geqslant 1} a_n + \inf\limits_{n\geqslant 1} b_n$.

4.6.9. Definiție. Fie A o mulțime arbitrară și $f : A \to \mathbf{R}$ o funcție. Numărul $\sup\limits_{x\in A} |f(x)| \in \mathbf{R}_+ \cup \{\infty\}$ se numește *norma uniformă* a lui f și se notează cu $\|f\|_u$ sau $\|f\|_\infty$.

4.6.10. Propoziție. *Fie* A *o mulțime arbitrară,* $f, g \in \mathcal{F}(A)$ *și* $\lambda \in \mathbf{R}$. *Atunci avem:*

1° $\|f\|_\infty = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0, (\forall)\ x \in A$ *i.e.* $f = 0$;

2° $\|f\|_\infty \leqslant \alpha \Leftrightarrow |f(x)| \leqslant \alpha, (\forall)\ x \in A$;

3° $\|f\|_\infty < +\infty \Leftrightarrow f$ *mărginită;*

4° $\|\lambda f\|_\infty = |\lambda| \cdot \|f\|_\infty$ *(dacă* $\|f\|_\infty < +\infty$);

5° $\|f + g\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$.

Dem. 1°, 2° și 4° sînt evidente; 3° rezultă din 2°. Să arătăm 5°

$$|(f + g)(x)| \leqslant |f(x)| + |g(x)| \leqslant \|f\|_\infty + \|g\|_\infty,\ (\forall)\ x \in A,$$

deci

$$\|f + g\|_\infty = \sup_{x\in A} |(f + g)(x)| \leqslant \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$$

4.7 Funcții liniare

4.7.1. Definiție. O funcție $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ se numește:

aditivă: dacă $f(x + y) = f(x) + (f)(y), (\forall)\ x, y \in \mathbf{R}$;

subaditivă: dacă $f(x + y) \leqslant f(x) + f(y), (\forall)\ x, y \in \mathbf{R}$;

omogenă: dacă $f(\lambda x) = \lambda f(x), (\forall)\ \lambda, x \in \mathbf{R}$;

liniară: dacă este aditivă și omogenă;

multiplicativă: dacă $f(xy) = f(x)f(y), \forall\ x, y \in \mathbf{R}$;

submultiplicativă: dacă $f(xy) \leqslant f(x)f(y), (\forall)\ x, y \in \mathbf{R}$.

4.7.2. Definiție. Fie $I \subseteq \mathbf{R}$ un interval și $f : I \to \mathbf{R}$ o funcție. Vom spune că f este *afină*, dacă $(\exists)\ \alpha, \beta \in \mathbf{R}$ a.î. $f(x) = \alpha x + \beta, (\forall)\ x \in \mathbf{R}$.

Exemple

1. Funcția $x \mapsto ax$ $x, \in \mathbf{R}$, este liniară;

2. Funcțiile $x \mapsto \dfrac{|x|}{1 + |x|}$, $x \in \mathbf{R}$; $x \mapsto -E(x)$, $x \in \mathbf{R}$; $x \to \sqrt[n]{x}$, $x \in \mathbf{R}$, $(n \geqslant 1)$, sînt subaditive.

3. Funcția $x \mapsto ax + b$, $x \in \mathbf{R}$, este aditivă (resp. omogenă) $\Leftrightarrow b = 0$.

4. Funcțiile $|\,.\,|$, sign, $1_{\mathbf{R}}$ sînt multiplicative.

5. Funcțiile modul și etajate sînt afine pe porțiuni.

4.7.3. Propoziție. *Fie* $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *o funcție. Atunci* f *este liniară* $\Leftrightarrow (\exists)\ c \in \mathbf{R}$ *a.î.* $f(x) = cx, (\forall)\ x \in \mathbf{R}$.

Dem. $(\Rightarrow)$ $f(x) = f(x \cdot 1) = xf(1), (\forall)\ x \in \mathbf{R}$ etc.

4.7.4. Propoziție. *Fie* $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *o funcție aditivă. Atunci* f *este* $\mathbf{Q}$*-omogenă.*

Dem. $f(nx) = f(x + x + \ldots + x) = nf(x), (\forall)\ x \in \mathbf{R},\ n \in \mathbf{N}$; $f(0) = 2f(0)$, deci $f(0) = 0$ și deci $0 = f(x - x) = f(x) + f(-x)$, de unde rezultă $f(-x) = -f(x), (\forall)\ x \in \mathbf{R}$. Mai departe avem:

$$f(-nx) = nf(-x) = -nf(x), (\forall)\ x \in \mathbf{R}, (\forall)\ n \in \mathbf{N},$$

deci

$$f(kx) = kf(x),\ (\forall)\ x \in \mathbf{R},\ (\forall)\ k \in \mathbf{Z} \tag{1}$$

Înlocuind în (1) x prin $\frac{x}{k}$, $k \in \mathbf{Z}^*$, obținem : $f(x) = kf\left(\frac{x}{k}\right)$, deci $f\left(\frac{x}{k}\right) = \frac{1}{k} f(x)$ și deci

$$f\left(\frac{m}{n} x\right) = mf\left(\frac{1}{n} x\right) = \frac{m}{n} f(x),\ (\forall)\ m \in \mathbf{Z},\ n \in \mathbf{Z}^*,\ x \in \mathbf{R},$$

prin urmare $f(rx) = rf(x)$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$, $(\forall)\ r \in \mathbf{Q}$.

Corolar 1. *Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ o funcție aditivă și monotonă. Atunci f este liniară.*

Dem. f fiind $\mathbf{Q}$-omogenă (P.4.7.4), avem $f(r) = rf(1)$, $(\forall)\ r \in \mathbf{Q}$. Dacă $f(1) = 0$, rezultă f constantă pe $\mathbf{Q}$, deci (P.4.7.4) $f = 0$. Dacă $f(1) \neq 1$, funcția $g = \frac{1}{f(1)} f$ este monotonă și $g(x) = x$, $(\forall)\ x \in \mathbf{Q}$; deci (P.4.2.3. Cor. 1) $g(x) = x$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$ și deci $f(x) = xf(1)$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$. Prin urmare f este liniară.

4.7.5. Propoziție. *Fie $I \subseteq \mathbf{R}$ un interval și $f : I \to \mathbf{R}$ o funcție. Atunci condițiile 1° — 3° sînt echivalente : 1° f afină ; 2° $f - f(0)$ este restricția la I a unei aplicații liniare ; 3° $f((1 - \lambda)x + \lambda y) = (1 - \lambda) f(x) + \lambda f(y)$, $(\forall)\ x,\ y \in I$, $(\forall)\ \lambda \in [0, 1]$.*

Dem. 1° $\Rightarrow$ 2°. f fiind afină, $(\exists)\ \alpha,\ \beta \in \mathbf{R}$ a.î. $f(x) = \alpha x + \beta$, $(\forall)\ x \in I$, deci $f(x) - f(0) = \alpha x$, $(\forall)\ x \in I$, deci $f - f_0$ este restricția la I a aplicației liniare $\mathbf{R} \ni x \mapsto \alpha x$.

2° $\Rightarrow$ 3°. Evident

3° $\Rightarrow$ 1°. Fie $a, b \in I$, $a < b$, fixați. Să arătăm relația

$$f(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a),\ (\forall)\ x \in I \tag{1}$$

(i) Dacă $x \in [a, b]$, avem $x = (1 - \lambda)\, a + \lambda\, b$, unde $\lambda = \frac{x - a}{b - a}$, deci din 3° rezultă

$$f(x) = (1 - \lambda) f(a) + \lambda f(b) = f(a) + (f(b) - f(a))\lambda$$

Așadar

$$f(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a),\ (\forall)\ x \in [a, b] \tag{2}$$

(ii) Dacă $x \in I \setminus [a, b]$, spre exemplu $x > b$, avem $b \in [a, x]$, deci aplicînd (2) pentru $b = x$ și $x = b$, obținem :

$$f(b) = f(a) + \frac{f(x) - f(a)}{x - a}(b - a),$$

deci

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) = f(x) - f(a) \text{ etc.}$$

Prin urmare, (1) este arătat, deci f este afină.

Corolar 1. *Fie* $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *o funcție. Atunci* f *este afină* $\Leftrightarrow f - f(0)$ *este liniară.*

4.7.6. Propoziție. *Fie* $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *o funcție aditivă și multiplicativă. Atunci* $f = 0$ *sau* $f = 1_{\mathbf{R}}$.

Dem. Presupunem $f \neq 0$. Deoarece $f(1) = (f(1))^2 \geqslant 0$, rezultă $f(1) = 0$ sau $f(1) = 1$. Dacă am avea $f(1) = 0$, rezultă $f(x) = f(x) \cdot f(1) = 0$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$, absurd. Rămîne că $f(1) = 1$. Din P.4.7.4. rezultă că f este $\mathbf{Q}$ — omogenă, deci $f(r) = rf(1) = r$, $(\forall)\ x \in \mathbf{Q}$.

Să arătăm că f este monotonă: dacă $x \geqslant 0$, avem $f(x) = (f(\sqrt{x}))^2 \geqslant 0$, deci $(\forall)\ x_1, x_2 \in \mathbf{R}$, $x_1 < x_2$, rezultă $f(x_2) - f(x_1) = f(x_2 - x_1) \geqslant 0$ și deci $f(x_1) \leqslant f(x_2)$, prin urmare f monoton crescătoare.

Aplicînd P.4.7.4. Cor. 1, rezultă f liniară.

Corolar 1. *Orice izomorfism de la* $\mathbf{R}$ *la* $\mathbf{R}$ *coincide cu funcția* $1_{\mathbf{R}}$.

4.8. Funcții cu punct fix

4.8.1. Definiție. Fie A o mulțime și $f : A \to A$ o funcție. Vom spune că $x_0 \in A$ este *punct fix* pentru f dacă $f(x_0) = x_0$.

a) O funcție f poate să nu aibă puncte fixe, poate avea un singur punct fix, un număr finit de puncte fixe sau o infinitate.

b) Fie $A \subseteq \mathbf{R}$ o mulțime și $f : A \to A$ o funcție. Atunci f are cel puțin un punct fix $\Leftrightarrow$ graficul lui f intersectează prima bisectoare.

Exemple

1. Funcțiile sin și cos au fiecare un singur punct fix, iar funcțiile tg și ctg au fiecare cîte o infinitate de puncte fixe.

2. Funcția $x \mapsto ax^2 + bx + c$, $x \in \mathbf{R}$ are cel puțin un punct fix $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (b - 1)^2 \geqslant 4ac$.

4.8.2. Teoremă (K n a s t e r). *Fie* $A \subseteq \mathbf{R}$ *o mulțime cu proprietatea că orice submulțime a lui* A *are margini și acestea aparțin lui* A *și fie* $f : A \to A$ *o funcție monotonă. Atunci* $(\exists)\ x_0 \in A$ *a.î.* $f(x_0) = x_0$.

Dem. Presupunem f monoton crescătoare, fie $a := \min A$, $b := \max A$ și $B := \{x \in A\ ;\ f(x) \geqslant x\}$. Cum $f(a) \in A$, avem $f(a) \geqslant a$, deci $a \in B$ și deci $B \neq \emptyset$. Fie $c := \sup B$. Deoarece $c \geqslant x$, $(\forall)\ x \in B$, și f monoton crescătoare, rezultă că $f(c) \geqslant f(x)$, $(\forall)\ x \in B$, deci $f(c) \geqslant x$, $(\forall)\ x \in B$ și deci $f(c) \geqslant \sup B = c$. Atunci $f(f(c)) \geqslant f(c)$, deci $f(c) \in B$ și deci $f(c) \leqslant c$, prin urmare $f(c) = c$.

Corolar 1. *Fie* $f : [a, b] \to [a, b]$ *o funcție monotonă. Atunci* $(\exists)\ x_0 \in [a,b]$ *a.î.* $f(x_0) = x_0$.

4.9. Funcții polinomiale

4.9.1. Definiție. Fie $\mathcal{O}$ un inel cu unitate notată cu 1 (spre exemplu $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$). Un șir $(a_n)_{n\geqslant 0}$ cu elemente din $\mathcal{O}$ se numește de *suport finit* dacă $(\exists)$ $n \geqslant 0$ a.î. $a_k = 0$, $(\forall)\ k > n$. Notăm cu $\mathcal{S}$ mulțimea tuturor șirurilor de suport finit cu elemente din $\mathcal{O}$, pe care definim *adunarea* și *înmulțirea* astfel:

$$(a_n)_{n\geqslant 0} + (b_n)_{n\geqslant 0} := (a_n + b_n)_{n\geqslant 0}, \quad (a_n)_{n\geqslant 0} \cdot (b_n)_{n\geqslant 0} := \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right)_{n\geqslant 0}$$

4.9.2. Propoziție. 1° $(\mathcal{S}, +, \cdot)$ *este un inel cu unitate*; 2° *aplicația* $\mathcal{O} \ni a \mapsto (a, 0, 0, \ldots) \in \mathcal{S}$ *definește un izomorfism al lui* $\mathcal{O}$ *pe un subinel al lui* $\mathcal{S}$.

Dem. Verificare directă a axiomelor.

Datorită P.4.8.2. elementul $a \in \mathcal{O}$ se identifică cu elementul $(a, 0, 0, \ldots) \in \mathcal{S}$, deci putem scrie $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{S}$. Notăm mai departe elementul $(1, 0, 0, 0, \ldots)$ din $\mathcal{S}$ prin *simbolul* X. Atunci avem relațiile:

$$X^2 = (0, 0, 1, 0, \ldots),\ X^3 = (0, 0, 0, 1, \ldots), \ldots$$

deci $(\forall)\ a = (a_0, a_1, a_2, \ldots a_n, 0, 0, \ldots) \in \mathcal{S}$ avem:

$$a = a_0 (1, 0, 0, \ldots) + a_1 (0, 1, 0, \ldots) + \ldots + a_n \underbrace{(0, 0, \ldots 0}_{n}, 1, 0, \ldots) =$$

$$= a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \ldots + a_n X^2$$

Așadar, orice element $a \in \mathcal{S}$ se poate scrie sub forma $a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \ldots + a_n X^n$, unde $a_k \in \mathcal{O}$ $(k = \overline{0, n})$.

4.9.3. Definiție. Inelul $\mathcal{S} = (\mathcal{S}, +, \cdot)$ definit mai sus se numește *inelul polinoamelor* peste $\mathcal{O}$ (cu coeficienți în $\mathcal{O}$) în *nedeterminata* X și se notează cu $\mathcal{O}[X]$. Un element din $\mathcal{O}[X]$ se numește *polinom* cu coeficienți în $\mathcal{O}$ și se notează cu $P, Q, R, \ldots$ Un polinom $P \in \mathcal{O}[X]$ se numește *de grad* n, dacă $P = a_0 + a_1 X + \ldots + a_n X^n$ și $a_n \neq 0$; elementele a_k $(k = \overline{0, n})$ se numesc *coeficienții* lui P, iar a_n *coeficientul dominant* al lui P. Un polinom cu coeficienți în $\mathbf{R}$ (resp. $\mathbf{C}$ etc.) se numește polinom cu *coeficienți reali* (resp. *complecși* etc.). Polinomul $P = a_0$ se numește polinomul *constant*, iar $P = 0$ se numește polinomul *nul*. Oricărui polinom $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathcal{O}[X]$ i se asociază o aplicație $\widetilde{P} : \mathcal{O} \to \mathcal{O}$, numită *funcția polinomială* asociată lui P, definită astfel $\widetilde{P}(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, $(\forall)\ x \in \mathcal{O}$. Vom nota prin $\mathcal{O}_n[X]$ mulțimea tuturor polinoamelor P din $\mathcal{O}[X]$ de grad $\leqslant n$.

a) $\mathcal{O}_n[X]$ este un subinel al lui $\mathcal{O}[X]$, $(\forall)\ n \geqslant 0$;

b) $\mathcal{O}_n[X] \subseteq \mathcal{O}_{n+1}[X]$, $(\forall)\ n \geqslant 0$;

c) $\mathbf{Z}[X] \subseteq \mathbf{Q}[X] \subseteq \mathbf{R}[X] \subseteq \mathbf{C}[X]$.

Observație. Dacă $\mathcal{O}$ este $\mathbf{K}$ $(= \mathbf{R}$ sau $\mathbf{C})$ și $P \in \mathcal{O}[X]$, atunci aplicația $\widetilde{P}$ (funcția polinomială asociată lui P) este unic determinată de P, de aceea $\widetilde{P}$ se identifică cu P și se scrie simplu $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, $(\forall)\ x \in \mathcal{O}$, Așadar, putem scrie $\mathbf{R}[X] \subseteq \mathcal{F}(\mathbf{R})$.

4.9.4. Definiție. Fie $P \in \mathbf{K}[X]$ un polinom. Un element $x_0 \in \mathbf{K}$ se numește *rădăcină* (soluție) a lui P dacă $P(x_0) = 0$ și *rădăcină de ordin* k, dacă $(\exists)$ $P_1 \in \mathbf{K}[X]$ a.î. $P(x) = (x - x_0)^k P_1(x)$, $(\forall)\ x \in \mathbf{K}$ și $P_1(x_0) \neq 0$. Numărul $x_0 \in \mathbf{R}$ se numește *algebric*, dacă x_0 este rădăcină a unui polinom cu coeficienți întregi, de grad nenul. Un număr real care nu este algebric se numește *transcendent*.

4.9.5. Teoremă. *Fie* $P, Q \in \mathbf{K}[X]$ *două polinoame cu* $Q \neq 0$. *Atunci* $(\exists\,!)$ $C, R \in \mathbf{K}[X]$ *a.î.* $P = C \cdot Q + R$ *și* grad $R <$ grad Q.

Corolar 1. *Fie* $P \in \mathbf{K}[X]$ *un polinom și* $a \in \mathbf{K}$ *un element. Atunci* $(\exists\,!)$ $C \in \mathbf{K}[X]$, $(\exists\,!)$ $r \in \mathbf{K}$ *a.î.* $P = (X - a) C + r$.

Dem. Aplicăm T.4.9.5. pentru polinoamele P și $Q = X - a$.

Corolar 2. *Fie* $P \in \mathbf{K}[X]$ *un polinom. Atunci* $a \in \mathbf{K}$ *este rădăcină a lui* $P \Leftrightarrow P$ *se divide (exact) la* X*-*a.

Dem. ($\Rightarrow$) Dacă a este rădăcină a lui P, avem $P(a) = 0$. Din Cor. 1 rezultă reprezentarea $P = (X - a)\,C + r$, unde $C \in \mathbf{K}[X]$ și $r \in \mathbf{K}$. Atunci $P(a) = r$, deci $r = 0$ și deci $P = (X - a)\,C$, prin urmare P se divide la $X - a$.

Implicația ($\Leftarrow$) este evidentă.

Corolar 3. *Fie P un polinom cu coeficienți reali i.e. $P \in \mathbf{R}[X]$. Atunci numărul complex $a + ib$ este rădăcină a lui $P \Leftrightarrow a - ib$ este rădăcină a lui P.*

Dem. ($\Rightarrow$) Dacă $P = (X - (a + ib))P_1$, atunci $P = \bar{P} = (X - (a - ib))\,\bar{P}_1$ etc.

4.9.6. Teoremă (Formula lui Taylor pentru polinoame). *Fie $P \in \mathbf{K}[X]$ un polinom de grad n și $a \in \mathbf{K}$ un element. Atunci are loc relația:*

$$P(x) = P(a) + \frac{x - a}{1!}\,P'(a) + \ldots + \frac{(x - a)^n}{n!}\,P^{(n)}(a),\quad (\forall)\ x \in \mathbf{K}.$$

4.9.7. Definiție. Se numește *funcție rațională* cu coeficienți în $\mathbf{R}$, un cît de două polinoame cu coeficienți în $\mathbf{R}$. Mai precis, R este funcție rațională dacă $(\exists)\ P, Q \in \mathbf{R}[X]$ a.î. $R = \dfrac{P}{Q}$; (i) dacă P și Q nu au rădăcini comune, atunci $R(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, $(\forall)\ x \in \mathbf{K} \setminus Z_Q$, unde Z_Q este mulțimea rădăcinilor (zerourilor) lui Q; (ii) dacă P și Q au o rădăcină comună a, atunci $\dfrac{P}{Q}$ se identifică cu $\dfrac{P_1}{Q_1}$, unde $P_1, Q_1 \in \mathbf{K}[X]$, $P = (X - a)P_1$ și $Q = (X - a)\,Q_1$.

4.9.8. Propoziție *Fie $R = \dfrac{P}{Q}$ o funcție rațională. Atunci R este pară (resp. impară) $\Leftrightarrow$ $(\exists)$ R_1 funcție rațională a.î. $R(x) = R_1(x^2)$ (resp. $R(x) = xR_1(x^2)$), $(\forall)$ $x \in D_R$.*

Dem. ($\Rightarrow$) Dacă $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, $x \in \mathbf{R}$ și P este funcția pară i.e.

$$P(x) = P(-x),\ (\forall)\ x \in \mathbf{R},\ \text{atunci}\ P(x) = \frac{1}{2}(P(x) + P(-x)) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k x^k + \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k x^k\right) = a_0 + a_2 x^2 + a_4 x^4 + \ldots = P_1(x^2),$$

unde P_1 este un polinom.

Dacă R este pară, atunci $(\forall)\ x \in D_R$ avem:

$$R(x) = \frac{1}{2}\left[\frac{P(x)}{Q(x)} + \frac{P(-x)}{Q(-x)}\right] = \frac{1}{2} \cdot \frac{P(x)\,Q(-x) + P(-x)\,Q(x)}{Q(x)\,Q(-x)},$$

unde evident polinomul de la numitor ca și cel de la numărător este par. Din raționamentul făcut mai sus, rezultă că $(\exists)$ $P_1, Q_1 \in R[X]$ a.î.

$P(x)Q(-x) + P(-x)Q(x) = P_1(x^2)$; $Q(x)Q(-x) = Q_1(x^2)$, $(\forall)$ $x \in \mathbf{R}$

Prin urmare, notînd $\dfrac{P_1}{2Q_1}$ prin R_1, obținem:

$$R(x) = \frac{1}{2}\,\frac{P_1(x^2)}{Q_1(x^2)} = R_1(x^2),\ (\forall)\ x \in D_R$$

Presupunem acum că R este funcție rațională impară. Atunci funcția rațională $\dfrac{1}{x}R(x)$ este evident pară, deci $(\exists)$ R_1 funcție rațională a.î. $\dfrac{1}{x}R(x) =$

$= R_1(x)$, $(\forall)\ x \in D_R \setminus \{0\}$. Deoarece R este impară, avem $0 \in D_R$ și $R(0) = 0$ sau $0 \notin D_R$. Prin urmare, $R(x) = xR_1(x)$, $(\forall)\ x \in D_R$.

Corolar 1. *Fie R o funcție rațională și $x_0 \in \mathbf{R}$ fixat. Atunci R este pară (resp. impară) în raport cu $x_0 \Leftrightarrow (\exists)\ R_1$ funcție rațională a.î. $R(x) = R_1(x - x_0)^2)$ (resp. $R(x) = (x - x_0)R_1((x - x_0)^2))$, $(\forall)\ x \in D_R$.*

4.9.9. Teoremă. Fie $R = \dfrac{P}{Q}$ o funcție rațională cu grad $P <$ grad Q.

1° Dacă Q are toate rădăcinile reale și distincte i.e. $Q(x) = c(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)$, $(x_j \in \mathbf{R})$, atunci R admite o descompunere unică în fracții simple de forma:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{C_1}{x - x_1} + \frac{C_2}{x - x_2} + \dots + \frac{C_n}{x - x_n}, \tag{1}$$

unde $C_k \in \mathbf{R}$.

2° Dacă Q are toate rădăcinile reale (distincte sau nu) i.e. $R = c(x - x_1)^{\alpha_1} \times (x - x_2)^{\alpha_2} \dots \dots (x - x_k)^{\alpha_k}$, $(x_j \in \mathbf{R},\ \alpha_j \in \mathbf{N})$, atunci R admite o descompunere unică în fracții simple de forma:

$$\left.\begin{aligned} \frac{P(x)}{Q(x)} = {} & \frac{A_1}{(x - x_1)^{\alpha_1}} + \frac{A_2}{(x - x_1)^{\alpha_1 - 1}} + \dots + \frac{A_{\alpha_1}}{x - x_1} + \\ & + \frac{B_1}{(x - x_2)^{\alpha_2}} + \frac{B_2}{(x - x_2)^{\alpha_2 - 1}} + \dots + \frac{B_{\alpha_2}}{x - x_2} + \\ & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ & \frac{L_1}{(x - x_k)^{\alpha_k}} + \frac{L_2}{(x - x_k)^{\alpha_k - 1}} + \dots + \frac{L_{\alpha_k}}{x - x_k}. \end{aligned}\right| \tag{2}$$

unde $A_j, B_j, \dots L_j \in \mathbf{R}$.

3° Dacă Q are toate rădăcinile complexe i.e. $Q(x) = (a_1x^2 + b_1x + c_1)^{\alpha_1} \dots \dots (a_kx^2 + b_kx + c_k)^{\alpha_k}$ $(a_j, b_j, c_j \in \mathbf{R},\ a_j \in \mathbf{N}$ și $b_j^2 - 4a_jc_j < 0)$, atunci R admite o descompunere unică, în fracții simple de forma:

$$\left.\begin{aligned} \frac{P(x)}{Q(x)} = {} & \frac{A_1x + A_1'}{(a_1x^2 + b_1x + c_1)^{\alpha_1}} + \dots + \frac{A_{\alpha_1}x + A_{\alpha_1}'}{a_1x^2 + b_1x + c_1} + \\ & \frac{B_1x + B_1'}{(a_2x^2 + b_2x + c_2)^{\alpha_2}} + \dots + \frac{B_{\alpha_2}x + B_{\alpha_2}'}{a_2x^2 + b_2x + c_2} + \\ & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ & \frac{L_1x + L_1'}{(a_kx^2 + b_kx + c_k)^{\alpha_k}} + \dots + \frac{L_{\alpha_k}x + L_{\alpha_k}'}{a_kx^2 + b_kx + c_k}, \end{aligned}\right| \tag{3}$$

unde $A_j, A_j', B_j, B_j', \dots L_j, L_j' \in \mathbf{R}$.

4° Dacă Q are atit rădăcini reale cit și rădăcini complexe, atunci R admite o descompunere unică într-un tablou de forma (2) plus un tablou de forma (3).

Corolar 1. *Fie R o funcție rațională arbitrară. Atunci R admite o descompunere unică într-un număr finit de fracții simple de forma: Cx^n, $\dfrac{C}{(x - x_0)^\alpha}$, $\dfrac{Ax + B}{(ax^2 + bx + c)^\alpha}$* unde $a, b, c, A, B, C \in \mathbf{R}$, $\alpha \in \mathbf{N}$ și $b^2 - 4ac < 0$.

CAPITOLUL 5

NOȚIUNI DE TOPOLOGIE PE R

Pentru nevoile calculului diferențial și integral real nu sînt necesare cunoștințe de *topologie generală* pe spații abstracte. De aceea vom prezenta aic principalele concepte de topologie generală, exclusiv în cadrul dreptei reale ș relativ la topologia naturală a lui **R**, care însă nu apare nicăieri în mod explicit

Plecăm de la noțiunea de *punct de acumulare*. O mulțime care-și conține punctele de acumulare se numește *închisă*.Mulțimile *deschise* sînt complementare de mulțimi închise. Se definește apoi noțiunea de mulțime *conexă* care se arată că este un interval. O atenție deosebită a fost acordată noțiunii de *compacitate* și diferitelor ei caracterizări (inclusiv teoremele Borel-Lebesgue și Bolzano Weierstrass). În continuare prezentăm conceptele de *limită* și *continuitate* a unei funcțiuni. Sînt arătate diferite moduri în care putem caracteriza cele două concepte : cu șiruri, cu vecinătăți, cu $\varepsilon\&\eta$, cu ajutorul oscilației etc. Sînt demonstrate mai departe principalele proprietăți ale funcțiilor continue (teoremele Bolzano, Weierstrass etc.), studiul mulțimii punctelor de discontinuitate a unor clase de funcții cum ar fi funcțiile monotone, funcțiile cu proprietatea lui Darboux etc. Ca aplicații sînt studiate funcțiile elementare.

5.1. Mulțimi închise, deschise și conexe din R.

5.1.1. Definiție. Se numește *vecinătate* a unui punct $x_0 \in \mathbf{R}$, o mulțime $V \subseteq \mathbf{R}$ care include un interval de forma $(x_0 - \varepsilon,\ x_0 + \varepsilon)$, cu $\varepsilon > 0$ fixat. Se numește *vecinătate a lui* $+\infty$ (resp. $-\infty$) o mulțime $V \subseteq \overline{\mathbf{R}}$ care include un interval de forma $(c, \infty]$ (resp. $[-\infty, c)$), unde $c \in \mathbf{R}_+$ (resp. $\mathbf{R}_-$) este fixat. Notăm cu $\mathcal{V}(x_0)$ *mulțimea tuturor vecinătăților* unui punct $x_0 \in \overline{\mathbf{R}}$. O vecinătate a lui $x_0 \in \mathbf{R}$ de forma $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ (resp. $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$), cu $\varepsilon > 0$, se notează cu $V_\varepsilon(x_0)$ (resp. $V_\varepsilon[x_0]$). Familia $\mathfrak{B}(x_0) \subseteq \mathcal{V}(x_0)$ se numește *bază de vecinătăți* a lui x_0, dacă $(\forall) V \in \mathcal{V}(x_0)$, $(\exists) U \in \mathfrak{B}(x_0)$ a.î. $U \subseteq V$.

Exemple

Dacă $x_0 \in \mathbf{R}$, atunci familiile $\{V_{\frac{1}{n}}(x_0)\,;\, n \in \mathbf{N}\}$, $\{V_\varepsilon(x_0)\,;\, \varepsilon > 0\}$, $\{V_{\frac{1}{n}}[x_0]\,;\, n \in \mathbf{N}\}$ și $\{V_\varepsilon[x_0]\,;\, \varepsilon > 0\}$ constituie baze de vecinătăți ale puncului x_0. Familia $\{(n, \infty]\,;\, n \in \mathbf{N}\}$ (resp. $\{[-\infty, n)\,;\, n \in \mathbf{N}\}$) este o bază de vecinătăți a lui $+\infty$ (resp. $-\infty$).

Din definiția dată rezultă imediat proprietățile :

1° $(\forall)\ V \in \mathcal{V}(x) \Rightarrow x \in V$; 2° $(\forall)\ V_1, V_2 \in \mathcal{V}(x) \Rightarrow V_1 \cap V_2 \in \mathcal{V}(x)$;
3° $(\forall)\ V \in \mathcal{V}(x)$, $(\forall)\ U \subseteq \mathbf{R}$, $U \supseteq V \Rightarrow U \in \mathcal{V}(x)$.

5.1.2. Propoziție. *Fie* $(x_n)_{n\geq 1}$ *un șir de numere reale și* $x_0 \in \overline{\mathbf{R}}$. *Atunci* $(x_n)_{n\geq 1}$ *are limita* $x_0 \Leftrightarrow (\forall)\ V \in \mathcal{V}(x_0)$, $(\exists)\ n_V \geq 1$ *a.î.* $x_n \in V$, $(\forall)\ n \geq n_V$.

Dem. (i) $x_0 \in \mathbf{R}$. Atunci $x_n \to x_0 \Leftrightarrow (\forall)\ \varepsilon > 0, (\exists)\ n_\varepsilon \geq 1$ a.î. $|x_n - x| < \varepsilon$, $(\forall)\ n \geq n_\varepsilon \Leftrightarrow (\forall)\ \varepsilon > 0$, $(\exists)\ n_\varepsilon \geq 1$ a.î. $x - \varepsilon < x_n < x + \varepsilon$, $(\forall)\ n \geq n_\varepsilon \Leftrightarrow (\forall)\ \varepsilon > 0$, $(\exists)\ n_\varepsilon \geq 1$ a.î. $x_n \in V_\varepsilon(x_0)$, $(\forall)\ n \geq n_\varepsilon$. Cum $\mathcal{B}(x_0) = \{V_\varepsilon(x_0)\,;\ \varepsilon > 0\}$ este bază de vecinătăți a lui x_0, ultima afirmație este echivalentă cu afirmația de enunț.

(ii) $x_0 = +\infty$. Atunci $x_n \to \infty \Leftrightarrow (\forall)\ c \in \mathbf{R}_+$, $(\exists)\ n_c \geq 1$ a.î. $x_n > c$, $(\forall)\ n \geq n_c \Leftrightarrow (\forall)\ c \in \mathbf{R}_+$, $(\exists)\ n_c \geq 1$ a.î. $x_n \in (c, \infty]$, $(\forall)\ n \geq n_c$. Cum familia $\mathcal{B}(+\infty) = \{(c, \infty]\,;\ c \in \mathbf{R}_+\}$ este o bază de vecinătăți a punctului $+\infty$, rezultă că ultima afirmație este echivalentă cu afirmația din enunț.

(iii) $x_0 = -\infty$. Raționăm ca în cazul (ii).

5.1.3. Definiție Fie $A \subseteq \mathbf{R}$ o mulțime. Un punct $x_0 \in \mathbf{R}$ (resp. $\overline{\mathbf{R}}$) se numește *punct de acumulare* în $\mathbf{R}$ (resp. $\overline{\mathbf{R}}$) al mulțimii A, dacă $(\forall)\ V$ o vecinătate a lui x_0, avem $A \cap (V \setminus \{x_0\}) \neq \emptyset$ i.e. $(\exists)\ x \in A \cap V$, $x \neq x_0$. Mulțimea tuturor punctelor de acumulare în $\mathbf{R}$ (resp. $\overline{\mathbf{R}}$) ale mulțimii A se notează cu $A'[\mathbf{R}]$ (resp. $A'[\overline{\mathbf{R}}]$) și se numește *derivata* lui A în $\mathbf{R}$ (resp. $\overline{\mathbf{R}}$).

Din definiția dată rezultă imediat afirmațiile:

1° $x_0 \in A'[\mathbf{R}] \Leftrightarrow (\forall)\ \varepsilon > 0$, $(\exists)\ x \in A$ a.î. $0 < |x - x_0| < \varepsilon$;

2° $+\infty \in A'[\overline{\mathbf{R}}] \Leftrightarrow (\forall)\ c \in \mathbf{R}_+$, $(\exists)\ x \in A$ a.î. $x > c$;

3° $-\infty \in A'[\overline{\mathbf{R}}] \Leftrightarrow (\forall)\ c \in \mathbf{R}_-$, $(\exists)\ x \in A$ a.î. $x < c$.

Aceasta înseamnă că putem înlocui în definiția dată expresia „$(\forall)\ V$ o vecinătate a lui x_0" prin „$(\forall)\ V$ o vecinătate a lui x_0 intr-o bază de vecinătăți a lui x_0", deci prin $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, dacă $x_0 \in \mathbf{R}$ și prin $(c, +\infty]$, $c \in \mathbf{R}_+$, (resp. $[-\infty, c)$, $c \in \mathbf{R}_-$), dacă $x_0 = +\infty$ (resp. $x_0 = -\infty$).

Observația 1. Să numim *vecinătate punctată* a lui $x_0 \in \overline{\mathbf{R}}$ o mulțime de forma $V \setminus \{x_0\}$ cu $V \in \mathcal{V}(x_0)$, notată cu $\dot{V}$. Atunci putem spune că x_0 este punct de acumulare al mulțimii A, dacă oricare ar fi $\dot{V}$ o vecinătate punctată a lui x_0, avem $A \cap \dot{V} \neq \emptyset$.

Observația 2. Un punct de acumulare al unei mulțimi A poate să aparțină sau nu mulțimii A.

Observația 3. Există mulțimi $A \subseteq \mathbf{R}$ a.î. $A'[\mathbf{R}] = \emptyset$ și $A'[\overline{\mathbf{R}}] \neq \emptyset$.

5.1.4. Propoziție. *Fie* $A \subseteq \mathbf{R}$ *o mulțime. Atunci au loc afirmațiile:*

1° $A'[\mathbf{R}] = \mathbf{R} \cap A'[\overline{\mathbf{R}}]$;

2° $A'[\mathbf{R}] = A'[\overline{\mathbf{R}}] \Leftrightarrow A$ *mărginită*;

3° $+\infty \in A'[\overline{\mathbf{R}}] \Leftrightarrow A$ *nu admite majoranți*;

4° $-\infty \in A'[\overline{\mathbf{R}}] \Leftrightarrow A$ *nu admite minoranți*;

5° $A'[\overline{\mathbf{R}}]$ *diferă de* $A'[\mathbf{R}]$ *prin cel mult două puncte,* $-\infty$ *și* $+\infty$.

Dem. Evidentă.

Din P.5.1.4. rezultă că proprietățile mulțimii $A'[\overline{\mathbf{R}}]$ se deduc ușor din cele ale mulțimii $A'[\mathbf{R}]$. De aceea vom studia numai proprietățile mulțimii $A'[\mathbf{R}]$, pe care o vom nota simplu cu A' și o vom numi *derivata* lui A.

Exemple

1. $A = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\right\} \Rightarrow A' = \{0\}$;

2. $A = (0,1) \cap \mathbf{Q}$ sau $A = (0,1) \setminus \mathbf{Q} \Rightarrow A' = [0,1]$;

3. $\mathbf{N}' = \emptyset$, $\mathbf{N}'[\overline{\mathbf{R}}] = \{+\infty\}$, $\mathbf{Z}'[\overline{\mathbf{R}}] = \{-\infty, +\infty\}$;

4. $\mathbf{Q}' = \mathbf{R}$, $\mathbf{Q}'[\overline{\mathbf{R}}] = \overline{\mathbf{R}}$, $(\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q})' = \mathbf{R}$

5.1.5. Definiție. Fie $A \subseteq \mathbf{R}$ o mulțime. Un punct $x_0 \in \mathbf{R}$ (resp. $\overline{\mathbf{R}}$) se numește *punct de acumulare din dreapta* în $\mathbf{R}$ (resp. $\overline{\mathbf{R}}$) al mulțimii A, dacă $(\forall)\ V$ o vecinătate a lui x_0, rezultă că $A \cap (V^+ \setminus \{x_0\}) \neq \emptyset$, unde $V^+ := V \cap [x_0, +\infty]$ este *semivecinătate dreaptă* a lui x_0. Mulțimea tuturor punctelor de acumulare din dreapta în $\mathbf{R}$ (resp. $\overline{\mathbf{R}}$) ale mulțimii A se notează cu A'^d și se numește *derivata la dreapta* în $\mathbf{R}$ (resp. $\overline{\mathbf{R}}$) a lui A.

Din definiția dată rezultă imediat afirmațiile:

1° $x_0 \in A'^d[\mathbf{R}] \Leftrightarrow (\forall)\ \varepsilon > 0$, $(\exists)\ x \in A$ a.î. $0 < x - x_0 < \varepsilon \Leftrightarrow x_0 \in (A \cap [x_0, \infty))'[\mathbf{R}]$;

2° $x_0 \in A'^d[\overline{\mathbf{R}}] \Leftrightarrow x_0 \in (A \cap [x_0, \infty))'[\overline{\mathbf{R}}]$;

3° $-\infty \in A'^d[\overline{\mathbf{R}}] \Leftrightarrow -\infty \in A'[\overline{\mathbf{R}}] \Leftrightarrow (\forall)\ c \in \mathbf{R}_+, (\exists)\ x \in A$ a.î. $x > c$;

4° $A'^d[\overline{\mathbf{R}}] \subseteq \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$.

De aici rezultă că putem înlocui în definiția dată, V o vecinătate arbitrară a lui x_0 prin V o vecinătate de forma $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, dacă $x_0 \in \mathbf{R}$, respectiv prin $[-\infty, c)$, $c \in \mathbf{R}_-$, dacă $x_0 = -\infty$.

Analog se definește noțiunea de *punct de acumulare la stînga* în $\mathbf{R}$ (resp. $\overline{\mathbf{R}}$) și *derivata la stînga* în $\mathbf{R}$ (resp. $\overline{\mathbf{R}}$) a mulțimii A, care se notează prin $A'^s[\mathbf{R}]$ (resp. $A'^s[\overline{\mathbf{R}}]$). Mulțimea $A'^b[\mathbf{R}] := A'^s[\mathbf{R}] \cap A'^d[\mathbf{R}]$ se numește *derivata bilaterală* în $\mathbf{R}$ a mulțimii A; un element $x_0 \in A'^b[\mathbf{R}]$ se numește *punct de acumulare bilateral* al mulțimii A.

Observația 1. Un element din A'^s, A'^d sau A'^b poate să aparțină sau nu lui $\mathbf{R}$.

Observația 2. Există mulțimi $A \subseteq \mathbf{R}$ a.î. $A'^d[\mathbf{R}] = \emptyset$ și $A'^d[\overline{\mathbf{R}}] \neq \emptyset$ și analog pentru derivata stîngă a lui A.

5.1.6. Propoziție. *Fie $A \subseteq \mathbf{R}$ o mulțime. Atunci au loc afirmațiile:*

1° $A'^d[\mathbf{R}] = \mathbf{R} \cap A'^d[\overline{\mathbf{R}}]$; $A'^s[\mathbf{R}] = \mathbf{R} \cap A'^s[\overline{\mathbf{R}}]$;

2° $A'[\mathbf{R}] = A'^s[\mathbf{R}] \cup A'^d[\mathbf{R}]$; $A'[\overline{\mathbf{R}}] = A'^s[\overline{\mathbf{R}}] \cup A'^d[\overline{\mathbf{R}}]$;

3° $A'^d[\mathbf{R}] = A'^d[\overline{\mathbf{R}}] \Leftrightarrow A$ *posedă majoranți*;

4° $A'^s[\mathbf{R}] = A'^s[\overline{\mathbf{R}}] \Leftrightarrow A$ *posedă minoranți*;

5° $A'^s[\mathbf{R}]$ (*resp.* $A'^d[\mathbf{R}]$) *diferă de* $A'^s[\overline{\mathbf{R}}]$ (*resp.* $A'^d[\overline{\mathbf{R}}]$) *cel mult prin elementul* $+\infty$ (*resp.* $-\infty$).

Dem. Evident.

Din P.5.1.6. rezultă că proprietățile mulțimilor $A'^d[\overline{\mathbf{R}}]$ și $A'^s[\overline{\mathbf{R}}]$ se deduc ușor din cele ale mulțimilor $A'^d[\mathbf{R}]$ și $A'^s[\mathbf{R}]$. De aceea vom studia numai proprietățile mulțimilor $A'^d[\mathbf{R}]$ și $A'^s[\mathbf{R}]$ pe care le vom nota prin A'^d și A'^s și le vom numi *derivata dreaptă*, respectiv *derivata stîngă* a mulțimii A. Analog $A'^b[\mathbf{R}]$ se notează cu A'^b și se numește simplu *derivata bilaterală* a mulțimii A.

Exemple.

1. $A = (0,1) \Rightarrow A'^s = (0,1]$, $A'^d = [0,1)$, $A'^b = (0,1)$;

2. $A = \left\{1, 1 - \frac{1}{2}, \ldots, 1 - \frac{1}{n}, \ldots\right\} \Rightarrow A'^s = \{1\}$, $A'^d = \emptyset$, $A'^b = \emptyset$;

3. $A = (0,1) \cap \mathbf{Q}$ sau $(0,1) \setminus \mathbf{Q} \Rightarrow A'^s = (0,1]$, $A'^d = [0,1)$, $A'^b = (0,1)$;

4. $\mathbf{N}'^s = \mathbf{N}'^d = \emptyset$, $\mathbf{N}'^s[\overline{\mathbf{R}}] = \{+\infty\}$; $\mathbf{Q}'^s = \mathbf{Q}'^d = \mathbf{R}'^s = \mathbf{R}'^d = \mathbf{R}$.

5. Fie $A \subseteq \mathbf{R}$ o mulțime finită. Atunci $A' = \emptyset$.

5.1.7. Propoziție. *Fie* $A, B \subseteq \mathbf{R}$ *două mulțimi. Atunci avem*:
$1^\circ\ (A \cup B)' = A' \cup B'$; $2^\circ\ (A \cap B)' \subseteq A' \cap B'$; $3^\circ\ (A')' \subseteq A'$
Afirmații analoage pentru derivata stîngă, dreaptă și bilaterală.

Dem. 1° Fie $x_0 \in (A \cup B)'$ fixat. Dacă $x_0 \notin A' \cup B'$, deci $(x_0 \notin A') \wedge (x_0 \notin B')$, există $V_1, V_2 \in \mathcal{V}(x_0)$ cu $A \cap (V_1 \setminus \{x_0\}) = \emptyset$ și $B \cap (V_2 \setminus \{x_0\}) = \emptyset$. Atunci $V := V_1 \cap V_2 \in \mathcal{V}(x_0)$ și avem $(A \cup B) \cap (V \setminus \{x_0\}) = \emptyset$, deci $x_0 \notin (A \cup B)'$ absurd. Rămîne că $x_0 \in A' \cup B'$, deci $(A \cup B)' \subseteq A' \cup B'$.

Reciproc, fie $x_0 \in A' \cup B'$ fixat, deci $(x_0 \in A') \vee (x_0 \in B')$. Atunci $(\forall)\ V \in \mathcal{V}(x_0)$, avem $(A \cap V \setminus \{x_0\} \neq \emptyset) \vee (B \cap V \setminus \{x_0\} \neq \emptyset)$, deci $(A \cup B) \cap (V \setminus \{x_0\}) \neq \emptyset$ și deci $x_0 \in (A \cup B)'$, încît $A' \cup B' \subseteq (A \cup B)'$.

2° Din $A \cap B \subseteq A$, rezultă $(A \cap B)' \subseteq A'$ și analog $(A \cap B)' \subseteq B'$, deci $(A \cap B)' \subseteq A' \cap B'$.

3° Fie $x_0 \in (A')'$ fixat. Atunci $(\forall)\ V := V_\varepsilon(x_0)$, $\varepsilon > 0$, $(\exists)\ x \in A' \cap V$, $x \neq x_0$. Evident $(\exists)\ U \in \mathcal{V}(x)$ a.î. $U \subseteq V \setminus \{x_0\}$. Deoarece $x \in A'$, avem $A \cap U \neq \emptyset$. Cum $A \cap U \subseteq A \cap (V \setminus \{x_0\})$, rezultă $A \cap (V \setminus \{x_0\}) \neq \emptyset$, prin urmare $x_0 \in A'$.

Corolar 1. *Fie* $A \subseteq \mathbf{R}$ *o mulțime și* $B := A \cup A'$. *Atunci* $1^\circ\ A' = B'$; $2^\circ\ A \setminus A' = B \setminus B'$.

Dem. $1^\circ\ A \subseteq B \Rightarrow A' \subseteq B'$; $B' = (A \cup A')' = A' \cup A'' \subseteq A'$; $2^\circ\ B \setminus B' = (A \cup A') \setminus A' = A \setminus A'$.

5.1.8. Teoremă. *Fie* $A \subseteq \mathbf{R}$ *o mulțime. Atunci cond.* 1°—4° *sînt echivalente*:
$1^\circ\ x_0 \in A'$;
$2^\circ\ (\forall)\ V \in \mathcal{V}(x_0)$, *rezultă că* $\emptyset \neq A \cap V \neq \{x_0\}$;
$3^\circ\ (\forall)\ V \in \mathcal{V}(x_0)$, *rezultă că mulțimea* $A \cap V$ *este infinită*;
$4^\circ\ (\exists)\ (x_n)_{n \geq 1}$ *un șir cu elemente din* $A \setminus \{x_0\}$ *a.î.* $x_n \to x_0$.

Dem. $1^\circ \Leftrightarrow A \cap (V \setminus \{x_0\}) \neq \emptyset$, $(\forall)\ V \in \mathcal{V}(x_0) \Leftrightarrow \emptyset \neq A \cap V \neq \{x_0\}$, $(\forall)\ V \in \mathcal{V}(x_0) \Leftrightarrow 2^\circ$

$1^\circ \Rightarrow 3^\circ$. Fie $V \in \mathcal{V}(x_0)$ fixată și să presupunem că $A \cap V$ este finită; fie $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ o enumerare a mulțimii $A \cap V \setminus \{x_0\}$. Evident $(\forall)\ i = \overline{1, n}$ avem $x_i \neq x_0$, deci $(\exists)\ V_i \in \mathcal{V}(x_0)$ cu $V_i \not\ni x_i$ și deci punînd $U := V \cap V_1 \cap V_2 \cap \ldots \cap V_n$, rezultă imediat că $U \in \mathcal{V}(x_0)$ și $A \cap (U \setminus \{x_0\}) = \emptyset$, absurd. Rămîne că $A \cap V$ este infinită, $(\forall)\ V \in \mathcal{V}(x_0)$.

$3^\circ \Rightarrow 4^\circ$. Fie $V_n = \left(x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n}\right)$, $(n \geq 1)$. Deoarece $A \cap V_n$ este infinită, $(\exists)\ x_n \in A \cap V_n$, $x_n \neq x_0$. Obținem astfel un șir $(x_n)_{n \geq 1}$ cu elemente din A cu proprietatea că $|x_n - x_0| < \frac{1}{n}$, $(\forall)\ n \geq 1$, deci (P.2.3.18.) $x_n \to x_0$.

$4^\circ \Rightarrow 1^\circ$. Fie $V \in \mathcal{V}(x_0)$ fixată. Cf. ipotezei $(\exists)\ (x_n)_{n \geq 1}$ un șir cu elemente din $A \setminus \{x_0\}$, care are limita x_0. Atunci $(\exists)\ n_V \geq 1$ cu $x_n \in V$, $(\forall)\ n \geq n_V$, deci $x_n \in A \cap (V \setminus \{x_0\})$, $(\forall)\ n \geq n_V$ și deci $A \cap (V \setminus \{x_0\}) \neq \emptyset$. Prin urmare $x_0 \in A'$.

Corolar 1. *Fie* $A \subseteq \mathbf{R}$ *o mulțime și* $x_0 \in \mathbf{R}$ *un punct. Atunci* $x_0 \in A' \Leftrightarrow (\exists)\ (x_n)_{n \geq 1}$ *un șir de elemente din* A *care are limita* x_0, *ai cărui termeni sînt diferiți între ei doi cîte doi* $\Leftrightarrow (\exists)\ (x_n)_{n \geq 1}$ *un șir strict monoton cu elemente din* A *care are limita* x_0.

Corolar 2. *Fie* $A \subseteq \mathbf{R}$ *o mulțime. Atunci cond.* 1°—4° *sînt echivalente*:
$1^\circ\ x_0 \in A'^d$;
$2^\circ\ (\forall)\ V \in \mathcal{V}^*(x_0)$, *rezultă că* $\emptyset \neq A \cap V^+ \neq \{x_0\}$;
$3^\circ\ (\forall)\ V \in \mathcal{V}^*(x_0)$, *rezultă că mulțimea* $A \cap V^+$ *este infinită*;
$4^\circ\ (\exists)\ (x_n)_{n \geq 1}$ *un șir cu elemente din* A *a.î.* $x_n > x_0$, $(\forall)\ n \geq 1$ *și* $x_n \to x_0$;
$5^\circ\ (\exists)\ (x_n)_{n \geq 1}$ *un șir cu elemente din* A *a.î.* $x_n \searrow x_0$
Afirmații analoage pentru $x_0 \in A'^s$

Dem. $1°\Leftrightarrow 2°$. $x_0 \in A'^d \Leftrightarrow x_0 \in (A \cap [x_0, \infty))' \Leftrightarrow (\forall)\ V \in \mathcal{V}(x_0)$, rezultă că $\emptyset \neq (A \cap [x_0, \infty)) \cap V \neq \{x_0\} \Leftrightarrow (\forall)\ V \in \mathcal{V}(x_0)$ rezultă că $\emptyset \neq A \cap V^+ \neq \{x_0\}$.

$1° \Leftrightarrow 4°. x_0 \in A'^d \Leftrightarrow x_0 \in (A \cap [x_0, \infty))' \Leftrightarrow (\exists)\ x_n \in A \cap [x_0, \infty) \setminus \{x_0\}$ a.î. $x_n \to x_0 \Leftrightarrow (\exists)\ x_n \in A$, $x_n > x_0$, $(\forall)\ n \geqslant 1$ a.î. $x_n \to x_0$.

Evident $5° \Rightarrow 4°$ iar $4° \Rightarrow 5°$ rezultă din P.2.3.20.

$1° \Leftrightarrow 3°$ Se arată la fel cu $1° \Leftrightarrow 2°$.

5.1.9. Teoremă (Bolzano-Weierstrass). *Fie $A \subseteq \mathbf{R}$ o mulțime infinită și mărginită. Atunci A posedă cel puțin un punct de acumulare i.e. $A' \neq \emptyset$.*

Dem. Mulțimea A fiind infinită, există $(x_n)_{n\geqslant 1}$ un șir cu elemente din A a.î. $x_n \neq x_m$ $(n \neq m)$. Cum A este mărginită, șirul $(x_n)_{n\geqslant 1}$ este mărginit, deci (T.2.3.21.) el posedă un subșir convergent $(x_{n_k})_{k\geqslant 1}$; fie $x = \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}$. Din T.5.1.8. Cor. 1 rezultă că $x \in A'$, deci $A' \neq \emptyset$.

Corolar 1. *Fie $A \subseteq \mathbf{R}$ o mulțime. Atunci A infinită $\Leftrightarrow A'[\overline{\mathbf{R}}] \neq \emptyset$.*

Dem. ($\Rightarrow$) Dacă A este mărginită, atunci (T.5.1.9.) $A' \neq \emptyset$, deci cum $A'[\overline{\mathbf{R}}] \supseteq A'[\mathbf{R}]$, rezultă $A'[\overline{\mathbf{R}}] \neq \emptyset$. Dacă A nu este mărginită, spre exemplu nu posedă majoranți, atunci $+\infty \in A'[\mathbf{R}]$ etc.

Implicația ($\Leftarrow$) rezultă raționînd prin reducere la absurd, din T.5.1.8.(3°).

Corolar 2. *Fie $A \subseteq \mathbf{R}$ o mulțime mărginită. Atunci A este infinită $\Leftrightarrow A' \neq \emptyset$.*

5.1.10. Definiție. Fie $A \subseteq \mathbf{R}$ o mulțime. Mulțimea $A \cup A'[\mathbf{R}]$ (resp. $A \cup A'[\overline{\mathbf{R}}]$) se numește *aderența* lui A în $\mathbf{R}$ (resp. $\overline{\mathbf{R}}$) și se notează cu $\bar{A}[\mathbf{R}]$ (resp. $\bar{A}[\overline{\mathbf{R}}]$). Vom spune că A este *închisă* în $\mathbf{R}$ (resp. $\overline{\mathbf{R}}$) dacă $A = \bar{A}[\mathbf{R}]$ (resp. $A = \bar{A}[\overline{\mathbf{R}}]$). O mulțime $M \subseteq A$ se numește *închisă relativ la* A, dacă $(\exists)\ B \subseteq \mathbf{R}$ închisă a.î. $A \cap B = M$.

Din definiția dată rezultă imediat afirmațiile:

$1°\ x_0 \in \bar{A}[\mathbf{R}] \Leftrightarrow (\forall)\ \varepsilon > 0$, $(\exists)\ x \in A$ a.î. $|x - x_0| < \varepsilon$;

$2°\ +\infty \in \bar{A}[\overline{\mathbf{R}}] \Leftrightarrow (\forall)\ c \in \mathbf{R}_+$, $(\exists)\ x \in A$ a.î. $x > c$;

$3°\ -\infty \in \bar{A}[\overline{\mathbf{R}}] \Leftrightarrow (\forall)\ c \in \mathbf{R}_-$, $(\exists)\ x \in A$ a.î. $x < c$.

Observație Un punct $x_0 \in \bar{A}[\mathbf{R}]$ (resp. $\bar{A}[\overline{\mathbf{R}}]$) poate să aparțină sau nu lui A.

5.1.11. Propoziție. *Fie $A \subseteq \mathbf{R}$ o mulțime. Atunci au loc afirmațiile:*

$1°\ \bar{A}[\mathbf{R}] = \mathbf{R} \cap \bar{A}[\overline{\mathbf{R}}]$;

$2°\ \bar{A}[\mathbf{R}] = \bar{A}[\overline{\mathbf{R}}] \Leftrightarrow A$ *mărginită*;

$3°\ +\infty \in \bar{A}[\overline{\mathbf{R}}] \Leftrightarrow A$ *nu admite majoranți*;

$4°\ -\infty \in \bar{A}[\overline{\mathbf{R}}] \Leftrightarrow A$ *nu admite minoranți*;

$5°\ \bar{A}[\overline{\mathbf{R}}]$ *diferă de* $\bar{A}[\mathbf{R}]$ *prin cel mult două puncte* $+\infty$ *și* $-\infty$.

Dem. Aplicăm P.5.1.6.

Din P.5.1.11. rezultă că proprietățile mulțimii $\bar{A}[\overline{\mathbf{R}}]$ se deduc ușor din cele ale mulțimii $\bar{A}[\mathbf{R}]$. De aceea vom studia numai mulțimea $\bar{A}[\mathbf{R}]$ pe care o vom nota simplu cu $\bar{A}$ și o vom numi *aderența* lui A; un punct $x_0 \in \bar{A}$ se numește *punct aderent* al mulțimii A. Dacă A este închisă în $\mathbf{R}$ i.e. $A = \bar{A}$, vom spune simplu că A este *închisă*.

5.1.12. Definiție. Fie $A \subseteq \mathbf{R}$ o mulțime. Mulțimea $\bar{A} \cap \overline{\mathbb{C}A}$ se numește *frontiera* lui A (subînțeles în $\mathbf{R}$) și se notează $\mathrm{Fr}(A)$. Analog se definește *frontiera* lui A în $\overline{\mathbf{R}}$. Un punct $x \in \mathrm{Fr}(A)$ se numește *punct frontieră* al mulțimii A.

Exemple

1. Fie $A \subseteq \mathbf{R}$ o mulțime finită, mai general A discretă. Atunci A este închisă. In particular $\mathbf{N}$ și $\mathbf{Z}$ sînt mulțimi închise.

2. Fie $A \subseteq \mathbf{R}$ o mulțime de forma : (a, b), $[a, b)$, $(a, b]$, $(a, b) \cap \mathbf{Q}$ sau $(a, b) \setminus \mathbf{Q}$. Atunci $\bar{A} = [a, b]$.

3. Fie $A \subseteq \mathbf{R}$ un interval mărginit de capete a și b. Atunci $\mathrm{Fr}(A) = \{a, b\}$.

4. $\overline{\mathbf{Q}} = \overline{\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}} = \mathrm{Fr}(\mathbf{Q}) = \mathrm{Fr}(\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}) = \mathbf{R}$;

5. $\overline{\mathbf{N}}[\overline{\mathbf{R}}] = \mathbf{N} \cup \{+\infty\}$, $\overline{\mathbf{Z}}[\overline{\mathbf{R}}] = \mathbf{Z} \cup \{-\infty, +\infty\}$, deci $\mathbf{N}$ și $\mathbf{Z}$ nu sînt închise în $\overline{\mathbf{R}}$.

6. Dacă $A = \left\{1, \frac{1}{2}, \ldots \frac{1}{n}, \ldots\right\}$, atunci $\bar{A} = \mathrm{Fr}(A) = A \cup \{0\}$.

5.1.13. Propoziție.
1° $\overline{\emptyset} = \emptyset$; 2° $\overline{\mathbf{R}} = \mathbf{R}$[1]; 3° $A \subseteq \bar{A}$, $(\forall)\, A \subseteq \mathbf{R}$; 4° $(\forall)\, A, B \subseteq \mathbf{R}$, $A \subseteq B \Rightarrow \bar{A} \subseteq \bar{B}$;
5° $(\forall)\, A, B \subseteq \mathbf{R}$, $A \subseteq B$ și B *închisă* $\Rightarrow \bar{A} \subseteq B$; 6° $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$, $(\forall)\, A, B \subseteq \mathbf{R}$; 7° $\overline{A \cap B} \subseteq \bar{A} \cap \bar{B}$, $(\forall)\, A, B \subseteq \mathbf{R}$; 8° $\bar{\bar{A}} = \bar{A}$, $(\forall)\, A \subseteq \mathbf{R}$, *deci* $\bar{A}$ *este mulțime închisă*; 9° $\bar{A} = A \cup \mathrm{Fr}(A)$.

Dem. Proprietățile $1-4^\circ$ sînt evidente.

5° Dacă $A \subseteq B$, rezultă (cf. 4°) $\bar{A} \subseteq \bar{B}$. Cum B este închisă, avem $\bar{B} = B$, deci $\bar{A} \subseteq B$.

6° $\overline{A \cup B} = (A \cup B) \cup (A \cup B)' \overset{5.1.7}{=} A \cup B \cup A' \cup B' = (A \cup A') \cup (B \cup B') = \bar{A} \cup \bar{B}$

7° $\overline{A \cap B} = (A \cap B) \cup (A \cap B)' \overset{5.1.7.}{\subseteq} (A \cap B) \cup (A' \cap B') \subseteq (A \cup A') \cap (B \cup B') = \bar{A} \cup \bar{B}$

8° $\bar{\bar{A}} = \overline{A \cup A'} = (A \cup A') \cup (A \cup A')' \overset{5.1.7}{=} (A \cup A') \cup (A' \cup A'') \overset{5.1.7}{\subseteq} A \cup A' = \bar{A}$. Cum $\bar{A} \subseteq \bar{\bar{A}}$ (cf. 3°), avem $\bar{\bar{A}} = \bar{A}$.

9° Deoarece $A \subseteq \bar{A}$ și $\mathrm{Fr}(A) \subseteq \bar{A}$, rezultă $A \cup \mathrm{Fr}(A) \subseteq \bar{A}$. Reciproc, fie $x_0 \in \bar{A}$ fixat. Presupunem $x_0 \notin A$, deci $x_0 \in \complement A \subseteq \overline{\complement A}$ și deci $x_0 \in \bar{A} \cap \overline{\complement A} = \mathrm{Fr}(A)$. Așadar $\bar{A} \subseteq A \cup \mathrm{Fr}(A)$ etc.

5.1.14. Propoziție. *Fie $A \subseteq \mathbf{R}$ o mulțime. Atunci cond.* $1^\circ - 3^\circ$ *sînt echivalente* :
1° $x_0 \in \bar{A}$; 2° $(\forall)\, V \in \mathfrak{V}(x_0)$, *rezultă că* $A \cap V \neq \emptyset$; 3° $(\exists)\, (x_n)_{n \geq 1}$ *un șir cu elemente din A a.î.* $x_n \to x_0$.

Dem. $1^\circ \Leftrightarrow 2^\circ$. $x_0 \in \bar{A} \Leftrightarrow (x_0 \in A) \vee (x_0 \in A') \Leftrightarrow (x_0 \in A) \vee ((\forall)\, V \in \mathfrak{V}(x_0)$, avem $A \cap V \setminus \{x_0\} \neq \emptyset) \Leftrightarrow (\forall)\, V \in \mathfrak{V}(x_0)$, avem $A \cap V \neq \emptyset$.

$1^\circ \Leftrightarrow 3^\circ$. $x_0 \in \bar{A} \Leftrightarrow (x_0 \in A) \vee (x_0 \in A') \overset{5.1.8.}{\Leftrightarrow} (x_0 \in A) \vee ((\exists) x_n \in A \setminus \{x_0\}, x_n \to x_0) \Leftrightarrow (\exists)\, x_n \in A,\ x_n \to x_0$.

Corolar 1. *Fie $A \subseteq \mathbf{R}$. Atunci* $x_0 \in \mathrm{Fr}(A) \Leftrightarrow (\exists)\, (x_n)_{n \geq 1} \subseteq A, (\exists)\, (y_n)_{n \geq 1} \subseteq \complement A$ *a.î.* $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = \lim\limits_{n \to \infty} y_n = x_0$.

5.1.15. Propoziție. *Fie $A \subseteq \mathbf{R}$ o mulțime. Atunci cond.* $1^\circ - 5^\circ$ *sînt echivalente* :

1° *A închisă*; 2° $\bar{A} \subseteq A$; 3° $A' \subseteq A$; 4° $\mathrm{Fr}(A) \subseteq A$; 5° $(\forall)$ $(x_n)_{n \geq 1}$ *un șir convergent (resp. Cauchy) cu elemente din A, rezultă că* $\lim\limits_{n \to \infty} x_n \in A$.

Dem. $1^\circ \Leftrightarrow 2^\circ \Leftrightarrow 3^\circ$. A închisă : $\Leftrightarrow A = \bar{A}$ și deoarece $\bar{A} \subseteq \bar{A} = A \cup A'$, avem $A = \bar{A} \Leftrightarrow \bar{A} \subseteq A \Leftrightarrow A' \subseteq A$.

$1^\circ \Leftrightarrow 4^\circ$. A închisă : $\Leftrightarrow A = \bar{A}$ și deoarece $\bar{A} = A \cup \mathrm{Fr}(A)$, avem $A = \bar{A} \Leftrightarrow \mathrm{Fr}(A) \subseteq A$.

---

[1] Aici $\overline{\mathbf{R}}$ înseamnă aderența lui $\mathbf{R}$ în $\mathbf{R}$.

1°⇒5°. Fie A închisă și $(x_n)_{n\geq 1}$ un șir convergent cu elemente din A. Atunci (P.5.1.14.) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \in \bar{A}$, deci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \in A$.

5°⇒2°. Fie $x_0 \in \bar{A}$ fixat. Atunci (P.5.1.14.) $(\exists)\ x_n \in A$, $(n \geq 1)$, cu $x_n \to x_0$. Cf. 5° $x_0 \in A$, deci $\bar{A} \subseteq A$.

5.1.16. Propoziție. *Fie $A \subseteq \mathbf{R}$ o mulțime. Atunci au loc afirmațiile:*

1° *A majorată (resp. minorată) $\Leftrightarrow$ $\bar{A}$ majorată (resp. minorată);*

2° *A majorată (resp. minorată) $\Rightarrow$ $\sup A = \sup \bar{A} \in \bar{A}$ (resp. $\inf A = \inf \bar{A} \in \bar{A}$);*

3° *A închisă și majorată (resp. minorată) $\Rightarrow$ $\sup A$ (resp. $\inf A$) $\in A$;*

4° *A nu este majorată (resp. minorată) $\Rightarrow$ $\sup A = \sup \bar{A} = +\infty$ (resp. $\inf A = \inf \bar{A} = -\infty$);*

5° *A mărginită $\Leftrightarrow$ $\bar{A}$ mărginită;*

6° *A mărginită $\Rightarrow$ $\sup A \in \bar{A}$ și $\inf A \in \bar{A}$;*

7° *A mărginită și închisă $\Rightarrow$ $\sup A \in A$ și $\inf A \in A$.*

Dem. 1°($\Rightarrow$) Fie A majorată, $b := \sup A$ și $x \in \bar{A}$ fixat. Atunci (P.2.3.22.) $(\exists)\ x_n \in A$ cu $x_n \to b$. Cum $x_n \leq b$, $(\forall)\ n \geq 1$, rezultă (P.2.3.17.) $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \leq b$. Așadar $\bar{A}$ este majorată de b.

($\Leftarrow$) Dacă $\bar{A}$ este majorată, cum $A \subseteq \bar{A}$, rezultă A majorată.

2° Fie $b := \sup A$. Am văzut (1°) că b majorează pe $\bar{A}$. Din P.2.3.22. rezultă că $(\exists)\ x_n \in A$ cu $x_n \to b$, deci (P.5.1.14.) $b \in \bar{A}$. Așadar $b = \max \bar{A}$, deci $b = \sup \bar{A}$ și deci $\sup A = \sup \bar{A}$.

3° Dacă A este închisă, avem $A = \bar{A}$, deci cf. 2° $\sup A \in \bar{A} = A$.

4° Dacă A nu este majorată, din 1° rezultă că $\bar{A}$ nu este majorată. Atunci $\sup A = +\infty$ și $\sup \bar{A} = +\infty$.

5° rezultă din 1°; 6° rezultă din 2°; 7° rezultă din 3°.

Corolar 1. *Fie $A \subseteq \mathbf{R}$ o mulțime mărginită. Atunci* $\sup A$ *și* $\inf A$ *sînt elemente fie din A, fie din A'.*

Observație. O mulțime care-și conține marginile nu este numaidecît închisă.

Contraexemplu. Fie $A = [0, 2] \setminus \{1\}$. Atunci $\inf A \in A$, $\sup A \in A$ și A nu este închisă.

5.1.17. Definiție. Fie $A \subseteq B \subseteq \mathbf{R}$ două mulțimi. Vom spune că A este *densă* (în sens topologic) în B, dacă $\bar{A} \supseteq B$ i.e. orice element din B este limita unui șir cu elemente din A.

5.1.18. Propoziție. *Fie $I \subseteq \mathbf{R}$ un interval și $A \subseteq I$ o mulțime. Atunci A este densă (în sens topologic) în $I \Leftrightarrow$ A este densă în sensul ordinii în I.*

Dem.($\Rightarrow$)Fie $a, b \in I$, $a<b$, fixați. Atunci $c := \dfrac{a+b}{2} \in I$ și $V := (a,b) \in \mathcal{V}(c)$, deci (P.5.1.14.(2°)) $A \cap V \neq \emptyset$; fie $d \in A \cap V$ fixat. Așadar $d \in A$ și $a < d < b$, încît A este densă în sensul ordinii în I.

($\Leftarrow$) Fie $x \in I$ fixat. Presupunem cazul nebanal $I \neq \{x\}$ și fie $y \in I \setminus \{x\}$ fixat, spre exemplu $y > x$. Atunci $(\forall)\ n \geq 1$ avem $x_n := x + \dfrac{y-x}{2^n} \in I$, deci cf. ipotezei $(\exists)\ a_n \in A$, $x < a_n < x_n$. Cum evident $x_n \to x$, rezultă (P.2.3.7.) $a_n \to x$, deci (P.5.1.14.(3°)) $x \in \bar{A}$, prin urmare $I \subseteq \bar{A}$.

Corolar 1. *Mulțimile* $\mathbf{Q}$ *și* $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ *sînt dense (în sens topologic) în* $\mathbf{R}$ *i.e.* $\overline{\mathbf{Q}} = \overline{\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}} = \mathbf{R}$.

Dem. Aplicăm P.5.1.18 și P.2.1.20.

Observație. Dacă mulțimea I din P.5.1.18. nu este interval, nici una din implicații nu este numaidecît adevărată.

Contraexemple. 1° Fie $B = [0, \sqrt{2}] \cup [\sqrt{3}, 2]$ și $A = B \cap \mathbf{Q}$. Atunci $\bar{A} = \mathbf{Q}$ și între $\sqrt{2}$ și $\sqrt{3}$ nu există elemente din A; 2° Fie $B = (0, 1) \cup \{2\}$ și $A = (0, 1)$. Atunci A este densă în sensul ordinii în B și $\bar{A} \not\supseteq B$.

5.1.19. Propoziție. *Fie $A \subseteq \mathbf{R}$ o mulțime arbitrară. Atunci* $(\exists)\ B \subseteq A$ *cel mult numerabilă a.î. $A \subseteq \bar{B}$ i.e. B este densă în A.*

Dem. Fie $\mathcal{A} := \{(p, q);\ p, q \in \mathbf{Q},\ p < q\}$ și $\mathcal{A}_0 := \{I \in \mathcal{A};\ I \cap A \neq \emptyset\}$. Deoarece $\mathbf{Q} \times \mathbf{Q}$ este numerabilă (P.4.1.13.Cor. 1—2), rezultă că $\mathcal{A}$ este numerabilă, deci $\mathcal{A}_0$ este cel mult numerabilă. Extrăgînd din fiecare mulțime $A \cap I$, $(I \in \mathcal{A}_0)$, cîte un element a_I, obținem o mulțime cel mult numerabilă B cu $B \subseteq A$. Să arătăm că $A \subseteq \bar{B}$. Fie în acest scop $a \in A$ și $V \in \mathcal{V}(a)$ fixați. Evident $(\exists)\ p, q \in \mathbf{Q}$, cu $p < x_0 < q$ și $I_0 := (p, q) \subseteq V$, deci $I_0 \in \mathcal{A}_0$ și deci $a_{I_0} \in A \cap I_0 \subseteq V$, încît $B \cap V \neq \emptyset$. Așadar $a \in \bar{B}$, deci $A \subseteq \bar{B}$.

5.1.20. Definiție. Fie $A \subseteq \mathbf{R}$ o mulțime. Un punct $x_0 \in A$ se numește *punct interior* al mulțimii A dacă $(\exists)\ V \in \mathcal{V}(x_0)$ a.î. $V \subseteq A$. Mulțimea tuturor punctelor interioare mulțimii A se numește *interiorul* lui A și se notează cu $\mathring{A}$.

Mulțimea $\overset{\circ}{\complement A}$ se numește *exteriorul* lui A. Vom spune că A este *deschisă*, dacă $A = \mathring{A}$. O mulțime $M \subseteq A$ se numește *deschisă relativ la* A, dacă $(\exists)\ D \subseteq \mathbf{R}$ deschisă a.î. $A \cap D = M$. Un punct $x_0 \in A$ se numește *punct izolat* al mulțimii A, dacă $(\exists)\ V \in \mathcal{V}(x_0)$ a.î. $A \cap V = \{x_0\}$. Mulțimea tuturor punctelor izolate ale mulțimii A se notează cu $'A$. Dacă $A = {}'A$, vom spune că A este *discretă*.

Observație. În fapt am definit mai sus noțiunea de mulțime deschisă în $\mathbf{R}$. Analog se definește mulțimea deschisă în $\overline{\mathbf{R}}$, dacă $A \subseteq \overline{\mathbf{R}}$.

Exemple.

1. Fie A una din mulțimile $(0, 1) \cap \mathbf{Q}$, $(0, 1) \setminus \mathbf{Q}$, sau $\left\{1, \frac{1}{2}, \ldots \frac{1}{n}, \ldots\right\}$. Atunci $\mathring{A} = \emptyset$, deci A nu este deschisă.

2. Fie $A \subseteq \mathbf{R}$ o mulțime de forma : $[a, b]$, $[a, b)$ sau (a, b) unde $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$. Atunci $\mathring{A} = (a, b)$ și ${}'A = \emptyset$. Să observăm că $[a, b)$ este o mulțime nici deschisă nici închisă.

3. $\mathring{\mathbf{N}} = \mathring{\mathbf{Z}} = \mathring{\mathbf{Q}} = \overset{\circ}{\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}} = \emptyset$, ${}'\mathbf{N} = \mathbf{N}$, ${}'\mathbf{Z} = \mathbf{Z}$, deci $\mathbf{N}$ și $\mathbf{Z}$ sînt discrete
4. Orice mulțime finită este discretă.
5. Mulțimile $\mathbf{R} \setminus \mathbf{N}$, $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$ sînt deschise.

5.1.21. Propoziție. *Fie $I \subseteq \mathbf{R}$ un interval. Atunci I mulțime deschisă (resp. închisă)* $\Leftrightarrow$ *I interval deschis (resp. închis).*

Dem. ($\Rightarrow$) Dacă, spre exemplu, $I := [a, b)$, atunci $a \notin \mathring{I}$, absurd etc.

($\Leftarrow$) Fie, spre exemplu, $I := (a, b)$ cu $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$. Atunci $(\forall)\ x_0 \in (a, b)$ punem $\varepsilon := \min\{x_0 - a, b - x_0\}$ și avem $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subseteq I$, deci $x_0 \in \mathring{I}$, încît $I = \mathring{I}$ și deci I mulțime deschisă.

Observație. Din P.5.1.21. rezultă că noțiunea de mulțime deschisă (resp. închisă) este generalizarea naturală a noțiunii de interval deschis (resp. închis).

5.1.22. Propoziție.

1° $\mathring{\emptyset} = \emptyset$; 2° $\mathring{\mathbf{R}} = \mathbf{R}$; 3° $\mathring{A} \subseteq A$, $(\forall)\ A \subseteq \mathbf{R}$; 4° $\overset{\circ}{A \cap B} = \mathring{A} \cap \mathring{B}$, $(\forall)\ A, B \subseteq \mathbf{R}$;

5° $\overset{\circ}{A \cup B} \supseteq \mathring{A} \cup \mathring{B}$, $(\forall)\ A, B \subseteq \mathbf{R}$; 6° $\overset{\circ}{\mathring{A}} = \mathring{A}$, $(\forall)\ A \subseteq \mathbf{R}$; 7° *$\mathring{A}$ este o mulțime deschisă* $(\forall)\ A \subseteq \mathbf{R}$; 8° $\complement\mathring{A} = \overline{\complement A}$, $\complement\bar{A} = \overset{\circ}{\complement A}$, $(\forall)\ A \subseteq \mathbf{R}$; 9° $\mathrm{Fr}(A) = A \setminus \mathring{A}$, $(\forall)\ A \subseteq \mathbf{R}$; 10° ${}'A = A \setminus A'$, $(\forall)\ A \subseteq \mathbf{R}$; 11° $\bar{A} = {}'A \cup A'$, $(\forall)\ A \subseteq \mathbf{R}$.

Dem. Proprietățile 1°—3° sînt evidente.

4° Fie $x \in \overset{\circ}{\widehat{A \cap B}}$ fixat. Atunci $(\exists)\ V \in \mathcal{V}(x)$ cu $V \subseteq A \cap B$, deci $V \subseteq A$ și $V \subseteq B$ și deci $x \in \mathring{A} \cap \mathring{B}$. Reciproc, dacă $x \in \mathring{A} \cap \mathring{B}$, deci $x \in \mathring{A} \wedge x \in \mathring{B}$ și deci $(\exists)\ V_1, V_2 \in \mathcal{V}(x)$ cu $V_1 \subseteq A \wedge V_2 \subseteq B$. Punem $V := V_1 \cap V_2$. Evident $V \in \mathcal{V}(x)$ și $V \subseteq A \cap B$, deci $x \in \overset{\circ}{\widehat{A \cap B}}$.

5° Fie $x \in \mathring{A} \cup \mathring{B}$ fixat, deci $x \in \mathring{A} \vee x \in \mathring{B}$ și deci $(\exists)\ V \in \mathcal{V}(x)$ cu $V \subseteq A \vee V \subseteq B$, încît $V \subseteq A \cup B$, prin urmare $x \in \overset{\circ}{\widehat{A \cup B}}$.

6° $\overset{\circ}{\widehat{\mathring{A}}} \subseteq \mathring{A}$ (cf. 3°). Reciproc, fie $x \in \mathring{A}$ fixat. Atunci $(\exists)\ \varepsilon > 0$ a.î. $V := (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq A$, deci $V = \mathring{V} \subseteq \mathring{A}$ și deci $x \in \overset{\circ}{\widehat{\mathring{A}}}$. Așadar $\mathring{A} \subseteq \overset{\circ}{\widehat{\mathring{A}}}$ etc.

7° $\mathring{A}$ fiind egală cu interiorul său (cf. 6°) este deschisă.

8° $x \in \complement\mathring{A} \Leftrightarrow x \notin \mathring{A} \overset{5.1.14.}{\Leftrightarrow} (\forall)\ V \in \mathcal{V}(x)$, avem $V \not\subseteq A \Leftrightarrow (\forall)\ V \in \mathcal{V}(x)$, avem $V \cap \complement A \neq \emptyset \Leftrightarrow x \in \overline{\complement A}$. A doua relație din 8° se arată la fel.

9° $\mathrm{Fr}(A) = \bar{A} \cap \overline{\complement A} \overset{8°}{=} \bar{A} \cap \complement\mathring{A} = \bar{A} \setminus \mathring{A}$.

10° Fie $x \in {}'A$ fixat. Atunci $(\exists)\ V \in \mathcal{V}(x)$ a.î. $A \cap V = \{x\}$, deci (T.5.1.8.(2°)) $x \notin A'$ și deci $x \in A \setminus A'$, încît ${}'A \subseteq A \setminus A'$. Reciproc, dacă $x \in A \setminus A'$, avem $x \in A$ și $x \notin A'$, deci $(\exists)\ V \in \mathcal{V}(x)$ cu $A \cap (V \setminus \{x\}) = \emptyset \Leftrightarrow A \cap V = \{x\}$. Așadar $x \in {}'A$, prin urmare $A \setminus A' \subseteq {}'A$

11° $\bar{A} := A \cup A' = (A \setminus A') \cup A' \overset{10°}{=} {}'A \cup A'$.

Corolar 1. *Fie $A \subseteq \mathbf{R}$ o mulțime. Atunci* 1° *A deschisă* $\Leftrightarrow \mathrm{Fr}(A) = \bar{A} \setminus \mathring{A}$; 2° *$A$ închisă* $\Leftrightarrow A = {}'A \cup A' \Leftrightarrow \mathrm{Fr}(A) = A \setminus \mathring{A}$.

Dem. 1° rezultă din P.5.1.22.(9°) iar 2° rezultă din P.5.1.22.(11°) și P.5.1.15.(3°+4°).

Observație. În P.5.1.22.(5°) nu avem numaidecît egalitate.

Contraexemplu. Fie $A = (0, 1)$, $B = [1, 2)$. Atunci $\overset{\circ}{\widehat{A \cup B}} = (0, 2)$ și $\mathring{A} \cup \mathring{B} = (0, 1) \cup (1, 2)$.

5.1.23. Propoziție. *Fie $A \subseteq \mathbf{R}$ o mulțime. Atunci cond.* 1°—4° *sînt echivalente*:

1° *A este deschisă*;

2° *Orice punct din A este interior lui A i.e. $A \subseteq \mathring{A}$*;

3° *$\mathbf{R} \setminus A$ este închisă*;

4° *A poate fi scrisă ca o reuniune de intervale deschise (în $\mathbf{R}$).*

Dem. 1°$\Leftrightarrow$2°. A deschisă $\Leftrightarrow A = \mathring{A}$. Cum întotdeauna avem $\mathring{A} \subseteq A$, rezultă că $A = \mathring{A} \Leftrightarrow A \subseteq \mathring{A}$.

1°$\Leftrightarrow$3°. A deschisă $\Leftrightarrow A = \mathring{A} \Leftrightarrow \complement A = \complement\mathring{A}$. Cum avem (P.5.1.22.(8°) $\complement\mathring{A} = \overline{\complement A}$, rezultă: A deschisă $\Leftrightarrow \complement A = \overline{\complement A} \Leftrightarrow \complement A$ închisă.

1°$\Rightarrow$4°. Fie A deschisă i.e. $A = \mathring{A}$. Atunci $(\forall)\ x \in A$, $(\exists)\ \varepsilon_x > 0$ a.î. $I_x := (x - \varepsilon_x, x + \varepsilon_x) \subseteq A$. Evident avem $A = \bigcup_{x \in A} I_x$.

4°$\Rightarrow$2°. Fie $A = \bigcup_{j \in J} I_j$, unde $I_j (j \in J)$ este un interval deschis. Atunci $(\forall)\ x \in A$, $(\exists)\ j \in J$ cu $I_j \ni x$, deci avem $x \in I_j \subseteq A$ și deci $x \in \mathring{A}$, prin urmare $A \subseteq \mathring{A}$.

5.1.24. Propoziție. 1° *$\emptyset$ și $\mathbf{R}$ sînt mulțimi deschise*; 2° *Intersecția a două mulțimi deschise în $\mathbf{R}$ este deschisă*; 3° *Reuniunea unei familii oarecare de mulțimi deschise în $\mathbf{R}$ este o mulțime deschisă.*

Dem. 1° Este fals că $\emptyset$ nu este deschisă, deci $\emptyset$ este deschisă. Evident $\mathbf{R}$ este deschisă: $(\forall)\, x \in \mathbf{R}$, $(\forall)\, \varepsilon > 0$, avem $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq \mathbf{R}$, deci $x \in \mathring{\mathbf{R}}$ și deci $\mathbf{R} \subseteq \mathring{\mathbf{R}}$, prin urmare $\mathbf{R} = \mathring{\mathbf{R}}$.

2° Fie $D_1, D_2 \subseteq \mathbf{R}$ mulțimi deschise și $D := D_1 \cap D_2$. Fixăm $x \in D$, deci $x \in D_1$ și $x \in D_2$; atunci $(\exists)\, V_1, V_2 \in \mathcal{V}(x)$ cu $V_i \subseteq D_i$ $(i = \overline{1,2})$. Evident $V := V_1 \cap V_2 \in \mathcal{V}(x)$ și $V \subseteq D_1 \cap D_2 = D$, deci $x \in \mathring{D}$ și deci $D \subseteq \mathring{D}$, prin urmare $D = \mathring{D}$.

3° Fie D_i $(i \in I)$ deschise în $\mathbf{R}$ și $D = \bigcup_{i \in I} D_i$. Fixăm $x \in D$, deci $(\exists)\, i_0 \in I$ cu $x \in D_{i_0}$ și deci $(\exists)\, V \in \mathcal{V}(x)$ cu $V \subseteq D_{i_0} \subseteq D$. Așadar $x \in \mathring{D}$, deci $D \subseteq \mathring{D}$ și deci $D = \mathring{D}$ i.e. D deschisă.

Corolar 1. 1° *$\emptyset$ și $\mathbf{R}$ sînt mulțimi închise*; 2° *Intersecția unei familii oarecare de mulțimi închise este o mulțime închisă*; 3° *Reuniunea a două mulțimi închise în $\mathbf{R}$ este o mulțime închisă în $\mathbf{R}$.*

Dem. 1° Cum $\mathbf{R}$ și $\emptyset$ sînt mulțimi deschise, rezultă că $\emptyset = \complement\mathbf{R}$ și $\mathbf{R} = \complement\emptyset$ sînt mulțimi închise.

2° Fie A_i $(i \in I)$ închise în $\mathbf{R}$ și $A := \bigcap_i A_i$. Atunci $(\forall)\, i \in I$ mulțimea $\complement A_i$ este deschisă și avem $\complement A = \bigcup_i \complement A_i$, de unde rezultă (P.5.1.24.(3°)) că mulțimea $\complement A$ este deschisă, prin urmare A este închisă.

3° Dacă A_1, A_2 sînt deschise, scriem $\complement(A_1 \cap A_2) = (\complement A_1) \cup (\complement A_2)$ etc.

5.1.25. Propoziție. *Orice familie $(D_i)_{i \in I}$ de mulțimi din $\mathbf{R}$, deschise, nevide și disjuncte două cîte două este cel mult numerabilă.*

Dem. Deoarece $\mathbf{Q}$ este densă în $\mathbf{R}$ (P.5.1.18.Cor.1) și D_i $(i \in I)$ deschisă și nevidă, rezultă că $\mathbf{Q} \cap D_i \neq \emptyset$; fie $r_i \in \mathbf{Q} \cap D_i$ fixat. Obținem în acest fel o aplicație $I \ni i \mapsto r_i \in \mathbf{Q}$, care este evident injectivă, deoarece $D_i \cap D_j = \emptyset (i \neq j)$. Cum $\mathbf{Q}$ este numerabilă, rezultă (P.1.4.12.Cor.1) că I este cel mult numerabilă.

Corolar 1. *Orice familie de intervale din $\mathbf{R}$, deschise și disjuncte două cîte două, este cel mult numerabilă.*

Corolar 2. *Fie $A \subseteq \mathbf{R}$ o mulțime ε-discretă $(\varepsilon > 0)$ i.e. $|x - y| \geqslant \varepsilon$, $(\forall)\, x, y \in A$, $x \neq y$. Atunci A este cel mult numerabilă.*

Dem. $(\forall)\, a \in A$, fie $D_a := \left(a - \frac{\varepsilon}{2}, a + \frac{\varepsilon}{2}\right)$. Atunci $D_a \cap D_{a'} = \emptyset$, $(\forall)\, a, a' \in A$, $a \neq a'$, deci (Cor 1) familia $(D_a)_{a \in A}$ este cel mult numerabilă și deci A este cel mult numerabilă.

5.1.26. Teoremă. *Fie $D \subseteq \mathbf{R}$ o mulțime deschisă. Atunci există o familie cel mult numerabilă $(J_i)_{i \in I}$ de intervale deschise, disjuncte două cîte două a.î $D = \bigcup_i J_i$.*

Dem. $(\forall)\, x, y \in D$ să punem: $x \sim y \Leftrightarrow I_{x,y} \subseteq D$, unde $I_{x,y}$ este intervalul de capete x și y. Se vede imediat că $\sim$ este o relație de echivalență pe D. Într-adevăr, $[x, x] \subseteq D$, deci $x \sim x$. Fie $x, y, z \in D$ cu $x \sim y \wedge y \sim z$, deci $I_{x,y} \subseteq D$ și $I_{y,z} \subseteq D$. Atunci $J := I_{x,y} \cup I_{y,z}$ este un interval și cum $x, z \in J$, avem $I_{x,z} \subseteq J \subseteq D$, deci $x \sim z$ etc. Fie $(A_i)_{i \in I}$ o partiție a lui D, definită de relația $\sim$ (P.1.3.6.Cor.1). Să arătăm că fiecare $A_i (i \in I)$ este un interval deschis. Fie $i \in I$ și $x, y \in A_i$, $x < y$, fixați. A_i fiind o clasă de elemente echivalente între ele, avem $x \sim y$, deci $[x, y] \subseteq D$ și deci $[x, c] \subseteq D$, $(\forall)\, c \in (x, y)$, ceea ce înseamnă că $x \sim c$, încît $c \in A_i$, de unde rezultă $[x, y] \subseteq A_i$, prin urmare (P.2.2.13.) A_i este interval. Fie mai departe $a_i := \inf A_i$. Dacă $a_i \in A_i$, $(\exists)\, \varepsilon > 0$ cu $[a_i - \varepsilon, a_i + \varepsilon] \subseteq D$, deci $[a_i - \varepsilon, a_i] \subseteq D$ și deci $a_i - \varepsilon \sim a_i$, de unde

rezultă că $a_i - \varepsilon \in A_i$ încît $\inf A_i \leqslant a_i - \varepsilon$, absurd. Rămîne că $a_i \notin A_i$ și analog $b_i := \sup A_i \notin A_i$, deci A_i este un interval deschis; $A_i = (a_i, b_i)$. Din P.5.1.25 deducem că familia $(A_i)_{i \in I}$ este cel mult numerabilă.

5.1.27. Propoziție. *Fie $A \subseteq \mathbf{R}$ o mulțime discretă. Atunci A este cel mult numerabilă.*

Dem. Fie $A_n := \left\{ x \in A ; \left(x - \frac{1}{n}, \ x + \frac{1}{n} \right) \cap A = \{x\} \right\}$ $(n \geqslant 1)$. Să arătăm că $\bigcup_{n \geqslant 1} A_n = A$. Fie în acest scop $x \in A$ fixat; atunci $(\exists)\ \varepsilon > 0$ cu proprietatea că $(x - \varepsilon, \ x + \varepsilon) \cap A = \{x\}$, deci pentru $\frac{1}{n} < \varepsilon$ avem $\left(x - \frac{1}{n}, \ x + \frac{1}{n} \right) \cap A = \{x\}$ și deci $x \in A_n$, prin urmare $A = \bigcup_{n \geqslant 1} A_n$. Fiecare mulțime, $A_n (n \geqslant 1)$ fiind evident $\frac{1}{n}$ —discretă, este cel mult numerabilă (P.5.1.25.Cor.2), deci (P.1.4.13) A este cel mult numerabilă.

Observație. Proprietățile mulțimilor deschise, închise ale aderenței unei mulțimi etc. rămîn valabile dacă se iau relativ la o submulțime fixată din $\mathbf{R}$. Spre exemplu dacă $M \subseteq A \subseteq \mathbf{R}$, avem: M deschisă (resp. închisă) relativ la $A \Leftrightarrow A \setminus M$ este închisă (resp. deschisă) relativ la A etc.

5.1.28. Definiție. O mulțime $A \subseteq \mathbf{R}$ se numește *neconexă* (resp. *conexă*) dacă există (resp. nu există) $A_1, A_2 \subseteq A$ nevide a.î. $A = A_1 \cup A_2$ și $A_1 \cap \bar{A}_2 = \bar{A}_1 \cap A_2 = \emptyset$.

Exemple.

1. *Mulțimea redusă la un punct este conexă.*

2. *Mulțimea $A := \mathbf{R} \setminus \{x_0\}$, cu $x_0 \in \mathbf{R}$ fixat, este neconexă.*

Într-adevăr, dacă punem $A_1 := (-\infty, x_0)$ și $A_2 := (x_0, \infty)$, atunci A_1, A_2 sînt nevide, $A_1 \cup A_2 = A$, $\bar{A}_1 \cap A_2 = (-\infty, x_0] \cap (x_0, \infty) = \emptyset$, etc.

3. *Mulțimea $A = (0, 1] \cup (2, 3)$ este neconexă.*

Într-adevăr, dacă $A_1 := (0, 1]$ și $A_2 := (2, 3)$, atunci $A_1 \cup A_2 = A$, $\bar{A}_1 \cap A_2 = [0, 1] \cap (2, 3) = \emptyset$, etc.

5.1.29. Propoziție. *Fie $A \subseteq \mathbf{R}$ o mulțime. Atunci A este conexă $\Leftrightarrow$ nu există $D_1, D_2 \subseteq A$, deschise relativ la A, nevide, disjuncte, cu $D_1 \cup D_2 = A$.*

Dem. $(\Rightarrow)$ Presupunem că $(\exists)\ D_1, D_2 \subseteq A$ deschise relativ la A, nevide, disjuncte, cu $D_1 \cup D_2 = A$. Fie $G_i \subseteq \mathbf{R}$ deschisă în $\mathbf{R}$ a.î. $A \cap G_i = D_i (i = \overline{1, 2})$. Presupunem $\bar{D}_1 \cap D_2 \neq \emptyset$ și fie $x \in \bar{D}_1 \cap D_2$ fixat. Cum $x \in G_2$, rezultă că $G_2 \in \mathcal{V}(x)$, deci (P.5.1.14) $D_1 \cap G_2 \neq \emptyset$ i.e. $A \cap G_1 \cap G_2 \neq \emptyset$ și deci $D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$, absurd Rămîne că $\bar{D}_1 \cap D_2 = \emptyset$ și analog $D_1 \cap \bar{D}_2 = \emptyset$. Am obținut că A este neconexă absurd. Rămîne că nu există $D_1, D_2 \subseteq A$, deschise relativ la A, nevide, disjuncte cu $D_1 \cup D_2 = A$.

$(\Leftarrow)$ Presupunem A neconexă, deci $(\exists)\ A_1, A_2 \subseteq A$, nevide, cu $A_1 \cup A_2 = A$ și $A_1 \cap \bar{A}_2 = \bar{A}_1 \cap A_2 = \emptyset$. Atunci $A_2 \subseteq \mathbf{C}_{\mathbf{R}} \bar{A}_1$, deci

$$A_2 = A \cap A_2 \subseteq A_1 \cap \mathbf{C}_{\mathbf{R}} \bar{A}_1 \subseteq A \cap \mathbf{C}_{\mathbf{R}} A_1 = A \setminus A_1 = A_2$$

și deci $A_2 = A \cap \mathbf{C}_{\mathbf{R}} \bar{A}_1$. De aici rezultă că A_2 este deschisă relativ la A, deoarece $\bar{A}_1$ este închisă în $\mathbf{R}$ și $\mathbf{C}_{\mathbf{R}} \bar{A}_1$ deschisă în $\mathbf{R}$. Analog se arată că A_1 este deschisă relativ la A. Cum $A_1 \cap A_2 \subseteq \bar{A}_1 \cap A_2 = \emptyset$, rezultă A_1 și A_2 sînt disjuncte. Așadar $(\exists)\ A_1, A_2 \subseteq A$ deschise relativ la A, nevide, disjuncte, cu $A_1 \cup A_2 = A$, absurd. Rămîne că A este conexă.

5.1.30. Teoremă. *Fie $A \subseteq \mathbf{R}$ o mulțime. Atunci A este conexă $\Leftrightarrow$ A este interval.*

Dem. ($\Rightarrow$) Fie A conexă și $x, y \in A$, $x < y$, fixați. Dacă $[x, y] \nsubseteq A$, $(\exists)\, c \in (x, y) \setminus A$: să punem $A_1 := A \cap (-\infty, c)$ și $A_2 := A \cap (c, \infty)$. Atunci

$$A_1 \neq \emptyset,\ A_2 \neq \emptyset,\ A_1 \cup A_2 = A \cap ((-\infty, c) \cup (c, \infty)) = A \cap \mathbf{R} \setminus \{c\} = A,$$

$$A_1 \cap \bar{A}_2 \subseteq (-\infty, c) \cap \overline{(c, \infty)} = (-\infty, c) \cap [c, \infty) = \emptyset$$

și analog $\bar{A}_1 \cap A_2 = \emptyset$. Am obținut că A este neconexă, absurd. Rămîne că $[x, y] \subseteq A$, deci (P.2.2.5.) A este interval.

($\Leftarrow$) Presupunem prin absurd A neconexă, deci $(\exists)\, A_1, A_2 \subseteq A$ nevide cu $A_1 \cup A_2 = A$ și $A_1 \cap \bar{A}_2 = \bar{A}_1 \cap A_2 = \emptyset$. Fie $a \in A_1$ și $b \in A_2$ fixați; presupunem $a < b$. A fiind interval, avem $[a, b] \subseteq A$. Fie $c := \sup(A_1 \cap [a, b])$. Evident $c \in [a, b] \subseteq A = A_1 \cap A_2$, deci (i) $c \in A_1$ sau (ii) $c \in A_2$. Să analizăm separat cele două cazuri.

i) $c \in A_1$. Atunci $c < b$, deoarece $b \in A_2$ și $A_1 \cap \bar{A}_2 = \emptyset$. Din definiția lui c rezultă că $(c, b] \cap A_1 = \emptyset$, deci $(c, b] \subseteq A_2$ și deci $c \in \bar{A}_2$, de unde obținem $c \in A_1 \cap \bar{A}_2 = \emptyset$, absurd. Rămîne că $c \notin A_1$.

ii) $c \in A_2$. Din P.2.2.5. rezultă că $(\exists)\, x_n \in A_1 \cap [a, b]$ cu $x_n \to c$, deci (P.5.1.14.(3°)) $c \in \bar{A}_1$ și deci $c \in \bar{A}_1 \cap A_2 = \emptyset$, absurd. Rămîne că $c \notin A_2$.

Așadar $c \notin A_1 \cup A_2 = A$, absurd. Prin urmare A este neconexă.

5.1.31 Propoziție. *Fie $A \subseteq \mathbf{R}$ o mulțime. Atunci* $\mathrm{Fr}(A) = \emptyset \Leftrightarrow A = \emptyset \vee A = \mathbf{R}$.

Dem. ($\Rightarrow$) Fie $A \subseteq \mathbf{R}$ cu $\mathrm{Fr}(A) = \emptyset$. Deoarece $\mathrm{Fr}(A) = \bar{A} \setminus \mathring{A}$, avem $\mathring{A} = \bar{A}$, de unde rezultă imediat $\mathring{A} = A = \bar{A}$. Presupunem $A \neq \emptyset \vee A \neq \mathbf{R}$ și să punem $A_1 := A$ și $A_2 := \mathbf{R} \setminus A$. Atunci $A_1 \neq \emptyset$, $A_2 \neq \emptyset$, $A_1 \cup A_2 = \mathbf{R}$, $\bar{A}_1 \cap A_2 = \bar{A} \cap \overline{\mathbf{R} \setminus A} = A \cap (\mathbf{R} \setminus \mathring{A}) = A \cap (\mathbf{R} \setminus A) = \emptyset$ și analog $A_1 \cap \bar{A}_2 = \emptyset$. Am obținut că $\mathbf{R}$ este neconex, absurd (T.5.1.30.). Rămîne că $A = \emptyset$ sau $A = R$.

5.2. Mulțimi compacte

5.2.1. Definiție. O mulțime $A \subseteq \mathbf{R}$ se numește *compactă*, dacă orice familie de mulțimi deschise din $\mathbf{R}$ care acoperă A (*acoperire deschisă* a lui A) posedă o subfamilie finită care acoperă A (*subacoperire finită* a lui A). Aceasta înseamnă : $(\forall)\, (D_i)_{i \in I}$ o familie de mulțimi deschise în $\mathbf{R}$ cu $\bigcup_{i \in I} D_i \supseteq A$, există $J \subseteq I$, finită cu $\bigcup_{j \in J} D_j \supseteq A$. O mulțime $A \subseteq \mathbf{R}$ se numește *relativ compactă* dacă $\bar{A}$ este compactă.

Exemplul 1. *Orice mulțime finită $A \subseteq \mathbf{R}$ este compactă.*

Fie $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ și $(D_i)_{i \in I}$ o acoperire deschisă a lui A, deci $\bigcup_{i \in I} D_i \supseteq A$. Atunci $(\exists)\, i_1, i_2, \ldots i_n \in I$ cu $D_{i_k} \ni a_k$, $(\forall)\, k = \overline{1, n}$, deci $(D_{i_k})_{k = \overline{1.n}}$ acoperă A etc.

Exemplul 2. *Mulțimea $A = (0, 1)$ nu este compactă.*

Fie $D_n = \left(\frac{1}{n}, 1\right)$, $(n \in \mathbf{N})$. Evident $(D_n)_{n \in \mathbf{N}}$ constituie o acoperire deschisă a lui A. Presupunem că $(\exists)\, n_1, n_2, \ldots, n_k \in \mathbf{N}$ a.î. $\bigcup_{i=1}^{k} D_{n_i} \supseteq A$. Evident putem

presupune că $n_1 < n_2 < \ldots < n_k$. Atunci $D_{n_1} \subseteq D_{n_2} \subseteq \ldots \subseteq D_{n_k}$, deci $D_{n_k} \supseteq A$. Or $\frac{1}{1+n_k} \in A \setminus D_{n_k}$, absurd. Aşadar familia deschisă $(D_n)_{n\in\mathbf{N}}$ acoperă A şi ea nu posedă o subfamilie finită care să acopere A, deci A nu este compactă.

Exemplul 3. *Mulţimea* $A = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\right\}$ *nu este compactă.*

Fie $D_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ şi $D_n = \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n-1}\right)$, $(n \geqslant 2)$. Atunci $\frac{1}{n} \in D_n$, $(\forall) n \geqslant 1$, deci $A \subseteq \bigcup_{n\geqslant 1} D_n$ şi deci $(D_n)_{n\in\mathbf{N}}$ constituie o acoperire deschisă a lui A. Presupunem că $(\exists)\ n_1, n_2, \ldots, n_k \in \mathbf{N}$ a.î. $\bigcup_{i=1}^{k} D_{n_i} \supseteq A$. Atunci $(\forall)\ m > \max\{n_1, n_2, \ldots, n_k\}$ avem $\frac{1}{m} \in A \setminus \bigcup_{i=1}^{k} D_{n_i}$, absurd. Aşadar $(D_n)_{n\in\mathbf{N}}$ acoperă A şi ea nu posedă o subfamilie finită care să acopere A, prin urmare A nu este compactă.

5.2.2. Propoziţie. *Fie* $A \subseteq \mathbf{R}$ *o mulţime compactă şi discretă. Atunci* A *este finită.*

Dem. A fiind discretă, fiecare punct al său este izolat, deci $(\forall)\ x \in A$, $(\exists)\ \varepsilon_x > 0$ a.î. $A \cap V_x = \{x\}$, unde $V_x = (x - \varepsilon_x, x + \varepsilon_x)$. Obţinem astfel o familie $(V_x)_{x\in A}$ care constituie o acoperire deschisă a lui A, deci A fiind compactă, $(\exists)\ x_1, x_2, \ldots, x_n \in A$ cu proprietatea că $(V_{x_i})_{i=\overline{1,n}}$ acoperă pe A i.e. $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} V_{x_i}$. Atunci avem $A = \bigcup_{i=1}^{n} (A \cap V_{x_i}) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, prin urmare A este finită.

5.2.3. Propoziţie. *Fie* $(x_n)_{n\geqslant 1}$ *un şir convergent de numere reale şi* x_0 *limita sa. Atunci mulţimea* $A := \{x_0\} \cup \{x_n\}_{n\geqslant 1}$ *este compactă.*

Dem. Fie $(D_i)_{i\in I}$ o familie deschisă care acoperă A. Atunci $(\exists)\ i_0 \in I$ cu $x_0 \in D_{i_0}$, deci D_{i_0} este o vecinătate a lui x_0 şi deci $(\exists)\ N \geqslant 1$ cu proprietatea că $x_n \in D_{i_0}$, $(\forall)\ n > N$. Evident $(\forall)\ n \in \overline{1, N}$ $(\exists)\ i_n \in I$ a.î. $D_{i_n} \ni x_n$. Atunci $A \subseteq \bigcup_{n=0}^{N} D_{i_n}$, deci $(D_{i_n})_{n\in\overline{0,N}}$ este o subacoperire finită a lui A, prin urmare A este compactă.

5.2.4. Propoziţie. *Orice mulţime închisă inclusă într-o mulţime compactă din* $\mathbf{R}$, *este compactă.*

Dem. Fie $A, B \subseteq \mathbf{R}$ cu A închisă, B compactă şi $A \subseteq B$. Fie, mai departe, $\mathcal{A} = (D_i)_{i\in I}$ o familie de mulţimi deschise din $\mathbf{R}$, care acoperă A. Atunci familia $\mathcal{A} \cup \{D_{i_0}\}$, unde $D_{i_0} = \mathbf{R} \setminus A$, este o acoperire deschisă a lui $\mathbf{R}$, deci a lui B şi deci $(\exists)\ i_1, i_2, \ldots, i_n \in I$ a.î. $\bigcup_{k=0}^{n} D_{i_k} \supseteq B$. Cum $B \supseteq A$ şi $A \cap D_{i_0} = \emptyset$, rezultă că $\bigcup_{k=1}^{n} D_{i_k} \supseteq A$. Prin urmare A este compactă.

Corolar 1. *Fie* $(A_i)_{i\in I}$ *o familie de mulţimi închise din* $\mathbf{R}$, *în care cel puţin una este compactă. Atunci* $\bigcap_i A_i$ *este compactă.*

Dem. Fie $A := \bigcap_i A_i$ şi $i_0 \in I$ cu A_{i_0} compactă. Atunci A este închisă (P.5.1.24. Cor. 1) şi $A \subseteq A_{i_0}$. Aplicăm P.5.2.4.

5.2.5. Teoremă. *Fie* $(A_i)_{i\in I}$ *o familie „centrată"* (*i.e.* $\bigcap_{j\in J} A_j = \emptyset$, $(\forall)\ J \subseteq I$ *finită*) *de mulțimi închise nevide din* $\mathbf{R}$, *în care cel puțin una este compactă. Atunci* $\bigcap_i A_i$ *este compactă și nevidă.*

Dem. Fie $i_0 \in I$ cu A_{i_0} compactă. Presupunem că $\bigcap_i A_i = \emptyset$ și fie $D_i = \complement A_i (i \in I)$. Atunci D_i este deschisă, $(\forall)\ i \in I$ și avem $\mathbf{R} = \complement(\bigcap_i A_i) = \bigcup_i D_i$, deci $(D_i)_{i\in I}$ este o acoperire deschisă a lui $\mathbf{R}$ și deci a lui A_{i_0}. De aici rezultă că $(\exists)\ J \subseteq I$ finită cu $\bigcup_{j\in J} D_j \supseteq A_{i_0}$, deci

$$\bigcap_{j\in J} A_j = \bigcap_{j\in J} (\complement D_j) = \complement(\bigcup_{j\in J} D_j) \subseteq \complement A_{i_0}$$

și deci

$$\emptyset \neq \bigcap_{j\in J\cup\{i_0\}} A_j \subseteq A_{i_0} \cap (\complement A_{i_0}) = \emptyset,$$

absurd. Rămîne că $\bigcap_i A_i \neq \emptyset$.

Compacitatea mulțimii $\bigcap_i A_i$ rezultă din P.5.2.4. Cor. 1.

Corolar 1. *Fie* $(A_i)_{i\in I}$ *o familie „filtrantă"* (*i.e.* $(\forall)\ i, j \in I$, $(\exists)\ k \in I$ *cu,* $A_i \cap A_j \supseteq A_k$) *de mulțimi închise nevide din* $\mathbf{R}$, *în care cel puțin una este compactă. Atunci* $\bigcap_i A_i$ *este compactă și nevidă.*

Dem. Arătăm prin inducție că $(\forall)\ J \subseteq I$ finită, $(\exists)\ k \in I$ a.î. $\bigcap_{j\in J} A_j \supseteq A_k$ deci familia $(A_i)_{i\in I}$ este centrată etc.

Corolar 2. *Fie* $(A_n)_{n\geq 1}$ *un șir descendent de mulțimi închise nevide în care cel puțin una este compactă. Atunci* $\bigcap_{n\geq 1} A_n$ *este compactă și nevidă, respectiv și se reduce la un punct* $\Leftrightarrow$ dia $(A_n) \to 0$ $(n \to \infty)$.

Dem. Prima parte rezultă din Cor. 1. Partea a doua este evidentă.

5.2.6. Teoremă (Borel-Lebesgue. *Fie* $A \subseteq \mathbf{R}$ *o mulțime. Atunci* A *compactă* $\Leftrightarrow$ A *închisă și mărginită.*

Dem. ($\Rightarrow$) 1° $(\forall)\ x \in A$ fie $D_x = (x-1, x+1)$. Atunci $(D_x)_{x\in A}$ constituie o acoperire deschisă a lui A, deci $(\exists)\ x_1, x_2, \ldots, x_n \in A$ a.î. familia $(D_{x_i})_{i=\overline{1,n}}$ acoperă A. Punem $a = \min_{i=\overline{1,n}} x_i - 1$ și $b = \max_{i=\overline{1,n}} x_i + 1$. Evident avem $D_{x_i} \subseteq (a,b)$, $(\forall)\ i = \overline{1,n}$, deci $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} D_{x_i} \subseteq (a,b)$ și deci A este mărginită.

2° Presupunem că $\bar{A} \not\subseteq A$ și fie $z \in \bar{A} \setminus A$ fixat. Atunci $(\forall)\ x \in A$, $(\exists)\ \varepsilon_x > 0$ cu proprietatea că $[x-\varepsilon_x, x+\varepsilon_x] \not\ni z$; fie $D_x := (x-\varepsilon_x, x+\varepsilon_x)$. Evident $(D_x)_{x\in A}$ este o acoperire deschisă a lui A, deci $(\exists)\ x_1, x_2, \ldots x_n \in A$ a.î. familia $(D_{x_i})_{i=\overline{1,n}}$ acoperă A. Mulțimea $B = \bigcup_{i=1}^{n} \bar{D}_{x_i}$ este închisă și $z \notin B$, deci $(\exists)\ V$ o vecinătate a lui z cu $V \cap B = \emptyset$. Cum avem $B \supseteq \bigcup_{i=1}^{n} D_{x_i} \supseteq A$, rezultă că $V \cap A = \emptyset$, deci $z \notin \bar{A}$, absurd. Rămîne că $\bar{A} \subseteq A$, deci A este închisă.

($\Leftarrow$) *Lemă.* $(\forall)\ a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$, *mulțimea* $A = [a, b]$ *este compactă.*

Fie $(D_i)_{i\in I}$ o familie deschisă care acoperă A. Evident $(\exists)\ i \in I$ cu $D_i \ni a$, deci $(\exists)\ x \in (a, b]$ cu $[a, x] \subseteq D_i$. Considerăm mulțimea:

$$A_0 := \{x \in (a, b+1);\ (\exists)\ J \subseteq I \text{ finită a.î. } [a, x] \subseteq \bigcup_{j\in J} D_j\}$$

Este clar că $A_0 \neq \emptyset$; fie $c = \sup A_0$. Dacă $c \leqslant b$, $(\exists)\ i_0 \in I$ cu $D_{i_0} \ni c$, deci $(\exists)\ \varepsilon > 0$ cu $[c-\varepsilon, c+\varepsilon] \subseteq D_{i_0}$. Însă $c - \varepsilon \in A$, dacă $\varepsilon > 0$ este suficient de mic, deci $(\exists)\ J \subseteq I$ finită cu $\bigcup_{j\in J} D_j \supseteq [a, c-\varepsilon]$ și deci

$$\bigcup_{j\in J\cup\{i_0\}} D_j \supseteq [a, c-\varepsilon] \cup [c-\varepsilon,\ c+\varepsilon] = [a, c+\varepsilon],$$

încît $c + \varepsilon \in A$, de unde rezultă că $\sup A_0 \geqslant c + \varepsilon > c$, absurd. Așadar, $c > b$, deci $b \in A_0$ și deci $(\exists)\ J \subseteq I$ finită cu $\bigcup_{j\in J} D_j \supseteq [a, b] = A$, prin urmare A este compactă.

Revenind la cazul general, fie $A \subseteq \mathbf{R}$ o mulțime mărginită și închisă arbitrară. Atunci $(\exists)\ a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$ cu $A \subseteq [a, b]$. Din Lemă avem că $[a, b]$ este compactă, deci (P.5.2.4.) A este compactă.

Corolar 1. *Fie* $(A_n)_{n\geqslant 1}$ *un șir descendent de mulțimi compacte nevide, în particular de intervale compacte. Atunci* $\bigcap_{n\geqslant 1} A_n$ *este o mulțime compactă nevidă;* $\bigcap_{n\geqslant 1} A_n$ *se reduce la un punct* $\Leftrightarrow$ dia $(A_n) \to 0$.

Dem. Mulțimile compacte fiind închise (T.5.2.6.), aplicăm T.5.2.5. Cor 2

Corolar 2. *Fie* $A \subseteq \mathbf{R}$ *o mulțime compactă. Atunci* $\inf A \in A$ *și* $\sup A \in A$.

Dem. A este mărginită și închisă, deci putem aplica P.5.1.16. (3°)

Corolar 3. *Fie* $A \subseteq \mathbf{R}$ *o mulțime. Atunci* A *relativ compactă* $\Leftrightarrow$ A *mărginită.*

Dem. A mărginită $\overset{5.1.16.}{\Leftrightarrow}$ $\bar{A}$ mărginită $\overset{5.1.13.(8°)}{\Leftrightarrow}$ $\bar{A}$ mărginită și închisă $\overset{5.2.6.}{\Leftrightarrow}$ $\bar{A}$ compactă $\Leftrightarrow$ A relativ compactă.

Corolar 4. *Fie* $(A_i)_{i\in I}$ *o familie arbitrară (resp. finită) de mulțimi compacte din* $\mathbf{R}$. *Atunci* $\bigcap_i A_i$ *(resp.* $\bigcup_i A_i$*) este compactă.*

Dem. Arătăm că $\bigcap_i A_i$ (resp. $\bigcup_i A_i$) este mărginită și închisă.

Exemple

1. Mulțimile $[0,1] \cap \mathbf{Q}$ și $[0,1] \setminus \mathbf{Q}$ sînt mărginite însă nu sînt închise, deci nu sînt cmpacte.
2. Mulțimea $\mathbf{Q}$ nu este mărginită și nici închisă, deci nu este compactă.
3. Mulțimile $\mathbf{N}$, $\mathbf{Z}$, $\mathbf{R}$ sînt închise însă nu sînt mărginite, deci nu sînt compacte.

5.2.7. Definiție. O mulțime $A \subseteq \mathbf{R}$ se numește *secvențial compactă* dacă orice șir $(x_n)_{n\geqslant 1}$ cu elemente din A, posedă un subșir convergent $(x_{n_k})_{k\geqslant 1}$ către un punct x din A. O mulțime $A \subseteq \mathbf{R}$ se numește *relativ secvențial compactă*, dacă $\bar{A}$ este secvențial compactă.

Exemple.

1. *Mulțimile* $A := \left\{0, 1, \frac{1}{2}, \ldots \frac{1}{n}, \ldots\right\}$ *și* $B := \sqrt{2} + A$ *sînt secvențial compacte.*

Într-adevăr, orice șir cu elemente din A (resp. B) conține un subșir convergent la 0 (resp. $\sqrt{2}$). Să observăm că $A \subseteq \mathbf{Q}$ și $B \subseteq \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$.

2. *Mulțimea* $A = (0, 1)$ *nu este secvențial compactă.*

Șirul $x_n = \frac{1}{n}$ $(n \geqslant 1)$ are elementele în A și $x_n \to 0 \notin A$, deci nici un subșir al șirului $(x_n)_{n\geqslant 1}$ nu poate converge către un element din A. Prin urmare A nu este secvențial compactă.

3. *Mulțimea* $\mathbf{Q}$ *nu este secvențial compactă.*

Fie $x_1 := 1$ și $x_n := \frac{1}{2}\left(x_{n-1} + \frac{2}{x_{n-1}}\right)$, $(\forall)\ n \geqslant 2$. Atunci $x_n \to \sqrt{2} \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$, deci nici un subșir al șirului $(x_n)_{n\geqslant 1}$ nu poate converge către un element care să aparțină lui $\mathbf{Q}$. Deci $\mathbf{Q}$ nu este secvențial compactă.

5.2.8. Propoziție. *Fie* $A \subseteq \mathbf{R}$ *o mulțime. Atunci* A *este relativ secvențial compactă* $\Leftrightarrow$ *orice șir cu elemente din* A *posedă un subșir convergent (către un punct din* $\mathbf{R}$*).*

Dem. ($\Rightarrow$) Fie A relativ secvențial compactă, deci $\bar{A}$ secvențial compactă și $(x_n)_{n\geqslant 1}$ un șir cu elemente din A. Cum $A \subseteq \bar{A}$, șirul $(x_n)_{n\geqslant 1}$ posedă un subșir convergent către un element $x \in \bar{A} \subseteq \mathbf{R}$ etc.

($\Leftarrow$) Fie $(x_n)_{n\geqslant 1}$ un șir cu elemente din $\bar{A}$. Evident $(\forall)\ n \geqslant 1$, există $a_n \in A$ cu $|a_n - x_n| < \frac{1}{n}$. Obținem $(a_n)_{n\geqslant 1}$ un șir cu elemente din A, care posedă, cf. ipotezei, un subșir convergent $(a_{n_k})_{k\geqslant 1}$ către un element $x \in \mathbf{R}$; din P.5.1.14.(3°) avem $x \in \bar{A}$. Atunci

$$|x - x_{n_k}| \leqslant |x - a_{n_k}| + |a_{n_k} - x_{n_k}| \leqslant |x - a_{n_k}| + \frac{1}{n_k} \to 0 \ (k \to \infty),$$

deci (P.2.3.7) $x_{n_k} \to x$. Așadar orice șir cu elemente din $\bar{A}$, posedă un subșir convergent către un punct din $\bar{A}$, prin urmare $\bar{A}$ este secvențial compactă i.e. A este relativ secvențial compactă.

5.2.9. Teoremă. *Fie* $A \subseteq \mathbf{R}$ *o mulțime. Atunci* A *este secvențial compactă* $\Leftrightarrow$ A *mărginită și închisă.*

Dem. ($\Rightarrow$) 1° Presupunem A nemărginită. Atunci $(\forall)\ n \geqslant 1$ $(\exists)\ a_n \in A$ cu $|a_n| \geqslant n$. Șirul $(a_n)_{n\geqslant 1}$ posedă, cf. ipotezei, un subșir convergent $(a_{n_k})_{k\geqslant 1}$, deci (P.2.3.5.Cor.1) $(a_{n_k})_{k\geqslant 1}$ este mărginit și deci $(\exists)\ M > 0$ a.î. $|a_{n_k}| \leqslant M$, $(\forall)\ k \geqslant 1$. Însă $|a_{n_k}| \geqslant n_k \geqslant k$, $(\forall)\ k \geqslant 1$, deci $k \leqslant M$, $(\forall)\ k \geqslant 1$, absurd (P.2.1.18.Cor.1). Rămîne că A este mărginită.

2° Fie $x \in \bar{A}$ fixat. Atunci (P.5.2.14(3°)) $(\exists)$ $(a_n)_{n\geqslant 1}$ un șir din A cu $a_n \to x$. Cf. ipotezei șirul $(a_n)_{n\geqslant 1}$ posedă un subșir convergent $(a_{n_k})_{k\geqslant 1}$ către un punct $a \in A$. Cum $a_{n_k} \to x$, avem (P.2.3.3.) $x = a \in A$, prin urmare (P.5.1.15.(5°)) A este închisă.

($\Leftarrow$) Fie A mărginită și închisă și $(x_n)_{n\geqslant 1}$ un șir fixat cu elemente din A. Atunci $(x_n)_{n\geqslant 1}$ este mărginit, deci (T.2.3.21.(5°)) el posedă un subșir convergent $(x_{n_k})_{k\geqslant 1}$ către un punct $x \in \mathbf{R}$. Din P.5.1.15.(3°) rezultă că $x \in A$, prin urmare A este secvențial compactă.

Corolar 1. *Fie* $A \subseteq \mathbf{R}$ *o mulțime. Atunci* A *relativ secvențial compactă* $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$ A *mărginită.*

Dem. A relativ secvențial compactă $\Leftrightarrow$ $\bar{A}$ secvențial compactă $\Leftrightarrow$ $\bar{A}$ mărginită și închisă $\Leftrightarrow$ $\bar{A}$ mărginită $\Leftrightarrow$ A mărginită.

5.2.10. Teoremă. *Fie* $A \subseteq \mathbf{R}$ *o mulțime. Atunci* A *este compactă* $\Leftrightarrow$ *orice submulțime infinită a lui* A*, posedă cel puțin un punct de acumulare, care aparține lui* A*.*

Dem. ($\Rightarrow$) Fie $M \subseteq A$ infinită. A fiind compactă este mărginită și închisă, deci M este mărginită și deci (T.5.1.9.) $M' \neq \emptyset$. Evident $M' \subseteq A'$ și deoarece A este închisă, avem (P.5.1.15.(3°)) $A' \subseteq A$, deci $\emptyset \neq M' \subseteq A$.

($\Leftarrow$) (i) Presupunem că A nu posedă majoranți. Atunci $(\exists)\ x_1 \in A$ cu $x_1 \geqslant 1$, apoi $(\exists)\ x_2 \in A$ cu $x_2 \geqslant 1 + x_1$, deci prin inducție putem construi un șir $(x_n)_{n\geqslant 1}$ cu elemente din A a.î. $x_{n+1} \geqslant 1 + x_n$, $(\forall)\ n \geqslant 1$. Evident $|x_n - x_m| \geqslant 1$ $(\forall)\ n \neq m$, deci mulțimea infinită $\{x_1, x_2, x_3 \ldots\}$ nu poate avea puncte de acumulare, absurd.

(ii) Fie $x_0 \in A'$ fixat, deci (T.5.1.8.Cor.1) $(\exists)\ (x_n)_{n\geqslant 1}$ un șir strict monoton cu elemente din A, care are limita x_0. Cf. ipotezei mulțimea infinită $\{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$ să o notăm cu M, posedă cel puțin un punct de acumulare $x \in A$. Se vede însă imediat că $M' = \{x_0\}$, deci $x_0 = x \in A$ și deci (P.5.1.15.(3°)) A este închisă.

Corolar 1. *Fie $A \subseteq \mathbf{R}$ o mulțime. Atunci cond.* 1°—4° *sînt echivalente*: 1° *A compactă*; 2° *A secvențial compactă*; 3° $(\forall)$ *$M \subseteq A$ infinită, rezultă că $M' \cap A \neq \emptyset$*; 4° *A mărginită și închisă.*

5.2.11. Lemă. *Fie $A \subseteq \mathbf{R}$ o mulțime închisă cu $\mathring{A} = \emptyset$ și fie $I \subseteq \mathbf{R}$ un interval compact nedegenerat cu $I \nsubseteq A$. Atunci $(\exists)\ J \subseteq \mathbf{R}$ un interval compact nedegenerat a.î. $J \subseteq I$ și $J \cap A = \emptyset$.*

Dem. Deoarece $\mathring{A} = \emptyset$ și $\mathring{I} \neq \emptyset$, rezultă că $I \nsubseteq A$, deci $(\exists)\ x_0 \in I \setminus A$. Mulțimea A fiind închisă, $(\exists)\ \varepsilon > 0$ a.î. $[x_0 - \varepsilon,\ x_0 + \varepsilon] \cap A = \emptyset$. Punem $J := I \cap [x_0 - \varepsilon,\ x_0 + \varepsilon]$.

5.2.12. Teoremă (B a i r e). *Fie $(A_n)_{n\geqslant 1}$ un șir de mulțimi închise din $\mathbf{R}$ cu interior vid. Atunci mulțimea $A := \bigcup_{n\geqslant 1} A_n$ are interiorul vid.*

Dem. Presupunem $\mathring{A} \neq \emptyset$ și fie $I_0 \subseteq \mathbf{R}$ un interval compact nedegenerat cu $I_0 \subseteq A$. Cum $\mathring{A}_1 = \emptyset$, avem $I_0 \nsubseteq A_1$, deci cf. Lemei $(\exists)\ I_1 \subseteq \mathbf{R}$ un interval compact nedegenerat a.î. $I_1 \subseteq I_0$ și $I_1 \cap A_1 = \emptyset$. Deoarece $\mathring{A}_2 = \emptyset$, avem $I_1 \nsubseteq A_2$, deci cf. Lemei $(\exists)\ I_2 \subseteq \mathbf{R}$ un interval compact nedegenerat a.î. $I_2 \subseteq I_1$ și $I_2 \cap A_2 = \emptyset$. În acest mod construim prin inducție un șir $(I_n)_{n\geqslant 1}$ de intervale compacte nedegenerate din $\mathbf{R}$ a.î. $I_{n+1} \subseteq I_n$ și $A_n \cap I_n = \emptyset$, $(\forall)\ n \geqslant 1$. Din T.5.2.6.Cor.1 avem că $\bigcap_{n\geqslant 1} I_n \neq \emptyset$; fie $a \in \bigcap_{n\geqslant 1} I_n \subseteq I_0$ fixat. Atunci $(\forall)\ n \geqslant 1$ avem $a \in I_n$, deci $a \notin A_n$ și deci $a \notin \bigcup_{n\geqslant 1} A_n = A \supseteq I_0$, absurd.

Prin urmare mulțimea A are interiorul vid.

Corolar 1. *Fie $(A_n)_{n\geqslant 1}$ un șir de mulțimi închise din $\mathbf{R}$ a.î. mulțimea $\bigcup_{n\geqslant 1} A_n$ are interior nevid. Atunci $(\exists)\ n \geqslant 1$ cu $\mathring{A}_n \neq \emptyset$.*

5.3. Limita unei funcții într-un punct

Conceptul de *limită* este un concept fundamental în Analiză. Limita unei funcții într-un punct este generalizarea naturală a limitei unui șir de numere și se reduce la aceasta. În esență f are limita l în punctul x_0, dacă orice punct x suficient de apropiat de x_0, are imaginea prin f suficient de apropiată de l.

5.3.1. Definiție. Fie $A \subseteq \mathbf{R}$ o mulțime, $x_0 \in A'[\overline{\mathbf{R}}]$ un punct, $f : A \to \mathbf{R}$ o funcție și $l \in \overline{\mathbf{R}}$ un punct. Vom spune că *f are limita în x_0 egală cu l* și vom scrie $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$, dacă este îndeplinită condiția:

$(\forall)\ (x_n)_{n\geqslant 1}$ un șir din $A \setminus \{x_0\}$, $x_n \to x_0$, rezultă că $f(x_n) \to l$.

Fie $B \subseteq A$ o mulțime și $x_0 \in B'[\overline{\mathbf{R}}]$ un punct. Dacă $\lim\limits_{x \to x_0} (f|_B)(x)$ există, ea se numește *limita lui f în x_0 relativ la B* și se notează cu $\lim\limits_{B \ni x \to x_0} f(x)$.

Observația 1. Vom folosi adeseori forme prescrutate de exprimare. Astfel: „$l = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$" în loc de „$f$ are limită în x_0 și ea este egală cu l"; $(\exists)$ „$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$" sau „$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ există" în loc de „f are limită în x_0"; $(\exists)$ „$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$" sau „$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ nu există" în loc de „f nu are limită în x_0".

Observația 2. Din Def. 5.3.1. rezultă: dacă există $(x_n)_{n \geqslant 1}$ și $(z_n)_{n \geqslant 1}$ două șiruri din $A \setminus \{x_0\}$ care au limita x_0 a.î. șirurile $(f(x_n))_{n \geqslant 1}$ și $(f(z_n))_{n \geqslant 1}$ au limită și acestea sînt *diferite* între ele, atunci f nu are limită. De asemenea avem: $(\exists) \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \Leftrightarrow (\forall)\, l \in \overline{\mathbf{R}}, (\exists)\, V \in \mathcal{V}(l), (\exists)\, (x_n)_{n \geqslant 1} \subseteq A \setminus \{x_0\}$, $x_n \to x_0$ a.î. $f(x_n) \notin V$ $(\forall)\, n \geqslant 1$.

Observația 3. Punctul x_0 către care facem limita funcției f *poate să aparțină sau nu lui A*. Esențial este ca x_0 să fie punct de acumulare al lui A (relativ la $\mathbf{R}$ sau $\overline{\mathbf{R}}$).

Observația 4. Dacă $l = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, $B \subseteq A$ și $x_0 \in B'[\overline{\mathbf{R}}]$, atunci $\lim\limits_{B \ni x \to x_0} f(x) = l$. Afirmația reciprocă nu este numaidecît adevărată.

Observația 5. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l \in \mathbf{R} \Leftrightarrow (\exists)\, g : A \to \mathbf{R}$ o funcție a.î. $f = l + g$ și $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$.

Exemple.

1. Fie $A = \mathbf{R}^*$ și $f : A \to \mathbf{R}$ funcția identic egală cu 1. Atunci $\mathbf{R}' = \mathbf{R}$, deci are sens să calculăm $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ și ea este egală cu 1.

2. Fie $A = (0, 1) \cup \{2\}$ și $f : A \to \mathbf{R}$ definită astfel $f(x) = x^2$. Atunci $A' = [0, 1]$, deci are sens să calculăm limita lui f în $x_0 = 0$ și $x_0 = 1$ și nu are sens în $x_0 = 2$. Evident avem $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$ și $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 1$.

3. Fie $A = \mathbf{Q}$ și $f : A \to \mathbf{R}$ definită astfel $f(x) = x^3$. Atunci $A'[\overline{\mathbf{R}}] = \overline{\mathbf{R}}$, deci are sens să calculăm limita lui f în fiecare punct $x_0 \in \overline{\mathbf{R}}$. Evident avem $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = x_0^3$, $(\forall)\, x \in \mathbf{R}$ și $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$.

5.3.2. Propoziție. *Fie $A \subseteq \mathbf{R}$ o mulțime, $x_0 \in A'[\overline{\mathbf{R}}]$ un punct și $f : A \to \mathbf{R}$ o funcție. Dacă f are limită în x_0, ea este unică.*

Dem. Fie $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ și $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l'$. Atunci $(\forall)\, (x_n)_{n \geqslant 1}$ un șir cu elemente din $A \setminus \{x_0\}$, $x_n \to x_0$, avem $f(x_n) \to l$ și $f(x_n) \to l'$, deci (P.2.2.3.) $l = l'$.

5.3.3. Propoziție. *Fie $A \subseteq \mathbf{R}$ o mulțime, $x_0 \in A'[\overline{\mathbf{R}}]$ un punct, $f : A \to \mathbf{R}$ o funcție și $l \in \overline{\mathbf{R}}$. Atunci $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l \Leftrightarrow (\exists)/(\forall)\, V \in \mathcal{V}(x_0)$, a.î. $\lim\limits_{x \to x_0} f(|_{A \cap V})(x) = l$.*

Dem. Implicația ($\Rightarrow$) este evidentă (v. Observația 2).

($\Leftarrow$) Fie $V \in \mathcal{V}(x_0)$ cu proprietatea că $\lim\limits_{x \to x_0} (f|_{A \cap V})(x)$ există și este egală cu l. Fie mai departe $x_n \in A \setminus \{x_0\}$, $x_n \to x_0$, fixat. Atunci $(\exists)\, n_0 \geqslant 1$ a.î. $(x_n)_{n \geqslant n_0} \subseteq A \cap V \setminus \{x_0\}$, deci cf. ipotezei șirul $((f|_{A \cap V})(x_n))_{n \geqslant n_0}$ are limita l. Cum avem $(x_n) = (f|_{A \cap V})(x_n)$, $(\forall)\, n \geqslant n_0$, rezultă că șirul $(f(x_n))_{n \geqslant 1}$ are limita 1. Prin urmare $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$.

5.3.4. Propoziție. *Fie $A \subseteq \mathbf{R}$ o mulțime, $x_0 \in A'[\overline{\mathbf{R}}]$ un punct și $f : A \to \mathbf{R}$ o funcție. Atunci $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ există (resp. și este finită) $\Leftrightarrow (\forall)\, (x_n)_{n \geqslant 1}$ un șir cu*

elemente din $A \setminus \{x_0\}$, $x_n \to x_0$. *rezultă că şirul* $(f(x_n))_{n\geq 1}$ *are limită* (*resp. este convergent*).

Dem. Implicaţia ($\Rightarrow$) este evidentă.

($\Leftarrow$) Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ şi $(x'_n)_{n\geq 1}$ două şiruri cu elemente din $A \setminus \{x_0\}$, care au limita x_0; punem $l = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ şi $l' = \lim\limits_{n\to\infty} f(x'_n)$. Considerăm şirul $(y_n)_{n\geq 1}$, unde $y_{2n} = x_n$, $y_{n+1} = x'_n$ $(n \geq 1)$. Atunci $(y_n)_{n\geq 1}$ are limita x_0, deci cf. ipotezei $(f(y_n))_{n\geq 1}$ are limită; să o notăm cu L. Cum $(f(x_n))_{n\geq 1}$ şi $(f(x'_n))_{n\geq 1}$ sînt subşiruri ale şirului $(f(y_n))_{n\geq 1}$ şi limita unui şir este unică, rezultă $l = L$ şi $l' = L$.

Aşadar $(\exists)\ l \in \overline{\mathbf{R}}$ cu proprietatea că pentru orice şir $(x_n)_{n\geq 1}$ din $A \setminus \{x_0\}$, $x_n \to x_0$, rezultă că $(f(x_n))_{n\geq 1}$ are limita l, prin urmare $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ există.

Corolar 1. *Fie* $A \subseteq \mathbf{R}$ *o mulţime,* $x_0 \in A'[\overline{\mathbf{R}}]$ *un punct şi* $f : A \to \mathbf{R}$ *o funcţie. Atunci* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ *există şi este finită* $\Leftrightarrow$ $(\forall)$ $(x_n)_{n\geq 1}$ *un şir cu elemente din* $A \setminus \{x_0\}$, $x_n \to x_0$, *rezultă că* $(f(x_n))_{n\geq 1}$ *este şir Cauchy.*

5.3.5. Teoremă. *Fie* $A \subseteq \mathbf{R}$ *o mulţime,* $x_0 \in A'[\overline{\mathbf{R}}]$ *un punct şi* $f : A \to \mathbf{R}$ *o funcţie. Atunci* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ *există şi este egală cu* $l \in \overline{\mathbf{R}} \Leftrightarrow (\forall)$ U *o vecinătate a lui* l, $(\exists)$ V *o vecinătate a lui* x_0 *a.î.* $f(A \cap V \setminus \{x_0\}) \subseteq U$.

Dem. ($\Rightarrow$) Presupunem contrariul, deci $(\exists)$ $U \in \mathcal{V}(l)$ cu proprietatea că $(\forall)$ $V \in \mathcal{V}(x_0)$, $f(A \cap V \setminus \{x_0\}) \not\subseteq U$ (1). Construim un şir $(V_n)_{n\geq 1}$ de vecinătăţi ale lui x_0 astfel: (i) $V_n = \left(x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n}\right)$, dacă $x_0 \in \mathbf{R}$; (ii) $V_n = (n, \infty]$, dacă $x_0 = +\infty$; (iii) $V_n = [-\infty, -n)$, dacă $x_0 = -\infty$. Din (1) rezultă că $(\forall)$ $n \geq 1$, $(\exists)$ $x_n \in A \cap V \setminus \{x_0\}$ a.î. $f(x_n) \notin V$ (2). Evident $(\forall)$ $n \geq 1$ avem: $|x_n - x_0| < \frac{1}{n}$ în cazul (i); $x_n > n$ în cazul (ii); $x_n < -n$ în cazul (iii). Aşadar $x_n \to x$, deci cf. ipotezei $f(x_n) \to l$ şi deci pentru V de mai sus, $(\exists)$ $n_V \geq 1$ cu $f(x_n) \in V$ $(\forall)$ $n \geq n_V$, ceea ce contrazice (2).

Prin urmare condiţia din dreapta este satisfăcută.

($\Leftarrow$) Presupunem că f satisface condiţia din enunţ şi fie $(x_n)_{n\geq 1}$ un şir cu elemente din $A \setminus \{x_0\}$, $x_n \to x_0$. Fixăm $U \in \mathcal{V}(f(x_0))$; cf. ipotezei $(\exists)$ $V \in \mathcal{V}(x_0)$ cu $f(A \cap V \setminus \{x_0\}) \subseteq U$. Deoarece $x_n \to x_0$, $(\exists)$ $n_V \geq 1$ a.î. $x_n \in V$, $(\forall)$ $n \geq n_V$, deci $x_n \in A \cap V \setminus \{x_0\}$, $(\forall)$ $n \geq n_V$ şi deci $f(x_n) \in U$, $(\forall)$ $n \geq n_V$, prin urmare $f(x_n) \to l$.

Corolar 1. *Fie* $A \subseteq \mathbf{R}$ *o mulţime,* $x_0 \in A'[\overline{\mathbf{R}}]$ *un punct şi* $f : A \to \mathbf{R}$ *o funcţie. Atunci* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ *există şi este egală cu* $l \in \overline{\mathbf{R}} \Leftrightarrow (\forall)$ U *o vecinătate dintr-o bază de vecinătăţi a lui* l, $(\exists)$ V *o vecinătate dintr-o bază de vecinătăţi a lui* x_0, *a.î.* $f(A \cap V \setminus \{x_0\}) \subseteq U$.

Dem. ($\Rightarrow$) Fie $U \in \mathfrak{B}(l)$ — bază de vecinătăţi a lui l, fixată. Atunci $U \in \mathcal{V}(l)$, deci $(\exists)$ $W \in \mathcal{V}(x_0)$ cu $f(A \cap W \setminus \{x_0\}) \subseteq U$. Evident însă $(\exists)$ $V \in \mathfrak{B}(x_0)$ — bază de vecinătăţi a lui x_0, cu $V \subseteq W$, deci $V \in \mathcal{V}(x_0)$ şi $f(A \cap V \setminus \{x_0\}) \subseteq U$ etc.

($\Leftarrow$) Fie $U \in \mathcal{V}(l)$ fixată. Atunci $(\exists)$ $U_0 \in \mathfrak{B}(l)$ cu $U_0 \subseteq U$, iar pentru U_0 $(\exists)$ $V \in \mathfrak{B}(x_0)$ cu $f(A \cap V \setminus \{x_0\}) \subseteq U_0$, deci $U_0 \in \mathcal{V}(x_0)$ şi $f(A \cap V \setminus \{x_0\}) \subseteq U$ şi deci (T.5.3.5.) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$.

Corolar 2. *Fie* $A \subseteq \mathbf{R}$ *o mulţime,* $x_0 \in A'$ *un punct şi* $f : A \to \mathbf{R}$ *o funcţie. Atunci* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l \in \mathbf{R} \Leftrightarrow (\forall)$ $\varepsilon > 0$, $(\exists)$ $\eta = \eta_{\varepsilon, x_0} > 0$ *a.î.* $|f(x) - l| < \varepsilon$, $(\forall)$ $x \in A \setminus \{x_0\}$, $|x - x_0| < \eta$.

Dem. Luăm în Cor. 1 drept bază de vecinătăţi a lui l şi x_0 respectiv familiile $\mathfrak{B}(l) := \{(l-\varepsilon,\ l+\varepsilon);\ \varepsilon>0\}$, $\mathfrak{B}(x_0) = \{x_0-\eta,\ x_0+\eta);\ \eta>0\}$.

Corolar 3. *Fie $A \subseteq \mathbf{R}$ o mulţime, $x_0 \in A'$ un punct şi $f: A \to \mathbf{R}$ o funcţie. Atunci* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ *(resp.* $-\infty$*)* $\Leftrightarrow (\forall)\ c>0$ *(resp.* $c<0$*)*, $(\exists)\ \eta = \eta_{c,x_0} \geqslant 0$ *a.î.* $f(x) \geqslant c$ *(resp.* $\leqslant c$*)*, $(\forall)\ x \in A\setminus\{x_0\},\ |x-x_0|<\eta$.

Dem. Luăm în Cor.1 drept bază de vecinătăţi a lui x_0, $+\infty$, $-\infty$ respectiv familiile $\mathfrak{B}(x_0) = \{(x_0-\eta,\ x_0+\eta);\ \eta>0\}$, $\mathfrak{B}(+\infty) = \{(c,\infty];\ c>0\}$, $\mathfrak{B}(-\infty) = \{[-\infty,\ c);\ c<0\}$.

Corolar 4. *Fie $A \subseteq \mathbf{R}$ o mulţime cu proprietatea că $+\infty \in A'$ $[\overline{\mathbf{R}}]$, $f: A \to \mathbf{R}$ o funcţie şi $l \in \mathbf{R}$ un număr. Atunci* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l \Leftrightarrow (\forall)\ \varepsilon>0\ (\exists)\ c = c_\varepsilon > 0$ *a.î.* $|f(x)-l|<\varepsilon$, $(\forall)\ x \in A,\ x>c$.

Dem. Luăm în Cor. 1 drept bază de vecinătăţi a lui $+\infty$ şi l, respectiv familiile $\mathfrak{B}(+\infty) = \{(c,+\infty];\ c>0\}$, $\mathfrak{B}(l) = \{(l-\varepsilon, l+\varepsilon);\ \varepsilon>0\}$.

Exemple.

1. *Fie $f: \mathbf{R}^* \to \mathbf{R}$ o funcţie definită astfel: $f(x) = \operatorname{sign} x$. Atunci f nu are limită în 0.*

Presupunem că f are limita $l \in \overline{\mathbf{R}}$ în punctul 0. Cum $-1 \leqslant f \leqslant +1$, avem că $-1 \leqslant l \leqslant +1$. Fie $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Atunci $(\exists)\ \eta>0$ a.î. $|f(x)-l|<\frac{1}{2}$, $(\forall)\ 0<|x|<\eta$. Cum $\left|f\left(\pm\frac{\eta}{2}\right)\right| = \pm 1$, avem $|-1-l|<\frac{1}{2}$ şi $|1-l|<\frac{1}{2}$, deci

$$2 = |(1-l)+(l-(-1))| \leqslant |1-l|+|-1-l| < \frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 1,$$

absurd. Rămîne că f nu are limită în 0.

2. *Fie $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ funcţia lui Dirichlet i.e. $f(x) = 1$, dacă $x \in \mathbf{Q}$ şi $f(x) = 0$, dacă $x \in \mathbf{R}/\mathbf{Q}$. Atunci f nu are limită în nici un punct $x_0 \in \mathbf{R}$.*

Fixăm $x_0 \in \mathbf{R}$ şi să presupunem că f are limita $l \in \overline{\mathbf{R}}$ în x_0; evident $0 \leqslant l \leqslant 1$. Fie $\varepsilon = \frac{1}{2}$; atunci $(\exists)\ \eta>0$ a.î. $|f(y)-l|<\frac{1}{2}$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$, $0<|x-x_0|<\eta$. Fie $x_1 \in (x_0-\eta,\ x_0) \cap \mathbf{Q}$ şi $x_2 \in (x_0-\eta,\ x_0)\setminus\mathbf{Q}$ fixaţi. Cum avem $f(x_1)=1$ şi $f(x_2)=0$, rezultă $|1-l|<\frac{1}{2}$ şi $|0-l|<\frac{1}{2}$ deci $\frac{1}{2}<l<\frac{3}{2}$ şi $0<l<\frac{1}{2}$, absurd. Rămîne că f nu are limită (la stînga) în x_0.

3. *Fie $f: \mathbf{R}^* \to \mathbf{R}$ o funcţie definită astfel $f(x) = x\cos\frac{1}{x}$. Atunci f are limita 0 în 0.*

Într-adevăr, fie $\varepsilon>0$ fixat şi $\eta = \varepsilon$. Atunci $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$, $0<|x|<\eta$, avem $|f(x)-0| = |x| \cdot \left|\cos\frac{1}{x}\right| \leqslant |x| < \varepsilon$ etc.

5.3.6. Definiţie. Fie $A \subseteq \mathbf{R}$ o mulţime, $x_0 \in A'$ $[\overline{\mathbf{R}}]$ un punct, $\mathcal{V} = \mathcal{V}(x_0)$ şi $f: A \to \mathbf{R}$ o funcţie. Atunci numărul: $\sup\limits_{V\in\mathcal{V}}(\inf(f(A\cap V\setminus\{x_0\})))$ se numeşte *limita inferioară* a funcţiei f în x_0 şi se notează $\varliminf\limits_{x\to x_0} f(x)$; $\inf\limits_{V\in\mathcal{V}}(\sup(f(A\cap V\setminus\{x_0\})))$ se numeşte *limita superioară* a funcţiei f în x_0 şi se notează cu $\varlimsup\limits_{x\to x_0} f(x)$; $\inf\limits_{V\in\mathcal{V}}(\operatorname{dia}(f(A\cap V\setminus\{x_0\})))$ se numeşte *oscilaţia punctată* a lui f în x_0 şi se notează cu $\hat{\omega}_f(x_0)$.

Observația 1. Numerele $\underline{\lim}_{x\to x_0} f(x)$ și $\overline{\lim}_{x\to x_0} f(x)$ există întotdeauna, finite sau infinite (primul $-\infty$, al doilea $+\infty$).

Observația 2. În Def. 5.3.6 putem înlocui $\mathcal{V}(x_0)$ prin $\mathcal{B}(x_0)$, o bază de vecinătăți a lui x_0.

Într-adevăr, să punem $\alpha_V = \inf f(A \cap V\setminus\{x_0\})$, $V \in \mathcal{V}$. Atunci $(\alpha_V)_{V\in\mathcal{B}}$ este o parte *cofinală* în $(\alpha_V)_{V\in\mathcal{V}}$ i.e. $(\forall)\ \alpha_V\ (V \in \mathcal{V}), (\exists)\ \alpha_{V'}, (V' \in \mathcal{B})$ cu $\alpha_{V'} \geqslant \alpha_V$. De aici rezultă imediat că $\sup_{V\in\mathcal{V}} \alpha_V = \sup_{V'\in\mathcal{B}} \alpha_{V'}$, etc. Așadar, dacă $x_0 \in \mathbf{R}$, avem :

$$\underline{\lim}_{x\to x_0} f(x) = \sup_{\varepsilon>0} \Big(\inf_{x\in A,\ 0<|x-x_0|<\varepsilon} f(x)\Big),$$

$$\overline{\lim}_{x\to x_0} f(x) = \inf_{\varepsilon>0} \Big(\sup_{x\in A,\ 0<|x-x_0|<\varepsilon} f(x)\Big)$$

Exemple.

1. Fie $f\colon \mathbf{R}\to\mathbf{R}$ funcția signum. Atunci $\underline{\lim}_{x\to 0} f(x) = -1, \overline{\lim}_{x\to 0} f(x) = +1, \hat{\omega}_f(0) = 0$.

2. Fie $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $x \in \mathbf{R}^*$. Atunci $\underline{\lim}_{x\to 0} f(x) = -\infty, \overline{\lim}_{x\to 0} f(x) = +\infty$, $\hat{\omega}_f(0) = +\infty$.

3. Fie $f : \mathbf{R} \to [-1,1]$ funcția sinus. Atunci $\underline{\lim}_{x\to 0} f(x) = \sup_{\varepsilon>0}(\inf_{0<|x|<\varepsilon} \sin x) =$ $= \sup_{\varepsilon>0} (-\sin\varepsilon) = 0$ și analog $\overline{\lim}_{x\to 0} f(x) = 0$.

4. Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ funcția lui Dirichlet. Atunci $\underline{\lim}_{x\to 0} f(x) = 0, \overline{\lim}_{x\to 0} f(x) = 1$, $\hat{\omega}_f(0) = 1$.

5.3.7. Propoziție *Fie $A \subseteq \mathbf{R}$ o mulțime $x_0 \in A'$ $[\overline{\mathbf{R}}]$ un punct și $f : A \to \mathbf{R}$ o funcție. Atunci $(\forall)(V_n)_{n\geqslant 1}$ un șir descendent de vecinătăți ale lui 0, care constituie bază de vecinătăți a lui 0, avem :*

$$\underline{\lim}_{x\to x_0} f(x) = \lim_{n\to\infty} (\inf f(A \cap V_n\setminus\{x_0\})); \quad \overline{\lim}_{x\to x_0} f(x) = \lim_{n\to\infty} (\sup f(A \cap V\setminus\{x_0\})).$$

Dem. Fie $\alpha_n := \inf f(A \cap V\setminus\{x_0\}\ (n \geqslant 1)$ și $\alpha = \underline{\lim}_{x\to x_0} f(x)$. Evident avem $\alpha_n \leqslant x_{n+1}$, $(\forall)\ n \geqslant 1$, deci (T.2.3.21. (2°)) :

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \sup_{n\geqslant 1} \alpha_n = \sup_{n\geqslant 1} (\inf f(A \cap V\setminus\{x_0\})) = \alpha \text{ etc.}$$

5.3.8. Propoziție. *Fie $A \subseteq \mathbf{R}$ o mulțime, $x_0 \in A'$ $[\overline{\mathbf{R}}]$ un punct și $f : A \to \mathbf{R}$ o funcție. Atunci $(\forall)\ V \in \mathcal{V}(x_0)$, avem inegalitățile :*

$$\inf f(A \cap V\setminus\{x_0\}) \leqslant \underline{\lim}_{x\to x_0} f(x) \leqslant \overline{\lim}_{x\to x_0} f(x) = \sup f(A \cap V\setminus(x_0\}).$$

Dem. Fie $\alpha_V := \inf f(A \cap V\setminus\{x_0\})$, $\beta_V := \sup f(A \cap V\setminus\{x_0\})$. Evident avem : $\alpha_V \leqslant \beta_V$, $(\forall)\ V \in \mathcal{V} := \mathcal{V}(x_0)$;

$$\alpha := \sup_{V\in\mathcal{V}} \alpha_V = \underline{\lim}_{x\to x_0} f(x)\ ; \quad \beta := \inf_{V\in\mathcal{V}} \beta_V = \overline{\lim}_{x\to x_0} f(x)$$

Să arătăm că $\alpha \leqslant \beta$; presupunem contrariul și fie $\beta < c < \alpha$ fixat. Atunci (P.2.2.6. (1°)) $(\exists)\ \alpha_{V_1} > c$ și $\beta_{V_2} < c$ (Fig. 11)

Punem $V := V_1 \cap V_2$. Evident $V \in \mathcal{V}$ și deoarece $V \subseteq V_1$ (resp. $V \subseteq V_2$), avem $\alpha_V \geqslant \alpha_{V_1}$ (resp. $\beta_V \leqslant \beta_{V_2}$), avem $\alpha_V \geqslant \alpha_{V_1}$ (resp. $\beta_{V_2} \geqslant \beta_V$), deci $\beta_V < c < \alpha_V$, absurd. Rămîne că $\alpha \leqslant \beta$.

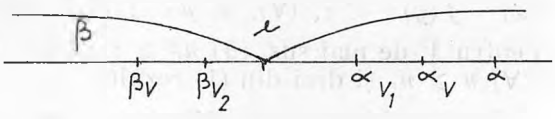


Fig. 11

Celelalte 2 inegalități sînt evidente.

5.3.9. Teoremă. *Fie* $A \subseteq \mathbf{R}$ *o mulțime,* $x_0 \in A'$ $[\overline{\mathbf{R}}]$ *un punct și* $f : A \to \mathbf{R}$ *o funcție. Atunci* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ *există* $\Leftrightarrow \underline{\lim}\limits_{x \to x_0} f(x) = \overline{\lim}\limits_{x \to x_0} f(x)$. *În acest caz cele trei limite coincid.*

Dem. ($\Rightarrow$) Fie $l = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ și $\mathcal{B}$ o bază de vecinătăți a lui l, definită astfel : $\mathcal{B}(l) = \{[l - \varepsilon,\ l + \varepsilon];\ \varepsilon > 0\}$, dacă $l \in \mathbf{R}$; $\mathcal{B} = \{[-\infty, c];\ c \in \mathbf{R}_-\}$, dacă $l = -\infty$; $\mathcal{B} = \{[c, +\infty];\ c \in \mathbf{R}_+\}$, dacă $l = +\infty$. Fixăm $U \in \mathcal{B}$; atunci T.5.3.5.) ($\exists$) $V \in \mathcal{V}(x_0)$ a.î. $f(A \cap V \setminus \{x_0\}) \subseteq U$, deci

$$\inf f(A \cap V \setminus (\{x_0\}) \in U,\ \sup f(A \cap V \setminus \{x_0\}) \in U$$

cum U este interval și cf. P.5.3.8. avem :

$$\inf f(A \cap V \setminus \{x_0\} \leqslant \underline{\lim}\limits_{x \to x_0} f(x) \leqslant \overline{\lim}\limits_{x \to x_0} f(x) \leqslant \sup f(A \cap V \setminus \{x_0\},$$

rezultă (P.2.2.3). că $l_* = \underline{\lim}\limits_{x \to x_0} f(x) \in U$ și $l^* = \overline{\lim}\limits_{x \to x_0} f(x) \in U$, deci $l_*, l^* \in \bigcap\limits_{U \in \mathcal{B}} U = \{l\}$ și deci $l_* = l^* = l$.

($\Leftarrow$) Fie $l = \underline{\lim}\limits_{x \to x_0} f(x) = \overline{\lim}\limits_{x \to x_0} f(x)$ și $\mathcal{B}$ definit mai sus. Fixăm $U \in \mathcal{B}$; atunci (P.2.2.7.) ($\exists$) $V_1, V_2 \in \mathcal{V}(x_0)$ a.î. $\inf f(A \cap V_1 \setminus \{x_0\}) \in U$ și $\sup f(A \cap V_2 \setminus \{x_0\}) \in U$. Evident $V := V_1 \cap V_2 \in \mathcal{V}$ și avem :

$$\inf f(A \cap V_1 \setminus \{x_0\}) \leqslant f(x) \leqslant \sup f(A \cap V_2 \setminus \{x_0\}),\ (\forall) x \in A \cap V \setminus \{x_0\}$$

Cum U este interval, rezultă (P.2.2.3.) că $f(x) \in U$, ($\forall$) $x \in A \cap V \setminus \{x_0\}$, prin urmare (T.5.3.5.) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$.

5.3.10. Teoremă (C a u c h y). *Fie* $A \subseteq \mathbf{R}$ *o mulțime,* $x_0 \in A'$ $[\overline{\mathbf{R}}]$ *un punct și* $f : A \to \mathbf{R}$ *o funcție. Atunci* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ *există și este finită* $\Leftrightarrow$ ($\forall$) $\varepsilon > 0$, ($\exists$) $V \in \mathcal{V}(x_0)$ *a.î.*

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon,\ (\forall)\ x, y \in A \cap V \setminus \{x_0\}$$

Dem. ($\Rightarrow$) Fie $\varepsilon > 0$ fixat. Cf. ipotezei ($\exists$) $V \in \mathcal{V}(x_0)$ a.î.

$$|f(x) - l| < \varepsilon/2,\ (\forall)\ x \in A \cap V \setminus \{x_0\},$$

deci

$$|f(x) - f(y)| \leqslant |f(x) - l| + |l - f(y)| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2,\ (\forall)\ x \in A \cap V \setminus \{x_0\}$$

Condiția din enunț este îndeplinită.

($\Leftarrow$) Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ un șir cu elemente din $A\setminus\{x_0\}$, $x_n \to x_0$, fixat. Să arătăm că $(f(x_n))_{n\geq 1}$ este șir Cauchy. Într-adevăr, fie $\varepsilon > 0$ fixat; cf. ipotezei $(\exists)\ V \in \mathcal{V}(x_0)$ a.î.

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon,\ (\forall),\ x,\ y \in A \cap V\setminus\{x_0\} \tag{1}$$

Deoarece $x_n \to x$, pentru V de mai sus, $(\exists)\ n_V \geq 1$ a.î $x_n \in V$ $(\forall)\ n > n_V$, deci $x_n \in A \cap V\setminus\{x_0\}$, $(\forall)\ n \geq n_V$ și deci din (1) rezultă

$$|f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon,\ (\forall)\ n,\ m > n_V$$

Așadar $(f(x_n))_{n\geq 1}$ este șir Cauchy, deci convergent. Aplicînd P.5.3.4 conchidem că $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ există și este finită.

Corolar 1. *Fie $A \subseteq \mathbf{R}$ o mulțime, $x_0 \in A'$ un punct și $f : A \to \mathbf{R}$ o funcție. Atunci $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ există și este finită $\Leftrightarrow$ $(\forall)\ \varepsilon > 0$, $(\exists)\ \eta = \eta_{\varepsilon,x_0} > 0$ a.î.*

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon,\ (\forall)\ x, y \in A\setminus\{x_0\},\ |x - x_0| < \eta,\ |y - y_0| < \eta$$

Corolar 2. *Fie $A \subseteq \mathbf{R}$ o mulțime, $x_0 \in A'$ $[\overline{\mathbf{R}}]$ un punct și $f : A \to \mathbf{R}$ o funcție. Atunci $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ există și este finită $\Leftrightarrow$ $\hat{\omega}_f(x_0) = 0$.*

Dem. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ există și este finită $\overset{5.3.10}{\Leftrightarrow}$ $(\forall)\ \varepsilon > 0$, $(\exists) V \in \mathcal{V}(x_0)$ a.î. $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$, $(\forall)\ x,\ y \in A \cap V\setminus\{x_0\} \Leftrightarrow (\forall)\ \varepsilon > 0$, $(\exists)\ V \in \mathcal{V}(x_0)$ a.î. $\operatorname{dia}(f(A \cap V\setminus\{x_0\})) < \varepsilon \Leftrightarrow (\forall)\ \varepsilon > 0$, $\inf\limits_{V\in\mathcal{V}(x_0)} (\operatorname{dia}(f(A \cap V\setminus\{x_0\}))) < \varepsilon \Leftrightarrow \hat{\omega}_f(x_0) = 0$ cf. P.2.2.6. Cor. 3).

Corolar 3. *Fie $A \subseteq \mathbf{R}$ o mulțime și $f : A \to \mathbf{R}$ o funcție lipschitziană. Atunci f are limită finită în fiecare punct $x_0 \in A'$.*

Dem. f fiind lipschitziană, $(\exists)\ \alpha > 0$ a.î.

$$|f(x) - f(y)| \leq \alpha\,|x - y|,\ (\forall)\ x,\ y \in A$$

Fie $x_0 \in A'$ și $\varepsilon > 0$ fixați; punem $\eta := \dfrac{\varepsilon}{2\alpha}$. Atunci

$$|f(x) - f(y)| \leq \alpha|x - y| \leq \alpha(|x - x_0| + |x_0 - y)| \leq \varepsilon, (\forall)\ x,\ y \in A \cup V_\eta(x_0)\setminus\{x_0\},$$

deci (T.5.3.10.) f are limită finită în x_0.

Observația 1. Dacă $x_0 = \pm\infty$, Cor. 3 nu este numaidecît adevărat, cum arată exemplul funcției sin.

5.3.11. Propoziție. *Fie $A \subseteq \mathbf{R}$ o mulțime, $x_0 \in A'[\overline{\mathbf{R}}]$ un punct și $f, g\ A : \to \mathbf{R}$ două funcții care au limită finită în x_0. Atunci*

1° $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) \pm g(x)) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$;

2° $\lim\limits_{x\to x_0} \lambda f(x) = \lambda \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$;

3° $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x)\, g(x)) = (\lim\limits_{x\to x_0} f(x)).\ (\lim\limits_{x\to x_0} g(x))$;

4° $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) / \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ *dacă* $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) \neq 0$.

Dem. Evidentă; aplicăm P.2.3.15.

Observația 1. Prop. 5.3.11. rămîne adevărată și pentru funcții f, g care au limită arbitrară în x_0, dacă se aplică convențiile privind operațiile algebrice cu elemente din $\overline{\mathbf{R}}$ (v. P.2.3.15 (Observația 1)).

Observația 2. Dacă $(\exists) V \in \mathcal{V}(x_0)$ a.î. $g(x) \neq 0, (\forall) x \in A \cap V \setminus \{x_0\}$(1), atunci prin $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ înțelegem $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{(f|_{A \cap V})(x)}{(g|_{A \cap V})(x)}$ în cazul în care această ultimă limită există. Condiția (1) este îndeplinită, spre exemplu, dacă $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) \neq 0$.

5.3.12. Propoziție. *Fie* $A, B \subseteq \mathbf{R}$ *două mulțimi,* $x_0 \in A'[\overline{\mathbf{R}}]$ *un punct și* $f : A \to \mathbf{R}$, $g : B \to \mathbf{R}$ *două aplicații; presupunem că:* 1° $(\exists)$ $l = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ *și avem* $l \in B'[\overline{\mathbf{R}}]$; 2° $f(A \setminus \{x_0\}) \subseteq B \setminus \{l\}$; 3° $(\exists)$ $L = \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$. *Atunci* $(\exists) \lim\limits_{x \to x_0} (g \circ f)(x)$ *și ea este egală cu* L.

Dem. Fie $x_n \in A \setminus \{x_0\}$, $x_n \to x_0$, fixat și $y_n = f(x_n)$ $(n \geqslant 1)$. Atunci $y_n \in B \setminus \{l\}$, $(\forall)$ $n \geqslant 1$ și deoarece $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$, avem $y_n \to l$. Din 3° rezultă că $g(y_n) \to L$, deci $(g \circ f)(x_n) \to L$ și deci $g \circ f$ are limita L în x_0.

Observație. Dacă cond. 2° din P.5.3.12. este înlocuită prin cond. $f(A) \subseteq B$, concluzia nu este numaidecît adevărată.

Contraexemplu.

Fie $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbf{Q} \\ x, & x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q} \end{cases}$; $g(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ 2, & x \in \mathbf{R}^* \end{cases}$. Atunci

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = 2$ și $(g \circ f)(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbf{Q} \\ 2, & x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q} \end{cases}$

Evident $g \circ f$ nu are limită în 0.

5.3.13. Propoziție. *Fie* $A \subseteq \mathbf{R}$ *o mulțime,* $x_0 \in A'$ $[\overline{\mathbf{R}}]$ *un punct și* $f, g, h : A \to \mathbf{R}$ *trei funcții; presupunem:* 1° $g \leqslant f \leqslant h$; 2° $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \lim\limits_{x \to x_0} h(x) = l$. *Atunci* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$.

Dem. Fie $(x_n)_{n \geqslant 1}$ un șir cu elemente din $A \setminus \{x_0\}$, $x_n \to x_0$, fixat. Evident avem: 1° $g(x_n) \leqslant f(x_n) \leqslant h(x_n)$, $(\forall)$ $n \geqslant 1$; (ii) $g(x_n) \to l$, $h(x_n) \to l$. Atunci (P.2.3.7.) $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = l$, prin urmare $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$.

Corolar 1. *Fie* $A \subseteq \mathbf{R}$ *o mulțime,* $x_0 \in A'$ $[\overline{\mathbf{R}}]$ *un punct și* $f, g : A \to \mathbf{R}$ *două funcții. Atunci* 1° *Dacă* $|f(x)| \leqslant |g(x)|$, $(\forall)$ $x \in A$ *și* $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$, *rezultă* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$; 2° *Dacă* $(\exists)$ $V \in \mathcal{V}(x_0)$ *a.î.* f *este mărginită pe* $A \cap V \setminus \{x_0\}$ *și* $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$, *rezultă că* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)\, g(x) = 0$.

Dem. 1° Aplicăm P.5.3.13. ținînd cont că $0 \leqslant |f| \leqslant |g|$.

2° Cf. ipotezei $(\exists)$ $M > 0$, $(\exists)$ $V \in \mathcal{V}(x_0)$ a.î. $|f(x)| \leqslant M$, $(\forall)$ $x \in A \cap V \setminus \{x_0\}$, deci $|(fg)|_{A \cap V}| \leqslant (Mg)|_V$. Cum funcția $(Mg)|_{A \cap V}$ are limita 0 în x_0, rezultă (cf. 1°) că $(fg)|_{A \cap V}$ are limita 0 în x_0 etc.

5.3.14. Propoziție. *Fie* $A \subseteq \mathbf{R}$ *o mulțime,* $x_0 \in A'$ $[\overline{\mathbf{R}}]$ *un punct și* $f, g : A \to \mathbf{R}$ *două funcții cu proprietatea că* $f \leqslant g$. *Atunci:*

1° *Dacă* $(\exists)$ $l = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, $(\exists)$ $L = \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$, *rezultă că* $l \leqslant L$;

2° *Dacă* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ *(resp.* $-\infty$*) și* g *este minorată (resp. majorată), rezultă că* $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.

Dem. 1° Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ un șir cu elemente din $A\setminus\{x_0\}$, $x_n \to x_0$ fixat. Atunci $f(x_n) \leq g(x_n)$, $(\forall)$ $n \geq 1$, deci (P.2.3.7.) avem :

$$l = \lim_{n\to\infty} f(x_n) \leq \lim_{n\to\infty} g(x_n) = L$$

2° Cf. ipotezei $(\exists)$ $m \in \mathbf{R}$, $(\exists)$ $V_1 \in \mathcal{V}(x_0)$ a.î. $g(x) \geq m$, $(\forall)$ $x \in A \cap (V_1\setminus\{x_0\})$. Fie acum $c \in \mathbf{R}$ fixat și $c_0 = c - m$. Din ipoteză rezultă că $(\exists)$ $V_2 \in \mathcal{V}(x_2)$ a.î. $f(x) \geq c_0$, $(\forall)$ $x \in A \cap V_2\setminus\{x_0\}$. Atunci $V := V_1 \cap V_2 \in \mathcal{V}(x_0)$ și avem

$$f(x) + g(x) \geq c_0 + m = c,\ (\forall)\ x \in A \cap V\setminus\{x_0\},$$

prin urmare $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) + g(x)) = +\infty$.

Corolar 1. *Fie $A \subseteq \mathbf{R}$ o mulțime, $x_0 \in A'$ $[\overline{\mathbf{R}}]$ un punct și $f : A \to \mathbf{R}$ o funcție. Dacă $f(x) \leq \lambda$, $(\forall)$ $x \in A$ și f are limită în x_0, atunci $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \leq \lambda$.*

Corolar 2. *Fie $A \subseteq \mathbf{R}$ o mulțime, $x_0 \in A'$ $[\overline{\mathbf{R}}]$ un punct și f, $g : A \to \mathbf{R}$ două funcții care au limită în x_0. Dacă $|f| \leq |g|$, atunci $|\lim\limits_{x\to x_0} f(x)| \leq |\lim\limits_{x\to x_0} g(x)|$.*

5.3.15. Propoziție. *Fie $A \subseteq \mathbf{R}$ o mulțime, $x_0 \in A'$ $[\overline{\mathbf{R}}]$ un punct și $f : A \to \mathbf{R}$ o funcție. Dacă $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) < \alpha$ (resp. $> \alpha$), atunci $(\exists)$ V o vecinătate a lui x_0 a.î. $f(x) < \alpha$ (resp. $f(x) > \alpha$), $(\forall)$ $x \in A \cap V\setminus\{x_0\}$.*

Dem. Fie $l = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$. Să punem $U = (-\infty, \alpha)$, dacă l este finit și $U = [-\infty, \alpha)$, dacă $l = -\infty$. Atunci U este o vecinătate a lui l, deci $(\exists)$ $V \in \mathcal{V}(x_0)$ a.î. $f(A \cap V\setminus\{x_0\}) \subseteq U$, de unde rezultă că $f(x) < \alpha$, $(\forall)$ $x \in A \cap V\setminus\{x_0\}$.

Corolar 1. *Fie $A \subseteq \mathbf{R}$ o mulțime, $x_0 \in A'$ $[\overline{\mathbf{R}}]$ un punct și $f : A \to \mathbf{R}$ o funcție care are limita $l \in \overline{\mathbf{R}}$ în x_0. Atunci l este finit i.e. $l \in \mathbf{R} \Leftrightarrow (\exists)$ $V \in \mathcal{V}(x_0)$ a.î. f este mărginită pe $A \cap V\setminus\{x_0\}$.*

Dem. ($\Rightarrow$) Fie $l = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ și $\alpha < l < \beta$ fixați. Atunci $(\exists)$ V_1, $V_2 \in \mathcal{V}(x_0)$ a.î. $f(x) < \beta$, $(\forall)$ $x \in A \cap V_1\setminus\{x_0\}$ și $f(x) > \alpha$, $(\forall)$ $x \in A \cap V_2\setminus\{x_0\}$. Punem $V := V_1 \cap V_2$ etc.

Corolar 2. *Fie $A \subseteq \mathbf{R}$ o mulțime, $x_0 \in A'$ $[\overline{\mathbf{R}}]$ un punct și $f : A \to \mathbf{R}$ o funcție. Dacă $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l \in \mathbf{R}$ și $\alpha < l < \beta$ atunci $(\exists)$ $V \in \mathcal{V}(x_0)$ a.î. $\alpha < f(x) < \beta$, $(\forall)$ $x \in A \cap V\setminus\{x_0\}$.*

5.3.16. Calculul limitelor unor funcții uzuale.

$$1^\circ\ \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1\,;\ \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1\,;$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arc\,sin} x}{x} = 1,\ \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arc\,tg} x}{x} = 1\,;$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$2^\circ\ \lim_{x\to\pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e\,;\ \lim_{y\to 0} (1 + y)^{\frac{1}{y}} = e\,;$$

3° *Fie* $P_n(resp.\ Q_m) \in \mathbf{R}[X]$ *un polinom de grad* n (*resp.* m), *în care coeficientul dominant este* $a_0(resp.\ b_0)$ *Atunci avem* :

$$\lim_{x\to\infty} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \begin{cases} \dfrac{a_0}{b_0}, & n = m \\ 0, & n < m \\ \left(\operatorname{sign} \dfrac{a_0}{b_0}\right).\infty, & n > m \end{cases}$$

4° *Fie* $P \in \mathbf{R}[X]$ *un polinom de grad nenul. Atunci* $\lim\limits_{x\to\infty} P(x) = +\infty$ (*resp.* $-\infty$), *dacă coeficientul dominant al lui* P *este pozitiv* (*resp. negativ*).

Dem. 1° $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1.$

Notînd prin x măsura în radiani a $\sphericalangle$ COA, din considerente geometrice (Fig. 12) rezultă :

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x,\ (\forall)\ 0 < x < \frac{\pi}{2},$$

deoarece

$$\sin x = \|AB\|,\ x = \|\widehat{AC}\|,\ \operatorname{tg} x = \|CD\|$$

Împărţind cu $\sin x$, obţinem :

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x},\ (\forall)\ 0 < |x| < \frac{\pi}{2},$$

deci

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1,\ (\forall)\ 0 < |x| < \frac{\pi}{2}$$

şi deci

$$0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < 1 - \cos x = 2\sin^2\frac{x}{2} < \frac{x^2}{2},\ (\forall)\ 0 < |x| < \frac{\pi}{2},$$

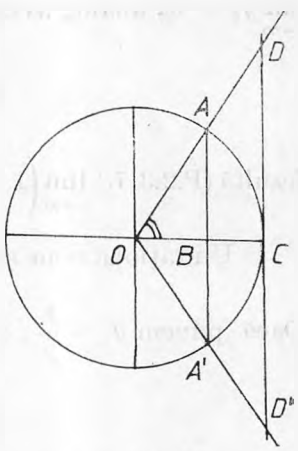


Fig. 12

de unde rezultă (P.5.3.13.) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x} - 1\right) = 1$ etc.

Mai departe avem :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \cos x = 1,$$

deoarece, cum vom vedea, $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = 1.$

În fine

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arc}\sin x}{x} = \lim_{y\to 0} \frac{y}{\sin y} = 1 \text{ etc.}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$2^\circ\ \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$

Deoarece $[x]_* \leqslant x < [x]_* + 1\ (\forall)\ x \in \mathbf{R}$, avem :

$$\left(1+\frac{1}{[x]_*+1}\right)^{[x]_*} \leqslant \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \leqslant \left(1+\frac{1}{[x]_*}\right)^{[x]_*+1},\ (\forall)\ x \in \mathbf{R}_+^*$$

Fie $(x_k)_{k\geqslant 1}$ un șir din $\mathbf{R}_+^*$, $x_k \to \infty$, fixat ; punem

$$y_k := \left(1+\frac{1}{[x_k]_*+1}\right)^{[x_k]_*},\quad z_k := \left(1+\frac{1}{[x_k]_*}\right)^{[x_k]_*+1}\ (k \geqslant 1)$$

Deoarece $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{1+\frac{1}{n+1}} = e$, rezultă imediat că $\lim_{k\to\infty} y_k = e$; analog avem $\lim_{k\to\infty} z_k = e$. Cum însă

$$y_k \leqslant \left(1+\frac{1}{x_k}\right)^{x_k} \leqslant z_k\ (\forall)\ k \geqslant 1,$$

rezultă (P.2.3.7.) $\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{x_k}\right)^{x_k} = e$, prin urmare $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$.

Un raționament similar arată că $\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$, deci $\lim_{|x|\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$.

Dacă punem $y = \frac{1}{x}$, $x \in \mathbf{R}^*$, avem $y \to 0 \Leftrightarrow |x| \to \infty$, deci

$$\lim_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}} = \lim_{|x|\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$$

3°. Fie $P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$

$$Q_m(x) = b_0\,x^m + b_1\,x^{m-1} + \ldots + b_m$$

Scriem :

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{a_0 + \frac{a_1}{x} + \ldots + \frac{a_n}{x^n}}{b_0 + \frac{b_1}{x} + \ldots + \frac{b_m}{x^m}} \cdot \begin{cases} 1, & n = m \\ x^{n-m}, & n > m \\ \frac{1}{x^{m-n}}, & m > n, \end{cases}$$

de unde, prin trecere la limită, obținem :

$$\lim_{x\to\infty}\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \begin{cases} \frac{a_0}{b_0}, & n = m \\ \left(\operatorname{sign}\frac{a_0}{b_0}\right)\cdot\infty, & n > m \\ 0, & m > n, \end{cases}$$

Am utilizat mai sus faptul că

$$\lim_{x\to\infty} x^p = +\infty \left(\text{resp. } \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^p} = 0\right), (\forall)\ p > 0.$$

4° Aplicăm 3° pentru polinoamele P și 1.
Să arătăm 4° direct, printr-o altă metodă.

Fie $P = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \ldots + a_0 (a_n \neq 0)$. Înlocuind P cu $\frac{1}{a_n} P$, putem presupune $a_n = 1$. Evident putem scrie

$$P(x) = x^n \left(1 + \frac{a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1} x^{n-1}}{x^n}\right), (\forall)\ x \in \mathbf{R}$$

Punem $\alpha := 1 + |a_0| + |a_1| + \ldots + |a_{n-1}|$. Atunci

$$|a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1} x^{n-1}| \leqslant (|a_0| + |a_1| + \ldots + |a_{n-1}|)\, |x|^{n-1} =$$

$$= \alpha |x|^{n-1} < \frac{1}{2} |x|^n, (\forall)\ |x| > 2\alpha,$$

deci

$$\frac{a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1} x^{n-1}}{x^n} > -\frac{1}{2}, (\forall)\ x > 2\alpha$$

și deci

$$P(x) \geqslant x^n \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} x^n, (\forall)\ x > 2\alpha \tag{1}$$

Din (1) deducem imediat, utilizind una din metodele standard, că $\lim_{x\to\infty} P(x) = +\infty$.

5.4. Limite laterale ale unei funcții într-un punct

5.4.1. Definiție. Fie $A \subseteq \mathbf{R}$ o mulțime, $x_0 \in A'^s$ $[\overline{\mathbf{R}}]$ (resp. $A'^d[\overline{\mathbf{R}}]$) un punct, $f : A \to \mathbf{R}$ o funcție și $l \in \overline{\mathbf{R}}$ un punct. Vom spune că f are *limită la stînga* (resp. *la dreapta*) în x_0 și aceasta este egală cu l, dacă :

$(\forall)$ $(x_n)_{n\geqslant 1}$ un șir cu elemente din $A \cap (-\infty, x_0)$ (resp. $A \cap (x_0, \infty)$), care are limita x_0, rezultă că șirul $(f(x_n))_{n\geqslant 1}$ are limita l. Vom scrie atunci $\lim_{x\nearrow x_0} f(x) = l$ (resp. $\lim_{x\searrow x_0} f(x) = l$). Dacă $\lim_{x\nearrow x_0} f(x)$ (resp. $\lim_{x\searrow x_0} f(x_0)$) există, ea se notează cu $f(x_0 -)$ (resp. $f(x_0 +)$).

Observația 1. Dacă $(\exists)$ $x_n \in A \cap (-\infty, x_0)$, $x_n \to x_0$. a.î. $(f(x_n))_{n\geqslant 1}$ nu are limită, atunci f nu are limita la stînga în x_0. Sau dacă $(\exists)$ $x_n, y_n \in A \cap (-\infty, x_0)$, $x_n \to x_0$, $y_n \to x_0$, a.î. $f(x_n) \to l$ și $f(y_n) \to l' \neq l$, atunci f nu are limită la stînga în x_0. Afirmații analoage pentru limita la dreapta în x_0.

Observația 2. Dacă $f : A \to \mathbf{R}$ și $x_0 \in A'$ $[\overline{\mathbf{R}}]$, avem $x_0 \in A'^s$ $[\overline{\mathbf{R}}] \cup A'^d([\overline{\mathbf{R}}]$, deci *are sens* fie limita $f(x_0-)$, fie $(f(x_0+)$ și nu au numaidecît sens ambele limite.

Exemple.

1. Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ funcția signum. Atunci $f(0-) = -1$; $f(0+) = +1$; $f(x-) = f(x+) = 1$, $(\forall)$ $x \in \mathbf{R}_+$ etc.

2. Fie $A = \{0\} \cup (1, 2)$ și $f : A \to \mathbf{R}$ definită astfel $f(x) = x + 1$. Atunci $A'^s = (1,2]$, $A'^d = [1,2)$, deci are sens să calculăm limita lui f la dreapta în 1 și la stînga în 2. Evident avem $f(1+) = 2$, $f(2-) = 3$.

3. Fie f funcția tangentă. Știm că $\operatorname{tg} : A \to \mathbf{R}$, unde $A = \mathbf{R} \setminus \frac{\pi}{2} + \pi\mathbf{Z}$.

Evident $\frac{\pi}{2} \in A'^b$ și avem $\lim\limits_{x \nearrow \frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x = +\infty$, $\lim\limits_{x \searrow \frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x = -\infty$.

Proprietățile pe care le are limita unei funcții într-un punct se transcriu și asupra limitelor laterale ale funcției în punct. Să semnalăm mai jos pe cele mai reprezentative dintre ele.

5.4.2. Propoziție. *Fie $A \subseteq \mathbf{R}$ o mulțime și $f : A \to \mathbf{R}$ o funcție. Atunci au loc relațiile*:

1° $\lim\limits_{x \nearrow x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} f_{|A \cap (-\infty, x_0)}(x)$, *dacă* $x_0 \in A'^s$;

2° $\lim\limits_{x \searrow x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} f_{|A \cap (x_0, \infty)}(x)$, *dacă* $x_0 \in A'^d$;

3° $\lim\limits_{x \nearrow \infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \infty} f(x)$, *dacă* $\infty \in A'^s$ $[\overline{\mathbf{R}}]$;

4° $\lim\limits_{x \searrow -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$, *dacă* $-\infty \in A'^d$ $[\overline{\mathbf{R}}]$.

Dem. Evidentă.

5.4.3. Propoziție. *Fie $A \subseteq \mathbf{R}$ o mulțime, $x_0 \in A'^s$ (resp. A'^d) un punct și $f, : A \to \mathbf{R}$ o funcție. Atunci* $\lim\limits_{x \nearrow x_0} f(x) = l$ (*resp.* $\lim\limits_{x \searrow x_0} f(x) = l$) $\Leftrightarrow (\exists)\ V \in \mathcal{V}(x_0)$ *a.î.* $\lim\limits_{x \to x_0} f_{|A \cap V -}(x) = l$ (*resp.* $\lim\limits_{x \to x_0} f_{|A \cap V +}(x) = l$).

Dem. $\lim\limits_{x \nearrow x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f_{|A \cap (-\infty, x_0)}(x) = l \overset{5.3.3.}{\Leftrightarrow}$ $(\exists)\ V \in \mathcal{V}(x_0)$ a.î.

$\lim\limits_{x \to x_0} f_{A \cap (-\infty, x_0) \cap V}(x) = l \Leftrightarrow (\exists)\ V \in \mathcal{V}(x_0)$ a.î. $\lim\limits_{x \to x_0} f_{|A \cap V -}(x) = l$

5.4.4. Propoziție. *Fie $A \subseteq \mathbf{R}$ o mulțime, $x_0 \in A'^s$ un punct și $f : A \to \mathbf{R}$ o funcție. Atunci* $\lim\limits_{x \nearrow x_0} f(x)$ *există și este egală cu* $l \Leftrightarrow (\forall)\ U \in \mathcal{V}(l)$, $(\exists)\ V \in \mathcal{V}(x_0)$ *a.î.* $f(A \cap V^- \setminus \{x_0\}) \subseteq U$.

Dem. Fie $B = A \cap (-\infty, x_0)$. Atunci $\lim\limits_{x \nearrow x_0} f(x) = l \overset{5.4.3.}{\Leftrightarrow} \lim\limits_{x \to x_0} f_{|B}(x) = l \overset{5.3.5.}{\Leftrightarrow} (\forall)\ U \in \mathcal{V}(l)$, $(\exists)\ V \in \mathcal{V}(x_0)$ a.î. $f_{|B}(B \cap V \setminus \{x_0\}) \subseteq U \Leftrightarrow (\forall)\ U \in \mathcal{V}(l)$ $(\exists)\ V \in \mathcal{V}(x_0)$ a.î. $f(A \cap V^- \setminus \{x_0\}) \subseteq U$ (deoarece $B \cap V = A \cap V^-$).

Corolar 1. *Fie $A \subseteq \mathbf{R}$ o mulțime, $x_0 \in A'^s$ un punct și $f : A \to \mathbf{R}$ o funcție. Atunci* $\lim\limits_{x \nearrow x_0} f(x) = l \in \mathbf{R} \Leftrightarrow (\forall)\ \varepsilon > 0$, $(\exists)\ \eta > 0$ *a.î.* $|f(x) - l| < \varepsilon$, $(\forall)\ x \in A$, $x_0 - \eta < x < x_0$.

Corolar 2. *Fie $A \subseteq \mathbf{R}$ o mulțime, $x_0 \in A'^s$ un punct și $f : A \to \mathbf{R}$ o funcție. Atunci* $\lim\limits_{x \nearrow x_0} f(x) = +\infty$ (*resp.* $-\infty$) $\Leftrightarrow (\forall)\ c \in \mathbf{R}_+$ (*resp.* $\mathbf{R}_-$), $(\exists)\ V \in \mathcal{V}(x_0)$ *a.î.* $f(A \cap V^- \setminus \{x_0\}) \subseteq (c, \infty)$ (*resp.* $(-\infty, c)$).

5.4.5. Teoremă. *Fie $A \subseteq \mathbf{R}$ o mulțime, $x_0 \in A'^b$ un punct și $f : A \to \mathbf{R}$ o funcție. Atunci* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ *există* $\Leftrightarrow f(x_0-)$ *și* $f(x_0+)$ *există și sînt egale. În acest caz cele trei limite sînt egale între ele.*

Dem. ($\Rightarrow$) Fie $l = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$. Atunci $(\forall)\ x_n \in A \cap (-\infty, x_0)$, $x_n \to x_0$, avem $f(x_n) \to l$, deci $f(x_0-) = l$ etc.

($\Leftarrow$) Fie $U \in \mathcal{V}(l)$ fixat. Atunci (P.5.4.4.) $(\exists)\ V_1,\ V_2 \in \mathcal{V}(x_0)$ a.î. $f(A \cap V_1^- \setminus \{x_0\}) \subseteq U$ și $f(A \cap V_2^+) \setminus \{x_0\}) \subseteq U$. Fie $V := V_1 \cap V_2$. Evident $V \in \mathcal{V}(x_0)$ și avem :

$$A \cap V \setminus \{x_0\} \subseteq (A \cap V_1^- \setminus \{x_0\}) \cup (A \cap V_2^+ \setminus \{x_0\}),$$

deci $f(A \cap V \setminus \{x_0\}) \subseteq U$ și deci (T.5.3.5.) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$.

Corolar 1. *Fie $A \subseteq \mathbf{R}$ o mulțime, $x_0 \in A'$ un punct și $f : A \to \mathbf{R}$ o funcție. Atunci :*

1° *Dacă $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ și $x_0 \in A'^s$, rezultă că $f(x_0-) = l$;*

2° *Dacă $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ și $x_0 \in A'^d$, rezultă că $f(x_0+) = l$.*

Observație. Dacă $x_0 \in A'$, T.5.4.5. poate să nu aibă sens. Fie, spre exemplu $f : (0,1) \to \mathbf{R}$ funcția identic egală cu 1. Atunci f are limită în 0 și 1, totuși nu putem aplica T.5.4.5. ; $f(0-)$ și $f(1+)$ nu au sens.

5.4.6. Calculul limitelor laterale ale unor funcții uzuale.

1° $\lim\limits_{x \searrow 0} \dfrac{1}{x} = +\infty$, $\lim\limits_{x \nearrow 0} \dfrac{1}{x} = -\infty$;

2° $\lim\limits_{x \searrow x_0} \dfrac{1}{(x-x_0)^n} = +\infty$, $\lim\limits_{x \nearrow x_0} \dfrac{1}{(x-x_0)^n} = -\infty$ (n-*impar*) ;

3° $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{|x-x_0|^n} = +\infty$ $(n \in \mathbf{N})$

Dem. 1° Fie $x_n \in \mathbf{R}_+$, $x_n \searrow 0$, fixat. Atunci $(\forall)\ c \in \mathbf{R}_+$, $(\exists)\ n_0 \geqslant 1$ a.î. $0 < x_n < \dfrac{1}{c}$, $(\forall)\ n \geqslant n_0$, deci $\dfrac{1}{x_n} > c$, $(\forall)\ n \geqslant n_0$ și deci $\dfrac{1}{x_n} \to +\infty$. Prin urmare $\lim\limits_{x \searrow 0} \dfrac{1}{x} = +\infty$.

Celelalte limite se deduc ușor din prima.

5.5. Funcții continue

Funcțiile continue sînt un caz particular de funcții care au limită. În esență o funcție f este continuă, dacă orice două puncte apropiate între ele au imaginile lor prin f, apropiate între ele.

5.5.1. Definiție. Fie $A \subseteq \mathbf{R}$ o mulțime, $x_0 \in A$ un punct și $f : A \to \mathbf{R}$ o funcție. Vom spune că f este *continuă* (secvențial) în x_0, dacă este îndeplinită condiția :

$$(\forall)\ (x_n)_{n \geqslant 1} \subseteq A,\ x_n \to x_0 \Rightarrow f(x_n) \to f(x_0)$$

O funcție care nu este continuă în x_0, vom spune că este *discontinuă* în x_0. Vom spune că f este *continuă pe A* sau simplu *continuă* (resp. *discontinuă* pe A), dacă f este continuă (resp. discontinuă) în fiecare punct x din A.

5.5.2. Definiție. Fie $A \subseteq \mathbf{R}$ o mulțime, $x_0 \in A \cap A'^d$ (resp. $A \cap A'^s$) un punct și $f : A \to \mathbf{R}$ o funcție. Vom spune că f este *continuă la dreapta* (resp. *la stînga*) în x_0, dacă $f(x_0+)$ (resp. $f(x_0-)$) există și este egală cu $f(x_0)$. Dacă $A \subseteq A'^d$ (resp. $A \subseteq A'^s$), vom spune că f este *continuă la dreapta* (resp. *la stînga*) *pe* A, dacă f este continuă la dreapta (resp. stînga) în fiecare punct x din A.

5.5.3. Definiție. Fie A, $B \subseteq \mathbf{R}$ două mulțimi și $f : A \to B$ o funcție. Vom spune că f este *omeomorfă* dacă : (i) f este bijectivă ; (ii) f și f^{-1} sînt continue.

5.5.4. Definiție. Fie $I \subseteq \mathbf{R}$ un interval, $x_0 \in I$ un punct și $f : I \to \mathbf{R}$ o funcție. Vom spune că x_0 este punct de *discontinuitate de prima speță*, dacă (i) f este discontinuă în x_0; (ii) $f(x_0+)$ și $f(x_0-)$ există și sînt finite. Un punct de discontinuitate care nu este de prima speță se numește de *speța a doua*.

Observația 1. Fie $f : A \to \mathbf{R}$ o funcție. Definiția limitei lui f în x_0 are sens numai dacă $x_0 \in A'$; continuitatea lui f în x_0 are sens numai dacă $x_0 \in A$. Așadar, dacă $x_0 \in A \setminus A'$, atunci f poate fi continuă în x_0 și *nu are sens* să vorbim de limita lui f în x_0.

Observația 2. Dacă există $(x_n)_{n\geqslant 1}$ un șir cu elemente din A, $x_n \to x_0 \in A$, a.î. șirul $(f(x_n))_{n\geqslant 1}$ *nu are limită* sau are limită și aceasta este *diferită* de $f(x_0)$, atunci f este discontinuă în x_0. De asemenea, avem : f discontinuă în $x_0 \in A \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (\exists)\ \varepsilon > 0, (\exists)\ (x_n)_{n\geqslant 1} \subseteq A$, $x_n \to x_0$ a.î. $|f(x_n) - f(x_0)| \geqslant \varepsilon, (\forall)\ n \geqslant 1$.

Observația 3. Fie $f : A \to \mathbf{R}$ o funcție și $x_0 \in B \subseteq A$. Dacă f este continuă în x_0, atunci $f|_B$ este continuă în x_0; acest lucru se exprimă astfel : *f este continuă în x_0, relativ* la B. Afirmația reciprocă nu este numaidecît adevărată.

Observația 4. Vorbind intuitiv, putem spune că o funcție f definită pe un *interval* $I \subseteq \mathbf{R}$ este continuă în $x_0 \in I$, dacă graficul său este *neîntrerupt* în punctul $P(x_0, f(x_0))$. Dacă mulțimea de definiție a lui f nu este un interval, această interpretare geometrică nu este corectă; spre exemplu funcția tg este continuă și nu are graficul neîntrerupt.

Exemplul 1. *Fie $A = [0,1] \cup \{2\}$ și $f : A \to \mathbf{R}$ funcția identic egală cu* 1. *Atunci f este continuă.*

Exemplul 2. *Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definită astfel $f(x) = x^2$. Atunci f continuă.*

Într-adevăr, $(\forall)\ x_0 \in \mathbf{R}$, $(\forall)\ (x_n)_{n\geqslant 1}$ un șir cu elemente din $\mathbf{R}$, $x_n \to x_0$, rezultă că $f(x_n) = x_n^2 \to x_0^2 = f(x_0)$, deci f este continuă în x_0.

Exemplul 3. *Fie $f = 1_{[0,1]}$ funcția caracteristică a lui $[0,1]$. Atunci f continuă pe $\mathbf{R} \setminus \{0,1\}$ iar 0 și 1 sînt discontinuități de prima speță.*

Într-adevăr, fie $x_0 \in \mathbf{R} \setminus \{0,1\}$ fixat și $x_n \in \mathbf{R}$, $x_n \to x_0$ Dacă, spre exemplu, $x_0 \in (0,1)$, atunci $(\exists)\ n_0 \geqslant 1$ cu $x_n \in (0,1)$, $(\forall)\ n \geqslant n_0$, deci $f(x_n) = 1$, $(\forall)\ n \geqslant 1$ și deci $f(x_n) \to 1 = f(x_0)$. Așadar f este continuă în x_0.

Fie acum $x_n \in \mathbf{R}_-$, $x_n \to 0$, fixat. Atunci $f(x_n) = 0$, $(\forall)\ n \geqslant 1$, deci $f(x_n) \to 0 = f(0-)$. Analog avem $f(0+) = 1$, deci o discontinuitate de prima speță etc.

Exemplul 4. *Fie $f : \mathbf{R} \to \{0,1\}$ funcția lui Dirichlet i.e. $f(x) = 1$, $(\forall)\ x \in \mathbf{Q}$ și $f(x) = 0$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$. Atunci f este discontinuă pe $\mathbf{R}$, fiecare punct $x_0 \in \mathbf{R}$ fiind o discontinuitate de speța a doua.*

Într-adevăr, fie $x_0 \in \mathbf{R}$ fixat și să presupunem f continuă în x_0. Atunci $(\forall)\ r_n \in \mathbf{Q}$, $r_n \to x_0$, avem $1 = f(r_n) \to f(x_0)$, deci $f(x_0) = 1$. De asemenea, $(\forall)$ $i_n \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$, $i_n \to x_0$, avem $0 = f(i_n) \to f(x_0)$, deci $f(x_0) = 0$, absurd. Rămîne că f este discontinuă în x_0, deci pe $\mathbf{R}$.

Luînd șirurile $(r_n)_{n\geqslant 1}$ și $(i_n)_{n\geqslant 1}$ considerate mai sus, în stînga lui x_0, deducem că $f(x_0-)$ nu există, prin urmare x_0 este o discontinuitate de speța a doua.

Fie $g(x) = xf(x)$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$. Atunci g continuă în 0.

Într-adevăr, $(\forall)\ x_n \in \mathbf{R}$, $x_n \to 0$, avem $|g(x_n)| \leqslant |x_n|, (\forall)\ n \geqslant 1$, deci $g(x_n) \to 0 = g(0)$ etc.

5.5.5. Propoziție. *Fie $A \subseteq \mathbf{R}$ o mulțime și $f : A \to \mathbf{R}$ o funcție. Dacă f este continuă în $x_0 \in A$ și $x_0 \in B \subseteq A$, atunci $f|_B$ este continuă în x_0.*

Dem. Evidentă.

Observație. Reciproca P.5.5.5. nu este numaidecît adevărată.

Contraexemplu. Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ funcția lui Dirichlet. Atunci $0 \in \mathbf{Q} \subseteq \mathbf{R}$ și $f|_{\mathbf{Q}} = 1$, deci $f|_{\mathbf{Q}}$ este continuă în 0 și totuși f este discontinuă în 0.

5.5.6. Teoremă. *Fie $A \subseteq \mathbf{R}$ o mulțime și $f : A \to \mathbf{R}$ o funcție. Atunci :*

1° *Dacă $x_0 \in A$ este punct izolat, rezultă că f este continuă în x_0;*

2° *Dacă* $x_0 \in A$ *este neizolat i.e.* $x_0 \in A \cap A'$, *rezultă că* f *este continuă în* $x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x)$ *există și este egală cu* $f(x_0)$.

Dem. 1° $x_0 \in A$ punct izolat, deci $(\exists)\ V \in \mathcal{V}(x_0)$ cu $A \cap V = \{x_0\}$ și fie $x_n \in A$, $x_n \to x_0$, fixat. Atunci $(\exists)\ n_0 \geqslant 1$ cu $x_n \in V$, $(\forall)\ n \geqslant n_0$, deci $x_n = x_0$, $(\forall)\ n \geqslant n_0$ și deci $f(x_n) = f(x_0)$, $(\forall)\ n \geqslant n_0$, de unde rezultă că $f(x_n) \to f(x_0)$. Prin urmare f este continuă în x_0.

3° Fie $x_0 \in A \cap A'$. Atunci f continuă în $x_0 \Leftrightarrow (\forall)\ x_n \in A$, $x_n \to x_0$, rezultă că $f(x_n) \to f(x_0) \Leftrightarrow (\forall)\ x_n \in A \setminus \{x_0\}$, $x_n \to x_0$, rezultă că $f(x_n) \to f(x_0) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Corolar 1. *Fie* $A \subseteq \mathbf{R}$ *o mulțime,* $x_0 \in A \cap A'$ *un punct și* $f : A \to \mathbf{R}$ *o funcție. Atunci* f *continuă în* $x_0 \Leftrightarrow (\forall)\ x_n \in A \setminus \{x_0\}$, $x_n \to x_0$, *rezultă că* $f(x_n) \to f(x_0)$.

Corolar 2. *Fie* $A \subseteq \mathbf{R}$ *o mulțime,* $x_0 \in A \cap A'^b$ *un punct și* $f : A \to \mathbf{R}$ *o funcție. Atunci* f *continuă în* $x_0 \Leftrightarrow f(x_0-)$, $f(x_0+)$ *există și sînt egale cu* $f(x_0) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow f$ *continuă la stînga și la dreapta în* x_0.

Dem. f cont. în $x_0 \overset{5.4.5.}{\Leftrightarrow} \lim_{x \to x_0} f(x)$ există și este egală cu $f(x_0) \Leftrightarrow f(x_0-)$ și $f(x_0+)$ există și sînt egale cu $f(x_0)$.

Observație. Dacă $x_0 \in A \cap A'$, Cor. 2 poate să nu aibă sens, cum este cazul cînd $x_0 \in A \cap A' \setminus A'^b$.

5.5.7. Teoremă. *Fie* $A \subseteq \mathbf{R}$ *o mulțime,* $x_0 \in A$ *un punct și* $f : A \to \mathbf{R}$ *o funcție. Atunci cond.* 1°—3° *sînt echivalente.*

1° f *continuă în* x_0;

2° $(\forall)\ U \in \mathcal{V}(f(x_0))$, $(\exists)\ V \in \mathcal{V}(x_0)$ *a.î.* $f(A \cap V) \subseteq U$;

3° $(\forall)\ \varepsilon > 0$, $(\exists)\ \eta > 0$ *a.î.* $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, $(\forall) x \in A$, $|x - x_0| < \eta$.

Dem. (i) x_0 *punct izolat.* Atunci cond. 1°—3° sînt întotdeauna îndeplinite, independent una de alta. Cond 1° rezultă din T.5.3.5. Cond. 2° rezultă din faptul că $f(A \cap V) \subseteq U$, dacă $V \in \mathcal{V}(x_0)$ și $A \cap V = \{x_0\}$. În fine, fie $\eta > 0$. a.î. $A \cap V_\eta(x_0) = \{x_0\}$, deci $|f(x) - f(x_0)| = 0 < \varepsilon$, $(\forall)\ x \in A$, $|x - x_0| < \eta$ și deci cond. 3° este și ea îndeplinită.

(ii) x_0 *punct neizolat.* Atunci $1° \overset{5.5.6.}{\Leftrightarrow} \text{f cont. în } x_0 \overset{5.3.5.}{\Leftrightarrow} \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \overset{5.2.5.}{\Leftrightarrow}$ $\Leftrightarrow (\forall)\ U \in \mathcal{V}(f(x_0))$, $(\exists)\ V \in \mathcal{V}(x_0)$ a.î. $f(A \cap V \setminus \{x_0\}) \subseteq U \overset{x \to x_0}{\Leftrightarrow} (\forall)\ U \in \mathcal{V}(f(x_0))$, $(\exists)\ V \in \mathcal{V}(x_0)$ a.î. $f(A \cap V) \subseteq U$ (deoarece $f(x_0) \in U$) $\Leftrightarrow 2°$. Analog avem: $1° \overset{5.3.5.\text{cor. } 2}{\Leftrightarrow} \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow (\forall)\ \varepsilon > 0$, $(\exists)\ \eta > 0$ a.î. $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, $(\forall)\ x \in A \setminus \{x_0\}$, $|x - x_0| < \eta \Leftrightarrow (\forall)\ \varepsilon > 0$ $(\exists)\ \eta > 0$ a.î. $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, $(\forall)\ x \in A$, $|x - x_0| < \eta$.

Observația 1. În cond. 2° (T.5.5.7.) putem înlocui $(\forall)\ U \in \mathcal{V}(f(x_0))$ (resp. $(\exists)\ V \in \mathcal{V}(x_0)$) prin: $(\forall)\ U$ (resp. $(\exists)\ V$) dintr-o bază de vecinătăți a lui $f(x_0)$ (resp. x_0).

Observația 2. Mai puțin precis, însă mai expresiv, putem enunța T.5.5.7. astfel: f *continuă (secvențial)* $\Leftrightarrow f$ *continuă cu vecinătăți* $\Leftrightarrow f$ *continuă cu* $\varepsilon \wedge \eta$.

Observația 3. Putem demonstra T.5.5.7. direct, reluînd raționamentul din demonstrația T.5.3.5.

Exemplul 1. *Fie* $f(x) = x^2$, $x \in \mathbf{R}$. *Atunci* f *este continuă.*

Fie $\varepsilon > 0$ și $\eta > 0$ fixați arbitrar. Dacă $|x - x_0| < \eta$ avem $|x + x_0| \leqslant$ $\leqslant |x - x_0| + 2|x_0| \leqslant \eta + 2|x_0|$. Atunci $|f(x) - f(x_0)| = |x - x_0| \cdot |x + x_0| \leqslant$ $\leqslant \eta(\eta + 2|x_0|) = \eta^2 + 2\eta|x_0| \leqslant \varepsilon$, dacă $\eta^2 \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ și $2\eta|x_0| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$.

Așadar $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$, $|x - x_0| < \eta$, unde $\eta = \min\left\{\sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}, \frac{\varepsilon}{4|x_0|}\right\}$, dacă $x_0 \neq 0$ etc.

Exemplul 2. *Fie* $f(x) = x^3$, $x \in \mathbf{R}$. *Atunci* f *este continuă.*

Fie $\varepsilon > 0$ fixat. Evident putem scrie $f(x) - f(x_0) = (x - x_0)(x^2 + xx_0 + x_0^2)$, $(\forall)\ x, x_0 \in \mathbf{R}$. Dacă $|x - x_0| \leq 1$, avem $|x^2 + xx_0 + x_0^2| \leq (|x - x_0| + |x_0|)^2 + (|x - x_0| + |x_0|) \cdot |x_0| + |x_0^2| \leq (1 + |x_0|)^2 + |x_0| + |x_0|^2 + |x_0|^2 = 1 + 3|x_0| + 3|x_0|^2$

Atunci

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |x - x_0| \cdot (1 + 3|x_0| + 3|x_0^2|) < \varepsilon,$$

dacă $|x - x_0| \leq 1$ și $|x - x_0| < \frac{\varepsilon}{1 + 3|x_0| + 3|x_0|^2}$, deci putem lua $\eta' = \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{1 + 3|x_0| + 3|x_0|^2}\right\}$ etc.

5.5.8. Propoziție. *Fie* $A \subseteq \mathbf{R}$ *o mulțime,* $f : A \to \mathbf{R}$ *o funcție și* $x_0 \in A$. *Atunci* f *este continuă în* $x_0 \Leftrightarrow (\exists)\ B, C \subseteq A$ *cu* $B \cup C = A$, $x_0 \in B \cap C$ *a.î.* $f|_B$ *și* $f|_C$ *sînt continue în* x_0.

Dem. Implicația $(\Rightarrow)$ rezultă punînd $B = C = A$.

$(\Leftarrow)$ Fie $U \in \mathfrak{V}(f(x_0))$ fixat. Cum $f|_B$(resp. $f|_C$) este continuă în x_0, $(\exists)\ V_1$ (resp. V_2) $\in \mathfrak{V}(x_0)$ a.î. $f|_B(B \cap V_1) \subseteq U$ (resp. $f|_C(C \cap V_2) \subseteq U$). Atunci $V := V_1 \cap V_2 \in \mathfrak{V}(x_0)$ și $(B \cap V) \cup (C \cap V) = A \cap V$, deci $f(A \cap V) = f|_B(B \cap V) \cup f|_C(C \cap V) \subseteq U$ și deci (T.5.5.7. (2°)) f este continuă în x_0.

5.5.9. Propoziție. *Fie* $A \subseteq \mathbf{R}$ *o mulțime,* $x_0 \in A$ *un punct și* $f : A \to \mathbf{R}$ *o funcție. Atunci* f *este continuă în* $x_0 \Leftrightarrow (\exists)\ V \in \mathfrak{V}(x_0)$ *a.î.* $f|_{A \cap V}$ *este continuă în* x_0.

Dem. $(\Rightarrow)$ Avem $x_0 \in A \cap V \subseteq A$, $(\forall)\ V \in \mathfrak{V}(x_0)$, deci (P. 5.5.5. $f|_{A \cap V}$ este continuă în x_0.

$(\Leftarrow)$ Fie $V \in \mathfrak{V}(x_0)$ cu $f|_{A \cap V}$ continuă în x_0 și $U \in \mathfrak{V}(f(x_0))$ fixat. Atunci (T. 5.5.7. (2°)) $(\exists)\ V_0 \in \mathfrak{V}(x_0)$ a.î. $f|_{A \cap V}(x) \subseteq U$, $(\forall)\ x \in (A \cap V) \cap V_0$, deci $W := V \cap V_0 \in \mathfrak{V}(x_0)$ și avem:

$$f(A \cap W) = f|_{A \cap V}((A \cap V) \cap V_0) \subseteq U,$$

prin urmare f este continuă în x_0.

Corolar 1. *Fie* $A \subseteq \mathbf{R}$ *o mulțime,* $f : A \to \mathbf{R}$ *o funcție și* $D \subseteq A$ *o mulțime deschisă relativ la* A *i.e.* $D = A \cap G$ *cu* G *deschisă în* $\mathbf{R}$. *Atunci* f *este continuă pe* $D \Leftrightarrow f|_D$ *este continuă.*

Corolar 2. *Fie* $A \subseteq \mathbf{R}$ *o mulțime și* $f : A \to \mathbf{R}$ *o funcție. Atunci* f *este continuă pe* $A \Leftrightarrow (\exists)\ B, C \subseteq A$ *închise (resp. deschise) relativ la* A *cu* $A = B \cup C$ *a.î.* $f|_B$ *și* $f|_C$ *sînt continue.*

Dem. $(\Rightarrow)$ Punem $B = C = A$.

$(\Leftarrow)$ B fiind închisă relativ la A, avem că $A \setminus B$ este deschisă relativ la A. Cum $A \setminus B \subseteq C$ și $f|_C$ este continuă, rezultă că $f_{A \setminus B}$ este continuă, deci f este continuă pe $A \setminus B$. Analog f este continuă pe $A \setminus C$. Din P. 5.5.5. avem f continuă pe $B \cap C$. Prin urmare f este continuă pe $(A \setminus B) \cup (A \setminus C) \cup (B \cap C) = A$.

Corolar 3. *Fie* $I_1, I_2 \subseteq \mathbf{R}$ *două intervale disjuncte,* $f : I_1 \cup I_2 \to \mathbf{R}$ *o funcție și* $f_k := f|_{I_k} (k = \overline{1,2})$. *Atunci:*

1° *Dacă* $\sup I_1 < \inf I_2$ *și* $x_0 \in I_k$, *rezultă:* f *continuă în* $x_0 \Leftrightarrow f_k$ *continuă în* x_0:

2° *Dacă* $\sup I_1 = \inf I_2 = c$ *și* $x_0 \in I_k \setminus \{c\}$, *rezultă:* f *continuă în* $x_0 \Leftrightarrow f_k$ *continuă în* x_0;

3° *Dacă* $\sup I_1 = \inf I_2 = c$, *rezultă* : f *continuă în* $c \Leftrightarrow (\exists)\ f_1(c-)$, $(\exists)\ f_2(c+)$ *și* $f_1(c-) = f_2(c+) = f(c)$.

Exemple.

1. *Fie* $f(x) = E(x)$, $x \in \mathbf{R}$. *Atunci* f *este continuă pe* $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$.

Fie $D = (n, n+1)$ cu $n \in \mathbf{Z}$ fixat. Atunci D este deschisă în $\mathbf{R}$ și $f|_D$ fiind constantă, este continuă, prin urmare f este continuă pe D etc.

2. *Fie* $f : [-\pi, \pi] \to \mathbf{R}$ *definită astfel* $f(x) = \sin x$, $(\forall)\ x \in [-\pi, 0]$ *și* $f(x) = \cos x$, $(\forall)\ x \in (0, \pi]$. *Atunci* f *este continuă pe* $[-\pi, \pi] \setminus \{0\}$.

Fie $A = [-\pi, \pi]$, $B = [-\pi, 0)$ și $C = (0, \pi]$. Observăm că B și C sînt deschise relativ la A iar $f|_B = \sin|_B$ și $f|_C = \cos|_C$ sînt evident continue, deci f este continuă pe B și pe C.

5.5.10. Propoziție. *Fie* $A \subseteq \mathbf{R}$ *o mulțime,* $x_0 \in A \cap A'$ *un punct și* $f : A \to \mathbf{R}$ *o funcție. Atunci cond.* 1°—3° *sînt echivalente* :

1° f *continuă în* x_0 ;

2° $(\exists)\ B, C \subseteq A$ *cu* $B \cup C = A$, $x_0 \in B' \cap C'$ *și* $\lim\limits_{x \to x_0} f|_B(x) = \lim\limits_{x \to x_0} f|_C(x) = f(x_0)$;

3° $(\exists)\ B, C \subseteq A$ *cu* $B \cup C = A$, $x_0 \in B' \cap C'$ *și cu proprietatea* : $(\forall)\ x_n \in B$, $x_n \to x_0$ *și* $(\forall)\ y_n \in C$, $y_n \to x_0$, *rezultă că* $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = \lim\limits_{n \to \infty} f(y_n) = f(x_0)$

Dem. 1° $\Rightarrow$ 2°. Fie $B, C \subseteq A$ cu $B \cup C = A$ și $x_0 \in B' \cap C'$; asemenea mulțimi evident există. Atunci $\lim\limits_{x \to x_0} f|_B(x) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ și analog $\lim\limits_{x \to x_0} f|_C(x) = f(x_0)$ etc.

2° $\Rightarrow$ 1°. Fie B, $C \subseteq A$ cu proprietățile din enunț. Fie $\varepsilon > 0$. Atunci $(\exists)$ V_1, $V_2 \in \mathcal{V}(x_0)$ a.î.

$$\left.\begin{aligned} |f|_B(x) - f(x_0)| < \varepsilon, \quad (\forall) \quad x \in B \cap V_1 \setminus \{x_0\} \\ |f|_C(x) - f(x_0)| < \varepsilon, \quad (\forall) \quad x \in C \cap V_2 \setminus \{x_0\} \end{aligned}\right| \tag{1}$$

Punem $V := V_1 \cap V_2$ și observăm că $V \in \mathcal{V}(x_0)$. Cum $B \cup C = A$, avem $A \cap V \subseteq (B \cap V_1) \cup (C \cap V_2)$, deci din (1) rezultă

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon, (\forall)\ x \in A \cap V \setminus \{x_0\},$$

prin urmare (T.5.5.7. (3°)) f continuă în x_0.

2° $\Leftrightarrow$ 3°. Evident (cf. T.5.5.6. (2°)).

Corolar 1. *Fie* $A \subseteq \mathbf{R}$ *o mulțime,* $x_0 \in A \cap A'$ *un punct și* $f : A \to \mathbf{R}$ *o funcție. Atunci* f *continuă în* $x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f|_{A \cap \mathbf{Q}}(x) = \lim\limits_{x \to x_0} f|_{A \setminus \mathbf{Q}}(x) = f(x_0) \Leftrightarrow (\forall)$ $x_n \in A \cap \mathbf{Q}$, $x_n \to x_0$ *și* $(\forall)\ y_n \in A \setminus \mathbf{Q}$, $y_n \to x_0$, *rezultă că* $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = \lim\limits_{n \to \infty} f(y_n) = f(x_0)$.

5.5.11. Definiție. Fie $A \subseteq \mathbf{R}$ o mulțime, $x_0 \in A$ un punct, $\mathcal{V} = \mathcal{V}(x_0)$ și $f : A \to \mathbf{R}$ o funcție. Numărul $\inf\limits_{V \in \mathcal{V}} (\text{dia}\,(f(A \cap V)))$ se numește *oscilația lui* f *în* x_0 și se notează $\omega_f(x_0)$. Se numește *oscilația lui* f *pe mulțimea* $A_0 \subseteq A$ și se notează cu $\omega_f(A_0)$ numărul dia $f(A_0)$ i.e. $\omega_f(A_0) = \sup\limits_{x, y \in A_0} |f(x) - f(y)|$.

Din D.5.5.11. rezultă imediat afirmațiile.

1° $(\forall)\ A_0 \subseteq A_1 \subseteq A$, avem : $\omega_f(A_0) \leqslant \omega_f(A_1)$;

2° $\omega_f(A_0) = \sup f(A_0) - \inf f(A_0)$;

3° $\omega_f(x_0) = \inf\limits_{V \in \mathcal{V}} \omega_f(A \cap V) = \inf\limits_{\varepsilon > 0} (\text{dia}\,(f(A \cap V_\varepsilon(x_0))) =$

$$= \inf_{\varepsilon > 0} (\sup f(A \cap V_\varepsilon(x_0)) - \inf f(A \cap V_\varepsilon(x_0)))$$

Observație. Oscilația punctată a lui f în x_0 a fost definită pentru $x_0 \in A'\,[\overline{\mathbf{R}}]$ în timp ce *oscilația* lui f în x_0 a fost definită pentru $x_0 \in A$. Așadar, cele două concepte diferă între ele (v. Exemple).

Exemple.

1. Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ funcția caracteristică a mulțimii $\{0\}$. Atunci $\hat{\omega}_f(0) = 0$ și $\omega_f(0) = 1$.

2. Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definită astfel $f(x) = x^3$. Atunci

$$\omega_f(0) = \inf_{\varepsilon>0} \left(\sup_{x,y \in V_\varepsilon(0)} |x^3 - y^3|\right) = \inf_{\varepsilon>0} 2\varepsilon^3 = 0$$

și analog $\hat{\omega}_f(0) = 0$.

3. Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ funcția lui Dirichlet. Atunci $(\forall)\ I \subseteq \mathbf{R}$ un interval nedegenerat, avem $\omega_f(I) = 1$.

5.5.12. Propoziție. *Fie $A \subseteq \mathbf{R}$ o mulțime, $x_0 \in A$ (resp. $A \cap A'$) un punct și $f : A \to \mathbf{R}$ o funcție. Atunci cond.* 1°—3° (*resp.* 1°—4°) *sînt echivalente* :

1° *f continuă în x_0* ;

2° $(\forall)\ \varepsilon > 0$, $(\exists)\ \eta > 0$ *a.î.* $|f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon$, $(\forall)\ x, y \in A \cap V_\eta(x_0)$;

3° $\omega_f(x_0) = 0$;

4° $\overline{\lim_{x \to x_0}} f(x) = \underline{\lim_{x \to x_0}} f(x) = f(x_0)$

Dem. 1°⇔4°. Dacă $x_0 \in A \cap A'$, avem : f continuă în $x_0 \overset{5.5.6.}{\Leftrightarrow} \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \overset{5.3.9.}{\Leftrightarrow} \overline{\lim_{x \to x_0}} f(x) = \underline{\lim_{x \to x_0}} f(x) = f(x_0)$.

(i) *x_0 punct izolat.* Atunci cond. 1°—3° sînt întotdeauna îndeplinite : 1° rezultă din T.5.5.6.(1°) ; 2° rezultă pentru $\eta > 0$ care are proprietatea că $A \cap V_\eta(x_0) = \{x_0\}$; 3° rezultă din faptul că $\omega_f(x_0) \leqslant \operatorname{dia} f(A \cap V) = 0$, dacă $V \in \mathcal{V}(x_0)$ și $A \cap V = \{x_0\}$.

(ii) *x_0 punct neizolat* i.e. $x_0 \in A \cap A'$. Atunci $1° \overset{5.5.7.}{\Leftrightarrow} (\forall)\ \varepsilon > 0$, $(\exists)\ \eta > 0$ a.î. $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon/2, (\forall)\ x \in A \cap V_\eta(x_0) \Rightarrow (\forall)\ \varepsilon > 0, (\exists)\ \eta > 0$ a.î. $|f(x) - f(y)| \leqslant |f(x) - f(x_0)| + |f(x_0) - f(y)| < \varepsilon$, $(\forall)\ x, y \in A \cap V_\eta(x_0)$.
Așadar 1° ⇒ 2°. Evident 2° ⇒ 1° : luăm în 2° y egal cu x_0 și aplicăm T.5.5.7.(3°).

3° ⇔ $(\forall)\ \varepsilon > 0$, $(\exists)\ V \in \mathcal{V}(x_0)$ a.î. $\operatorname{dia} f(A \cap V) \leqslant \varepsilon \Leftrightarrow (\forall)\ x > 0$, $(\exists)\ \eta > 0$ a.î. $|f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon$, $(\forall)\ x, y \in A \cap V_\eta(x_0) \Leftrightarrow 2°$.

5.5.13. Teoremă. *Fie $A \subseteq \mathbf{R}$ o mulțime și $f : A \to \mathbf{R}$ o funcție. Atunci cond.* 1°—3° *sînt echivalente* :

1° *f continuă (pe A)* ;

2° $(\forall)\ G \subseteq \mathbf{R}$ *deschisă, avem $f^{-1}(G)$ deschisă relativ la A* ;

3° $(\forall)\ F \subseteq \mathbf{R}$ *închisă, avem $f^{-1}(F)$ închisă relativ la A.*

Dem. 1⇒2°. Fie $G \subseteq \mathbf{R}$ deschisă și $A_0 := f^{-1}(G)$. Atunci $(\forall)\ x \in A_0$, avem $f(x) \in G$, deci $G \in \mathcal{V}(f(x))$ și deci $(\exists)\ V_x \in \mathcal{V}(x_0)$ cu $f(A \cap V_x) \subseteq G$; evident putem presupune V_x deschisă, luînd V_x în loc de V_x. Mulțimea $D := \bigcup_{x \in A_0} V_x$ este deschisă (P.5.1.24.(3°)) și avem :

$$f(A \cap D) = f\left(\bigcup_{x \in A_0} (A \cap V_x)\right) = \bigcup_{x \in A_0} f(A \cap V_x) \subseteq G,$$

deci

$$A_0 \subseteq A \cap D \subseteq f^{-1}(G) = A_0$$

și deci $A_0 = A \cap D$ este deschisă relativ la A.

$2°\Rightarrow 3°$. Fie $F \subseteq \mathbf{R}$ închisă fixată, deci $\complement F$ este deschisă și deci $f^{-1}(\complement F)$ este deschisă relativ la A. Atunci $\complement_A(f^{-1}(\complement F))$ este închisă relativ la A, deci (P.1.2.12.(4°)) $f^{-1}(F) = \complement_A(f^{-1}(\complement F))$ este închisă relativ la A.

$3°\Rightarrow 2°$ Se arată în mod analog.

$2°\Rightarrow 1°$ Fie $x_0 \in A$ și $U \in \mathcal{V}(f(x_0))$ fixați. Mulțimea $\mathring{U}$ fiind deschisă, rezultă din ipoteza că $f^{-1}(\mathring{U})$ este deschisă relativ la A, deci $(\exists)\ V \subseteq \mathbf{R}$ deschisă cu $A \cap V = f^{-1}(\mathring{U})$. Deoarece $x \in V = \mathring{V}$, avem $V \in \mathcal{V}(x)$. Și fiindcă $f(A \cap V) = f(f^{-1}(\mathring{U})) \subseteq \mathring{U} \subseteq U$, conchidem (T.5.5.7.(2°)) că f este continuă în x_0, prin urmare pe A.

Corolar 1. *Fie $A \subseteq \mathbf{R}$ o mulțime și $f : A \to \mathbf{R}$ o funcție. Atunci f este continuă (pe A) $\Leftrightarrow$ $(\forall)\ J \subseteq \mathbf{R}$ un interval deschis, rezultă că $f^{-1}(J)$ este o mulțime deschisă relativ la A.*

Dem. ($\Leftarrow$) Fie $G \subseteq \mathbf{R}$ o mulțime deschisă. Atunci $(\exists)\ (J_i)_{i\in I}$ o familie de mulțimi deschise a.î. $G = \bigcup_{i\in I} J_i$, deci $f^{-1}(G) = \bigcup_i f(J_i)$ este o mulțime deschisă relativ la A, prin urmare (T.5.5.13.(2°)) f este continuă.

Corolar 2. *Fie $A \subseteq \mathbf{R}$ o mulțime și $f : A \to \mathbf{R}$ o funcție. Atunci* 1° *f este continuă (pe A)* $\Leftrightarrow$ 2° $(\forall)\ \alpha \in \mathbf{R}$, *mulțimile $\{x \in A\,;\, f(x) < \alpha\}$ și $\{x \in A\,;\, f(x) > \alpha\}$ sînt deschise relativ la A* $\Leftrightarrow$ 3° $(\forall)\ \alpha \in \mathbf{R}$ *mulțimile $\{x \in A\,;\, f(x) \geqslant \alpha\}$ și $\{x \in A\,;\, f(x) \leqslant \alpha\}$ sînt închise relativ la A.*

Dem. $1°\Rightarrow 2°$. f fiind continuă și mulțimea $(-\infty, \alpha)$ deschisă, rezultă (T.5.5.13.(2°)) că mulțimea $\{x \in A\,;\, f(x) < \alpha\} = f^{-1}((-\infty, \alpha))$ este deschisă etc.

$2°\Rightarrow 1°$ Fie $J := (\alpha, \beta) \subseteq \mathbf{R}$ fixat. Atunci $J = (-\infty, \beta) \cap (\alpha, \infty)$, deci $f^{-1}(J) = f^{-1}((-\infty, \beta)) \cap f^{-1}((\alpha, \infty))$ este o mulțime deschisă. Aplicăm mai departe Cor. 1.

$2°\Leftrightarrow 3°$. Rezultă evident, prin trecere la complementară.

5.5.14. Propoziție. *Fie $A \subseteq \mathbf{R}$ o mulțime, $x_0 \in A$ un punct și $f : A \to \mathbf{R}$ continuă în x_0. Dacă $f(x_0) < \alpha$ (resp. $> \alpha$), atunci $(\exists)\ V \in \mathcal{V}(x_0)$ a.î. $f(x) < \alpha$ (resp. $> \alpha$), $(\forall)\ x \in A \cap V$.*

Dem. Fie $\varepsilon > 0$ cu $f(x_0) + \varepsilon < \alpha$. Atunci (T.5.5.7.) $(\exists)\ V \in \mathcal{V}(x_0)$ a.î. $|f(x) - f(x_0)| \leqslant \varepsilon$, $(\forall)\ x \in A \cap V$, deci

$$f(x) \leqslant f(x_0) + \varepsilon < \alpha,\ (\forall)\ x \in A \cap V$$

Corolar 1. *În același cadru: dacă $|f(x_0)| < \alpha$ (resp. $> \alpha$), atunci $(\exists)$ $V \in \mathcal{V}(x_0)$ a.î. $|f(x)| < \alpha$ (resp. $> \alpha$), $(\forall)\ x \in A \cap V$.*

5.5.15. Propoziție. *Fie $I \subseteq \mathbf{R}$ un interval și $f : I \to \mathbf{R}$ o funcție local constantă. Atunci f este constantă.*

Dem. Fie $x \in I$ fixat. Cf. ipotezei $(\exists)\ V \in \mathcal{V}(x)$ cu proprietatea că $f|_{A\cap V}$ este constantă, deci continuă și deci (P.5.5.9.) f este continuă în x, prin urmare pe I. Fie $a, b \in I$, $a < b$, fixați și $A := \{x \in [a, b]\,;\, f|_{[a,x]} = f(a)\}$. Evident $A \neq \emptyset$; punem $c = \sup A$. Din P.2.3.22.(1°) rezultă că $(\exists)\ x_n \in A$, $x_n \to c$, deci $f(x_n) = f(a)$, $(\forall)\ n \geqslant 1$. Cum f este continuă, avem $f(c) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$, deci $c \in A$. Dacă $c < b$, $(\exists)\ \delta > 0$ a.î. $I_c = [c - \delta, c + \delta] \subseteq [a, b]$ și $f|_{I_c}$ constantă, de unde rezultă imediat că $f|_{[a,c+\delta]} = f(a)$, deci $c + \delta \in A$ și deci $c = \sup A \geqslant c + \delta$, absurd. Rămîne că $c = b$, deci $f(b) = f(c) = f(a)$ și deci f este constantă.

5.5.16. Teoremă (Bolzano): *Fie $I \subseteq \mathbf{R}$ un interval și $f : I \to \mathbf{R}$ o funcție continuă. Atunci $f(I)$ este interval.*

Dem. Fie $y_1, y_2 \in J := f(I)$, $y_1 < y_2$ și $y_1 < \lambda < y_2$, fixați. Evident $(\exists)\ a, b \in I$ cu $f(a) = y_1$ și $f(b) = y_2$; presupunem $a < b$. Considerăm mulțimea $A := \{x \in [a, b]\,;\, f(x) \leqslant \lambda\}$ și fie $c = \sup A$. Din P.2.3.22.(1°) rezultă că $(\exists)$

$(\exists) x_n \in A$ cu $x_n \to c$, deci $f(x_n) \leqslant \lambda$, $(\forall)\ n \geqslant 1$ și cum f este continuă în c, avem (P.2.3.17.Cor.1.) $f(c) = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) \leqslant \lambda$. Deoarece $\lambda < f(b)$, avem $c < b$. Evident $f(x) \geqslant \lambda$. $(\forall)\ x \in (c, b]$. Fie $z_n \in (c, b)$, $z_n \to c$, fixat. Atunci $f(z_n) \geqslant \lambda$, $(\forall)\ n \geqslant 1$, deci (P.2.3.17.Cor.1) $f(c) = \lim\limits_{n\to\infty} f(z_n) \geqslant \lambda$. Din $f(c) \leqslant \lambda$ și $f(c) \geqslant \lambda$ deducem că $\lambda = f(c) \in J$. Așadar $[y_1, y_2] \subseteq J$, prin urmare (P.2.2.13.(2°)) J este interval.

Corolar 1. *Fie $I \subseteq \mathbf{R}$ un interval și $f: I \to \mathbf{R}$ continuă. Atunci f are proprietatea Darboux.*

Dem. Fie $J \subseteq I$ un interval. Atunci (T.5.5.16.) $f(J)$ este interval, deci (P.4.3.5.) f are proprietatea Darboux.

Corolar 2. *Fie $I \subseteq \mathbf{R}$ un interval și $f: I \to \mathbf{R}$ continuă. Dacă $x_1, x_2 \in I$ și $f(x_1) \cdot f(x_2) < 0$, atunci există cel puțin un punct c cuprins între x_1 și x_2 a.î. $f(c) = 0$.*

Corolar 3. *Fie $I \subseteq \mathbf{R}$ un interval și $f: I \to \mathbf{R}$ continuă. Dacă $f(x) \neq 0$ $(\forall)\ x \in I$, atunci $f > 0$ sau $f < 0$.*

Dem. Rezultă din Cor. 2.

Corolar 4. *Ecuația $x^n - a = 0$ $(a \geqslant 0,\ n \geqslant 1)$ admite cel puțin o soluție (rădăcină) reală.*

Dem. Fie $f(x) = x^n - a$, $x \in \mathbf{R}$. Evident f este continuă și avem:

$$f(0) = -a < 0 \quad \text{și} \quad f(a + 1) = (1 + a)^n - a > 1 + na - a > 0.$$

Atunci (Cor. 2), $(\exists)\ x_0 \in (0, a + 1)$ cu $f(x_0) = 0$, deci $x_0^n - a = 0$.

Observație. Dacă I nu este interval, atunci Cor. 1—3 nu sînt numaidecît adevărate.

Contraexemplu. $f: \mathbf{R}^* \to \mathbf{R}$, $f(x) = -1$, $(\forall)\ x < 0$ și $f(x) = 1$, $(\forall)\ x > 0$.

5.5.17. Teoremă. *Fie $A \subseteq \mathbf{R}$ o mulțime compactă și $f: A \to \mathbf{R}$ o funcție continuă. Atunci $f(A)$ este compactă.*

Dem. 1. Fie $(G_i)_{i\in I}$ o familie de mulțimi deschise în $\mathbf{R}$, care acoperă $f(A)$, deci $\bigcup\limits_i G_i \supseteq f(A)$. Atunci (T.5.5.13.(2°)) $(\forall)\ i \in I$, mulțimea $f^{-1}(G_i)$ este deschisă relativ la A, deci $f^{-1}(G_i) = A \cap D_i$, cu D_i deschisă în $\mathbf{R}$. Evident avem:

$$\bigcup_i D_i \supseteq \bigcup_i f^{-1}(G_i) = f^{-1}\Big(\bigcup_i G_i\Big) \supseteq f^{-1}(f(A)) = A,$$

deci $(D_i)_{i\in I}$ este o acoperire deschisă a lui A. Cum A este compactă, $(\exists)\ J \subseteq I$ finită a.î. $\bigcup\limits_{j\in J} D_j \supseteq A$, deci $A = \bigcup\limits_{j\in J} (A \cap D_j)$ și deci

$$f(A) = \bigcup_{j\in J} f(A \cap D_j) = \bigcup_{j\in J} f(f^{-1}(G_j)) \subseteq \bigcup_{j\in J} G_j$$

Așadar orice familie deschisă care acoperă $f(A)$ posedă o subfamilie finită care acoperă $f(A)$, prin urmare $f(A)$ este compactă.

Dem. 2. Fie $(y_n)_{n\geqslant 1}$ un șir cu elemente din $f(A)$. Atunci $(\exists)\ (x_n)_{n\geqslant 1}$ un șir cu elemente din A a.î. $f(x_n) = y_n$, $(\forall)\ n \geqslant 1$. A fiind compactă, este secvențial compactă (T.5.2.9.), deci șirul $(x_n)_{n\geqslant 1}$ posedă un subșir convergent $(x_{n_k})_{k\geqslant 1}$ către un punct c din A. Cum f este continuă, avem:

$$\lim_{k\to\infty} y_{n_k} = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(c) \in f(A)$$

Așadar $f(A)$ este secvențial compactă, deci (T.5.2.9.) compactă.

Dem. 3. Arătăm că $f(A)$ este închisă și mărginită.

Fie $y \in \overline{f(A)}$ fixat. Atunci $(\exists)\ (x_n)_{n\geqslant 1}$ un șir cu elemente din A cu proprietatea că $f(x_n) \to y$ (P.5.1.14.(3°)). A fiind compactă, șirul $(x_n)_{n\geqslant 1}$ posedă un

subșir convergent $(x_{n_k})_{k\geqslant 1}$ către un punct $x \in A$. Cum f este continuă avem : $y = \lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x) \in f(A)$, deci $\overline{f(A)} \subseteq f(A)$ și deci $f(A)$ este închisă.

Presupunem că $f(A)$ nu este mărginită. Atunci $(\forall)\, n \geqslant 1$, $(\exists)\, x_n \in A$ cu $|f(x_n)| \geqslant n$. Ca mai sus, șirul $(x_n)_{n\geqslant 1}$ posedă un subșir convergent $(x_{n_k})_{k\geqslant 1}$ către un punct $x \in A$. Trecînd la limită în relația $|f(x_{n_k})| \geqslant n_k$, $(\forall)\, k \geqslant 1$, obținem $|f(x)| = \lim\limits_{k\to\infty} |f(x_{n_k})| = \infty$, absurd. Rămîne că $f(A)$ este mărginită.

Corolar 1 (K. Weierstrass). *Fie $A \subseteq \mathbf{R}$ o mulțime compactă și $f : A \to \mathbf{R}$ o funcție continuă. Atunci f este mărginită și își atinge marginile.*

Dem. Mulțimea $f(A)$ fiind compactă (T.5.5.17.), este mărginită și închisă (T.5.2.6.), deci f este mărginită și (P.5.1.16.(3°)) $\sup f(A) \in f(A)$, $\inf f(A) \in f(A)$. Aceasta înseamnă că $(\exists)\, x_0, x_1 \in A$ cu $f(x_0) \leqslant f(x) \leqslant f(x_1)$, $(\forall)\, x \in A$ etc.

Corolar 2. *Fie $I \subseteq \mathbf{R}$ un interval compact și $f : I \to \mathbf{R}$ o funcție continuă. Atunci $f(I)$ este un interval compact, deci $(\exists)\, x_0, x_1 \in I$ a.î. $f(I) = [f(x_0), f(x_1)]$.*

Dem. Din Cor. 1 rezultă că $(\exists)\, x_0, x_1 \in I$ a.î. $f(x_0) \leqslant f(x) \leqslant f(x_1)$, $(\forall)\, x \in I$. Cum $f(I)$ este un interval (cf. T.5.5.16), rezultă că $f(I) = [f(x_0), f(x_1)]$.

5.5.18. Teoremă. *Fie $A \subseteq \mathbf{R}$ o mulțime și $f : A \to \mathbf{R}$ o funcție monoton crescătoare. Atunci :*

1° *Dacă $x_0 \in A'^s$ (resp. A'^d), rezultă că $f(x_0-)$ (resp. $f(x_0+)$ există și avem :*

$$f(x_0) = \sup_{A\ni x<x_0} f(x) \ (\text{resp. } f(x_0+) = \inf_{A\ni x>x_0} f(x))$$

2° *Dacă $x_0 \in A \cap A'^s$ (resp. $A \cap A'^d$), rezultă că $f(x_0-)$ (resp. $f(x_0+)$) există, sînt finite, și avem :*

$$f(x_0-) = \sup_{A\ni x<x_0} f(x) \leqslant f(x_0) \ (\text{resp. } f(x_0+) = \inf_{A\ni x>x_0} f(x) \geqslant f(x_0))$$

Dem. 1° Fie $l_{x_0} = \sup\limits_{A\ni x<x_0} f(x)$ și $c < l_{x_0}$ fixat. Atunci $(\exists)\, I \ni x_1 < x_0$ cu $f(x_1) \geqslant c$, deci

$$c < f(x_1) \leqslant f(x) \leqslant l_{x_0},\ (\forall)\, x \in (x_1, x_0)$$

și deci (P.5.3.14.Cor.1) $\lim\limits_{x\nearrow x_0} f(x) = l_{x_0}$, prin urmare $l_{x_0} = f(x_0-)$.

2° Deoarece $f(x) \leqslant f(x_0)$, $(\forall)\, I \ni x < x_0$, rezultă

$$f(x_0-) = \sup_{A\ni x<x_0} f(x) \leqslant f(x_0) < +\infty$$

Corolar 1. *Fie $A \subseteq \mathbf{R}$ o mulțime, $f : A \to \mathbf{R}$ o funcție monoton crescătoare (resp. descrescătoare). Atunci*

1° $(\forall)\, x_0 \in A'^b$, *avem $f(x_0-) \leqslant f(x_0) \leqslant f(x_0+)$ (resp. $f(x_0-) \geqslant f(x_0+)$), deci f are limita (finită) în $x_0 \Leftrightarrow f(x_0-) = f(x_0+)$;*

2° $(\forall)\, x_0 \in A \cap A'^b$, *avem $f(x_0-) \leqslant f(x_0+)$ (resp. $f(x_0-) \geqslant f(x_0) \geqslant f(x_0+)$), deci f continuă în $x_0 \Leftrightarrow f(x_0-) = f(x_0+)$;*

3° $(\forall)\, x_0 \in A'^s$ (resp. A'^d), *avem $f(x_0-) = l$ (resp. $f(x_0+) = l$) $\Leftrightarrow (\exists)\, x_n \in A \setminus \{x_0\}$, $x_n \nearrow x_0$ (resp. $x_n \searrow x_0$) a.î. $f(x_n) \to l$.*

Corolar 2. *Fie $I \subseteq \mathbf{R}$ un interval și $f : I \to \mathbf{R}$ o funcție monotonă. Atunci f are numai discontinuități de prima speță și acestea formează o mulțime cel mult numerabilă.*

Dem. Fie $a = \inf I$ și $b = \sup I$. Dacă $x_0 \in I \setminus \{a\}$ (resp. $I \setminus \{b\}$), avem $x_0 \in I \cap I'^s$ (resp. $x_0 \in I \cap I'^d$), deci $f(x_0-)$ (resp. $f(x_0+)$) există și sînt finite (T.5.5.18.). Aceasta înseamnă că f are numai discontinuități de prima speță.

Presupunem mai departe f monoton crescătoare și să notăm cu D mulțimea discontinuităților lui f. Să punem $J_x := (f(x-), f(x+))$, dacă $x \in D \setminus \{a, b\}$, $J_a := (f(a-), f(a+)$, dacă $a \in D$ și $J_b := (f(b-), f(b))$, dacă $b \in D$. Obținem astfel o familie $\mathfrak{I} = (J_x)_{x \in D}$ de intervale deschise, disjuncte două cîte două. Într-adevăr, $(\forall)\ x_1, x_2 \in D$, $x_1 < x_2$, avem :

$$f(x_1 +) = \inf_{x_1 < x < x_2} f(x) \leqslant \sup_{x_1 < x < x_2} f(x) = f(x_2+),$$

deci $J_{x_1} \cap J_{x_2} = \emptyset$. Atunci funcția $D \ni x \mapsto J_x \in \mathfrak{I}$ este bijectivă și cum $\mathfrak{I}$ este cel mult numerabilă (P.5.1.10.), conchidem că D este cel mult numerabilă.

Corolar 3. *Fie $I \subseteq \mathbf{R}$ un interval, $a = \inf I$, $b = \sup I$ și $f : I \to \mathbf{R}$ o funcție monoton crescătoare. Atunci :*

1° $(\forall)\ x, y \in I$, $x < y$, *rezultă că $f(x+)$, $f(y-)$ există și avem : $f(x+) \leqslant f(x) \leqslant f(y) \leqslant f(y-)$;*

2° $f \geqslant 0$ *(resp. $\leqslant 0$) $\Leftrightarrow f(a+) \geqslant 0$ (resp. $f(b-) \leqslant 0$) ;*

3° *Dacă $x_0 \in I \setminus \{a\}$ (resp. $x_0 \in I \setminus \{b\}$), avem $f(x_0+) = l$ (resp. $f(x_0-) = l$) $\Leftrightarrow (\exists)/(\forall)\ x_n \in I \setminus \{x_0\}$, $x_n \nearrow x_0$ (resp. $x_n \searrow x_0$) a.î. $f(x_n) \to l$.*

5.5.19. Teoremă. *Fie $I \subseteq \mathbf{R}$ un interval și $f : I \to \mathbf{R}$ o funcție monotonă a.î. $f(I)$ este interval, în particular f are proprietatea Darboux. Atunci f este continuă.*

Dem. Presupunem f monoton crescătoare. Fie $a = \inf I$, $b = \sup I$ și fie $x_0 \in I \setminus \{a\}$ fixat. Atunci (T.5.5.18.) $f(x_0-)$ există și avem relația : $f(x_0-) = \sup_{I \ni x < x_0} f(x) \leqslant f(x_0)$. Presupunem că $f(x_0-) < f(x_0)$ și fie $f(x_0-) < y < f(x_0)$ fixat. Deoarece $J := f(I)$ este un interval, rezultă imediat că $y \in J$, deci $(\exists)\ x_1 \in I \setminus \{x_0\}$ cu $f(x_1) = y$. Dacă $x_1 < x_0$, avem $f(x_1) \leqslant \sup_{I \ni x < x_0} f(x) = f(x_0-)$, deci $y \leqslant f(x_0-) < y$, absurd. Dacă $x_1 > x_0$, avem că $x_0 \neq b$, deci (T.5.5.18.) $f(x_1) \geqslant \inf_{I \ni x > x_1} f(x) = f(x_0+) \geqslant f(x_0)$ și deci $y = f(x_1) \geqslant f(x_0) > y$, absurd. Rămîne că $f(x_0-) = f(x_0)$, deci f este continuă la stînga în x_0.

Analog se arată că $f(x_0+) = f(x_0)$, $(\forall)\ x \in I \setminus \{x_0\}$, prin urmare f este continuă pe I.

Corolar 1. *Fie $I, J \subseteq \mathbf{R}$ două intervale și $f : I \to J$ o funcție monotonă surjectivă. Atunci f este continuă.*

Corolar 2. *Fie $I, J \subseteq \mathbf{R}$ două intervale și $f : I \to J$ o funcție. Atunci cond. 1°—3° sînt echivalente : 1° f omeomorfă ; 2° f strict monotonă și surjectivă ; 3° f continuă și bijectivă.*

Dem. 1°⇒3° Evident.

3°⇒2° f fiind continuă are proprietatea Darboux (T.5.5.16.Cor.1) Cum f este injectivă, rezultă (P.4.3.4.) f strict monotonă.

2°⇒1°. Funcțiile $f : I \to J$ și $f^{-1} : J \to I$ fiind strict monotone și surjective, sînt (T.5.5.19.Cor.1) continue, deci f omeomorfă.

Corolar 3. *Fie $I \subseteq \mathbf{R}$ un interval și $f : I \to \mathbf{R}$ o funcție. Atunci cond. 1°—3° sînt echivalente : 1° f omeomorfism pe imagine ; 2° f strict monotonă și $f(I)$ interval ; 3° continuă și injectivă.*

Dem. Punem $J := f(I)$ și aplicăm Cor. 2 și T.5.5.16.

Corolar 4. *Fie $I \subseteq \mathbf{R}$ un interval și $f : I \to \mathbf{R}$ o funcție cu proprietatea Darboux (resp. continuă). Atunci cond. 1°—2° (resp. 1°—3°) sînt echivalente : 1° f omeomorfism pe imagine ; 2° f strict monotonă ; 3° f injectivă.*

Dem. Punem $J := f(I)$ și aplicăm Cor.3 și T.5.5.16.

Observația 1. Dacă I și J sînt două intervale omeomorfe între ele și I este închis, deschis, semideschis, resp. nemărginit, atunci J este de aceeași formă.

Observația 2. Dacă I nu este interval, Cor.2 nu este numaidecît adevărat.

Contraexemplu. Fie $A = [-2, -1] \cup \{0\} \cup [1, 2], J = [-1, 1]$ și $f : A \to J$ definită astfel : $f(x) = x + 1$, $(\forall)\ x \in [-2, -1]$, $f(0) = 0$ și $f(x) = x - 1$, $(\forall)\ x \in [1, 2]$. Atunci f este continuă, strict monotonă, surjectivă și totuși f^{-1} este discontinuă în 0.

5.5.20. Propoziție. *Fie $I \subseteq \mathbf{R}$ un interval, $a = \inf I$, $b = \sup I$ și $f : I \to \mathbf{R}$ o funcție cu proprietatea Darboux. Atunci* $(\forall)\ x_0 \in I \setminus \{a\}$ *(resp.* $I \setminus \{b\}$*),* $(\exists)\ x_n \in I$, $x_n \nearrow x_0$ *(resp.* $x_n \searrow x_0$*) a.î.* $f(x_n) \to f(x_0)$.

Dem. Fie $x_0 \in I \setminus \{a\}$ fixat și $r_n \searrow 0$ cu proprietatea că $I_n := (x_0 - r_n, x_0) \subseteq I$, $(\forall)\ n \geqslant 1$. Deoarece f are P.D., rezultă (P.4.3.4.(2°) că $f(I_n)$ și $f(I_n \cup \{x_0\})$ sînt intervale, evident care diferă între ele cel mult prin punctul $y_0 := f(x_0)$. Atunci $(\forall)\ n \geqslant 1$, avem că $y_0 \in f(I_n)$ sau y_0 este un capăt al lui $f(I_n)$, deci $(\exists)\ y_n \in f(I_n)$ cu $|y_n - y_0| < \frac{1}{n}$; fie $x_n \in I_n$ cu $f(x_n) = y_n$. Cum avem $0 < x_0 - x_n < r_n$ și $|y_n - f(x_n)| < \frac{1}{n}$, $(\forall)\ n \geqslant 1$, deducem că $x_n \to x_0$ și $f(x_n) \to f(x_0)$. Extragem mai departe (P.2.3.20.) un subșir strict crescător al șirului $(x_n)_{n \geqslant 1}$ etc.

Corolar 1. *Fie $I \subseteq \mathbf{R}$ un interval și $f : I \to \mathbf{R}$ o funcție cu proprietatea Darboux. Atunci* $(\forall)\ x_0 \in \mathring{I}$, $(\exists)\ x_n, y_n \in I \setminus \{x_0\}$, $x_n \nearrow x_0$, $y_n \searrow x_0$ *a.î.* $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = \lim\limits_{n \to \infty} f(y_n) = f(x_0)$.

Corolar 2. *Fie $I \subseteq \mathbf{R}$ un interval și $f : I \to \mathbf{R}$ o funcție cu proprietatea Darboux. Dacă $f \geqslant 0$ (resp. $\leqslant 0$) pe $\mathring{I}$, atunci $f \geqslant 0$ (resp. $\leqslant 0$) pe I.*

Dem. Fie $a = \inf I \in I$. Cf. P.5.5.20 $(\exists)\ x_n \in I \setminus \{a\}$, $x_n \searrow a$ și $f(x_n) \to f(a)$. Cum $f(x_n) \geqslant 0$, $(\forall)\ n \geqslant 1$, rezultă că $f(a) \geqslant 0$ etc.

Corolar 3. *Fie $I \subseteq \mathbf{R}$ un interval, $a = \inf I$, $b = \sup I$ și $f : I \to \mathbf{R}$ o funcție cu proprietatea Darboux. Dacă $x_0 \in I \setminus \{a\}$ (resp. $I \setminus \{b\}$) și $f(x_0-)$ (resp. $f(x_0+)$) există, atunci $f(x_0-) = f(x_0)$ (resp. $f(x_0+) = f(x_0)$). Așadar f nu are discontinuități de prima speță.*

Dem. Cf. P.5.5.20 $(\exists)\ x_n \in I$, $x_n \nearrow x_0$ cu $f(x_n) \to f(x_0)$. Atunci $f(x_n) \to f(x_0-)$, deci (P.2.3.8.) $f(x_0) = f(x_0-)$.

Corolar 4. *Fie $I \subseteq \mathbf{R}$ un interval și $f : I \to \mathbf{R}$ o funcție monotonă, cu proprietatea Darboux. Atunci f este continuă (pe I).*

Dem. Din P.5.5.20. rezultă că f nu are discontinuități de prima speță, iar din T.5.5.18.Cor.2 rezultă că f nu are discontinuități de a doua speță. Prin urmare f este continuă.

5.5.21. Teoremă (th. de ident. a funcț. cont). *Fie $A \subseteq \mathbf{R}$ o mulțime și $f, g : A \to \mathbf{R}$ două funcții continue. Atunci $f = g \Leftrightarrow (\exists)\ B \subseteq A$ a.î. $\bar{B} \supseteq A$ și $f(x) = g(x)$, $(\forall)\ x \in B$.*

Dem. ($\Leftarrow$) Fie $x \in A \setminus B$ fixat, deci $x \in \bar{A} \setminus B \subseteq B'$. Atunci (T.5.1.8.(4°)) $(\exists)\ x_n \in B \setminus \{x\}$ cu $x_n \to x$. Cum $f(x_n) = g(x_n)$, $(\forall)\ n \geqslant 1$, prin trecere la limită, obținem :

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} f(x_n) = \lim_{n \to \infty} g(x_n) = g(x),$$

deci $f(x) = g(x)$. Cum f coincide cu g pe $B \setminus A$ ea și pe A, rezultă că $f = g$.

Corolar 1. *Fie $A \subseteq \mathbf{R}$ o mulțime și $f : A \to \mathbf{R}$ o funcție continuă. Atunci f este unic determinată cunoscînd valorile sale pe o submulțime $B \subseteq A$ cu $\bar{B} \supseteq A$.*

Corolar 2. *Fie* $I \subseteq \mathbf{R}$ *un interval şi* $f, g : I \to \mathbf{R}$ *două funcţii continue. Atunci* $f = g \Leftrightarrow (\exists)\ A \subseteq I$ *cel mult numerabilă (resp. neglijabilă)* (D.9.1.11.)) *a.î.* $f(x) = g(x)$, $(\forall)\ x \in I \setminus A$.

Dem. Aplicăm Cor. 1 ţinînd seama că $\overset{\circ}{A} = \emptyset$, deci $\overline{I \setminus A} \supseteq I$.

5.5.22. Definiţie. Fie $A \subseteq B \subseteq \mathbf{R}$ două mulţimi şi $f : A \to \mathbf{R}$ continuă. Vom spune că f poate fi *prelungită prin continuitate* pe B, dacă $(\exists)\ g : B \to \mathbf{R}$ continuă a.î. $g|_A = f$. Dacă $B = A \cup \{x_0\}$, unde $x_0 \notin A$, vom spune că f poate fi *prelungită prin continuitate în* x_0.

5.5.23. Teoremă. *Fie* $A \subseteq \mathbf{R}$ *o mulţime şi* $f : A \to \mathbf{R}$ *o funcţie continuă. Atunci* $(\exists !)\ g : \bar{A} \to \mathbf{R}$ *continuă a.î.* $g|_A = f \Leftrightarrow (\forall)\ x_0 \in A' \setminus A$, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ *există şi este finită.*

Dem. ($\Rightarrow$) Fie $B := \bar{A}$ şi $g : B \to \mathbf{R}$ continuă cu $g|_A = f$. Atunci $(\forall)$ $x_0 \in A' \setminus A$, avem $x_0 \in B'$, deci (T.5.5.6.(2°)) $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = g(x_0)$ şi deci $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g|_A(x) = g(x_0) \in \mathbf{R}$.

($\Leftarrow$) Fie $g : \bar{A} \to \mathbf{R}$ o funcţie definită astfel :

$$g(x) = f(x),\ (\forall)\ x \in A\ (1);\quad g(x) = \lim_{t \to x} f(t),\ (\forall)\ x \in A' \setminus A \qquad (2)$$

Atunci avem : $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = g(x_0)$, $(\forall)\ x_0 \in A'$ (3).

Într-adevăr, dacă $x_0 \in A' \setminus A$, (3) rezultă din (2), iar dacă $x_0 \in A' \cap A$, din (T.5.5.6.(2°)) rezultă că $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \overset{(1)}{=} g(x_0)$.

Să arătăm că g este continuă pe $B := \bar{A}$. Dacă $x_0 \in B \setminus B'$, din (T.5.5.6.(1°)) rezultă g continuă în x_0. Presupunem acum $x_0 \in B'$, deci $x_0 \in A'$. Fixăm $U \in \mathcal{V}(g(x_0))$; din (3) rezultă (T.5.5.7.(2°)) că $(\exists)\ V \in \mathcal{V}(x_0)$ a.î. $f(A \cap V) \subseteq U$ (4) ; evident putem lua U închisă şi V deschisă, fiindcă vecinătăţile de acest tip formează baze de vecinătăţi. Fie $y \in B \cap V = \bar{A} \cap V$ fixat. Cf. P.2.1.14.(3°) $(\exists)\ x_n \in A$, $x_n \to y$. Cum $V \in \mathcal{V}(y)$, $(\exists)\ n_0 \geqslant 1$ cu $x_n \in V$, $(\forall)\ n \geqslant n_0$, deci $x_n \in A \cap V$, $(\forall)\ n \geqslant n_0$ şi deci, cf. (4), $f(x_n) \in U$, $(\forall)\ n \geqslant n_0$, de unde prin trecere la limită obţinem $g(y) = \lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) \in \bar{U} = U$. Aşadar $g(B \cap V) \subseteq U$ şi deci g continuă în x_0. Prin urmare g este continuă pe $(B \setminus B') \cup B' = B$.

Unicitatea lui g rezultă din T.5.5.21.

Corolar 1. *Fie* $A \subseteq \mathbf{R}$ *o mulţime,* $f : A \to \mathbf{R}$ *o funcţie şi* $x_0 \in \mathbf{R} \setminus A$ *un punct. Atunci* :

1° *Dacă* $x_0 \notin A \cup A'$, *funcţia* f *poate fi prelungită prin continuitate în* x_0, *definind* $g(x_0)$ *arbitrar* ;

2° *Dacă* $x_0 \in A' \setminus A$, *funcţia* f *poate fi prelungită prin continuitate în* $x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ *există şi este finită. In acest caz* $g(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.

Corolar 2. *Fie* $A \subseteq \mathbf{R}$ *o mulţime,* $f : A \to \mathbf{R}$ *o funcţie continuă şi monotonă şi* $x_0 \in A'^b \setminus A$ (*resp.* $A'^s \setminus A \cup A'^d$, *resp.* $A'^d \setminus A \cup A'^s$) *un punct. Atunci* f *poate fi prelungită (unic) prin continuitate în* $x_0 \Leftrightarrow f(x_0-) = f(x_0+)$ (*resp.* $f(x_0-) \in \mathbf{R}$, *resp.* $f(x_0+) \in \mathbf{R}$).

Corolar 3. *Fie* $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$ *şi* $f : (a, b) \to \mathbf{R}$ *o funcţie continuă şi monotonă. Atunci* f *poate fi prelungită (unic) prin continuitate pe* $[a, b] \Leftrightarrow f$ *mărginită.*

Dem. ($\Leftarrow$) f fiind monotonă, rezultă (T.5.5.18.) că $f(a+)$ şi $f(b-)$ există. Cum f este mărginită, avem că $f(a+)$ şi $f(b-)$ sînt finite. Aplicăm mai departe Cor.2.

Exemple.

1. Funcția $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$, $x \in \mathbf{R}^*$ poate fi prelungită prin continuitate în 0.

2. Funcția $f(x) = \operatorname{sign} x$, $x \in \mathbf{R}^*$, nu poate fi prelungită prin continuitate în 0.

3. Funcția tg nu poate fi prelungită prin continuitate în puncte de forma $\dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

5.5.24. Propoziție. *Fie $A \subseteq \mathbf{R}$ o mulțime, $x_0 \in A$ un punct și $f, g : A \to \mathbf{R}$ două funcții continue în x_0. Atunci funcțiile $f \pm g$, $\lambda f, fg, f/g$ (dacă $g(x) \neq 0$, $(\forall)\ x \in A$), $|f|$, $\max\{f, g\}$, $\min\{f, g\}$ și f^α (dacă f^α are sens), sînt continue în x_0.*

Dem. Fie $(x_n)_{n\geqslant 1}$ un șir cu elemente din A, $x_n \to x_0$. Atunci (P.2.3.15) avem :

1° $\lim\limits_{n\to\infty} (f \pm g)(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) \pm \lim\limits_{n\to\infty} g(x_n) = f(x_0) = g(x_0)$,

deci $f \pm g$ este continuă în x_0 ;

2° $\lim\limits_{n\to\infty} (fg)(x_n) = (\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n))\,(\lim\limits_{n\to\infty} g(x_n)) = f(x_0)\cdot g(x_0)$,

deci fg este continuă în x_0 ;

3° $\lim\limits_{n\to\infty} |f|(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} |f(x_n)| = |f(x_0)|$,

deci $|f|$ este continuă în x_0 ;

4° $\max\{f, g\} = \dfrac{f + g + |f - g|}{2}$, $\min\{f, g\} = \dfrac{f + g - |f - g|}{2}$, deci $f + g$ și $|f - g|$ fiind continue în x_0 (cf. 1° și 3°), rezultă că $\max\{f, g\}$ și $\min\{f, g\}$ sînt continue în x_0.

Corolar 1. *Fie $A \subseteq \mathbf{R}$ o mulțime, $x_0 \in A$ un punct și $f : A \to \mathbf{R}$ o funcție. Atunci f continuă în $x_0 \Leftrightarrow f^+$ și f^- sînt continue în x_0.*

Dem. Ținem seama că $f^+ = \max\{f, 0\}$, $f^- = \max\{-f, 0\}$ și $f = f^+ - f^-$.

Observație. Dacă $|f|$ este continuă în x_0, nu rezultă numaidecît că f este continuă în x_0.

Contraexemplu. Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definită astfel $f(x) = 1$, $(\forall)\ x \in \mathbf{Q}$ și $f(x) = -1$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$. Atunci $|f|$ este continuă pe $\mathbf{R}$ în timp ce f este discontinuă pe $\mathbf{R}$.

5.5.25. Propoziție (Compunerea a două funcții continue). *Fie $A, B \subseteq \mathbf{R}$ două mulțimi și $f : A \to B$, $g : B \to \mathbf{R}$ două funcții continue. Dacă f este continuă în $x_0 \in A$ și g este continuă în $y_0 := f(x_0)$, atunci $g \circ f$ este continuă în x_0.*

Dem. Fie $(x_n)_{n\geqslant 1}$ un șir cu elemente din A, care are limita x_0. Atunci, f fiind continuă în x_0, avem $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$, deci g fiind continuă în y_0, avem :

$$\lim_{n\to\infty} (g \circ f)(x_n) = \lim_{n\to\infty} g(f(x_n)) = (g(y_0) = (g \circ f)(x_0),$$

prin urmare $g \circ f$ este continuă în x_0.

5.5.26. Definiție. Fie $I \subseteq \mathbf{R}$ un interval de capete a, $b \in \overline{\mathbf{R}}$ și $f : I \to \mathbf{R}$ o funcție. Vom spune că f este *riglată*, dacă $(\forall)\ x \in \mathring{I}$ rezultă că $f(x-)$, $f(x+)$ există și sînt finite, iar dacă $a \in I$ (resp. $b \in I$), rezultă că $f(a+)$ (resp. $f(b-)$) există și este finită.

5.5.27. Propoziție. *Fie $I \subseteq \mathbf{R}$ un interval și $f : I \to \mathbf{R}$ o funcție riglată. Atunci f este local mărginită.*

Dem. Fie $x_0 \in \overset{\circ}{I}$ fixat și $\varepsilon = 1$. Atunci $(\exists)\ V_x \in \mathcal{V}(x)$, $V_x \subseteq I$ a.î. $|f(x_0+) - f(x)| \leqslant 1$, $(\forall)\ x \in V^+$ (resp. $|f(x_0-) - f(x)| \leqslant 1$, $(\forall)\ x \in V^-$). De aici rezultă

$$|f(x)| \leqslant \max\{1 + |f(x_0-)|,\ 1 + |f(x_0+)|,\ |f(x_0)|\},\ (\forall)\ x \in V,$$

deci f este mărginită pe V.

Raționament analog dacă $x_0 = a$ (resp. $x_0 = b$) aparține lui I. Prin urmare f este local mărginită.

5.5.28. Propoziție. *Fie $I \subseteq \mathbf{R}$ un interval și $f : I \to \mathbf{R}$ o funcție. Atunci f este local mărginită $\Leftrightarrow$ f este mărginită pe orice mulțime compactă $A \subseteq I$.*

Dem. ($\Rightarrow$) Fie $A \subseteq I$ o mulțime compactă fixată; $(\forall)\ x \in A$, $(\exists)\ V_x \in \mathcal{V}(x)$ V_x deschisă, a.î. f este mărginită pe $I \cap V_x$. Evident familia $(V_x)_{x \in A}$ astfel obținută constituie o acoperire deschisă a lui A, deci A fiind compactă, $(\exists)\ x_1, x_2, \ldots x_n \in A$ a.î. $(V_{x_i})_{i=\overline{1,n}}$ acoperă A. Fie $M_i := \sup\{|f(x)|;\ x \in I \cap V_{x_i}\} (i = \overline{1, n})$ și $M := \max_{i=\overline{1,n}} M_i$. Deoarece $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} (I \cap V_{x_i})$, rezultă că $|f(x)| \leqslant M$, $(\forall)\ x \in A$, deci f este mărginită pe A.

Implicația ($\Leftarrow$) este evidentă.

Corolar 1. *Fie $I \subseteq \mathbf{R}$ un interval și $f : I \to \mathbf{R}$ o funcție riglată. Atunci f este mărginită pe fiecare mulțime compactă $A \subseteq I$.*

Dem. Aplicăm P.5.5.27. și P.5.5.28.

Corolar 2. *Fie $I \subseteq \mathbf{R}$ un interval compact și $f : I \to \mathbf{R}$ o funcție. Atunci* 1° *f mărginită $\Leftrightarrow$ f local mărginită;* 2° *Dacă f este riglată, rezultă f mărginită.*

Corolar 3. *Fie $I \subseteq \mathbf{R}$ un interval de capete $a, b \in \mathbf{R}$ și $f : I \to \mathbf{R}$ o funcție cu proprietatea că limitele laterale $f(a+), f(b-), f(x-), f(x+)$ $(x \in \overset{\circ}{I})$ există și sînt finite. Atunci f este mărginită.*

Dem. Evident $(\exists)\ [c, d] \subseteq \overset{\circ}{I}$ a.î. f este mărginită pe $(a, c]$ și pe $[d, b)$. Din Cor.1 avem că f este mărginită pe $[c, d]$ etc.

5.5.29. Teoremă (A. F r o d a). *Fie $I \subseteq \mathbf{R}$ un interval și $f : I \to \mathbf{R}$ o funcție. Atunci mulțimea A a discontinuităților de prima speță a lui f este o mulțime cel mult numerabilă.*

Dem. Fie $r > 0$ fixat și să considerăm mulțimea:

$$A_r := \{x \in I;\ \omega_f(x) > r,\ (\exists)\ f(x-) \in \mathbf{R},\ (\exists)\ f(x+) \in \mathbf{R}\}$$

Să arătăm că A_r este izolată. Într-adevăr, fie $x_0 \in A_r$ fixat. Cf. T.5.3.10. $(\exists)\ \eta_1 > 0$ a.î. $(x_0, x_0 + \eta_1) \subseteq I$ și

$$|f(x) - f(y)| < r,\ (\forall)\ x, y \in (x_0, x_0 + \eta_1),$$

deci

$$\omega_f(x) \leqslant \omega_f((x_0, x_0 + \eta_1)) \leqslant r,\ (\forall)\ x \in (x_0, x_0 + \eta_1)$$

Analog $(\exists)\ \eta_2 > 0$ cu $(x_0 - \eta_2, x_0) \subseteq I$ și $\omega_f(x) \leqslant r$, $(\forall)\ x \in (x_0 - \eta_2, x_0)$. Luînd $\eta := \min\{\eta_1, \eta_2\}$ obținem $(x_0 - \eta, x_0 + \eta) \subseteq I$ și $\omega_f(x) \leqslant r$, $(\forall)\ x \in V_\eta(x_0) \setminus \{x_0\}$, deci $A_r \cap V_\eta(x_0) = \{x_0\}$ și deci A_r este izolată.

Din P.5.1.27. rezultă A_r cel mult numerabilă, deci (P.1.4.13.) $A_0 := \bigcup_{n \geqslant 1} A_{\frac{1}{n}}$ este cel mult numerabilă. Însă (P.5.5.12.(2°)) f discontinuă în $x_0 \in I \Leftrightarrow \omega_f(x) > 0$, deci $A \cap \overset{\circ}{I} = A_0$ și deci A diferă de A_0 prin cel mult două puncte, capetele lui I. Prin urmare A este cel mult numerabilă

Corolar 1. *Fie $I \subseteq \mathbf{R}$ un interval și $f : I \to \mathbf{R}$ o funcție riglată, în particular f monotonă. Atunci mulțimea discontinuităților lui f este cel mult numerabilă.*

5.5.30. Propoziție. *Fie $A \subseteq \mathbf{R}$ o mulțime și $f : A \to \mathbf{R}$ o funcție. Atunci $(\forall)\ \alpha \in \mathbf{R}_+^*$, mulțimea $D := \{x \in A\ ;\ \omega_f(x) < \alpha\}$ este deschisă relativ la A.*

Dem. Fie $x_0 \in D$ și $\omega_f(x_0) < c < \alpha$ fixați. Cum $\omega_f(x_0) = \inf_{V \in \mathcal{V}_{x_0}} (\operatorname{dia} f(A \cap V))$, $(\exists)\ V_0 \in \mathcal{V}(x_0)$, V_0 deschisă, a.î. $\operatorname{dia} f(A \cap V_0) < c$. Atunci $V_0 \in \mathcal{V}(x)$, $(\forall)\ x \in A \cap V_0$, deci $\omega_f(x) \leqslant \operatorname{dia} f(A \cap V_0) < c$ și deci $x \in D$. Așadar $(\forall)\ x \in D$, $(\exists)\ V_0 \in \mathcal{V}(x_0)$ a.î. $A \cap V_0 \subseteq D$, deci D este deschisă relativ la A.

Corolar 1. *Fie $A \subseteq \mathbf{R}$ o mulțime închisă și $f : A \to \mathbf{R}$ o funcție. Atunci $(\forall)\ \alpha \in \mathbf{R}_+^*$, mulțimea $\{x \in A\ ;\ \omega_f(x) \geqslant \alpha\}$ este închisă (în $\mathbf{R}$).*

5.5.31. Propoziție. *Fie $A \subseteq \mathbf{R}$ o mulțime, $f : A \to \mathbf{R}$ o funcție, $\alpha \in \mathbf{R}_+^*$ un număr și $A_0 \subseteq A$ o mulțime compactă a.î. $\omega_f(x) < \alpha$, $(\forall)\ x \in A_0$. Atunci $(\exists)\ \eta > 0$ a.î. $\omega_f(A_1) < \alpha$, $(\forall)\ A_1 \subseteq A_0$, $\operatorname{dia}(A_1) < \eta$.*

Dem. Fixăm $x \in A_0$, deci $\omega_f(x) < \alpha$ și deci $(\exists)\ V_{r_x}(x) \in \mathcal{V}(x)$ a.î. $\operatorname{dia} f(A \cap V_{r_x}(x)) < \alpha$. Familia $(V_{\frac{1}{2} r_x})_{x \in A_0}$ constituie o acoperire deschisă a lui A_0, deci A_0 fiind compactă, $(\exists)\ x_1, x_2, \ldots x_n \in A_0$ a.î. $(V_{\frac{1}{2} r_{x_i}}(x_i))_{i=\overline{1,n}}$ acoperă A_0. Fie $\eta_i := \frac{1}{2} \min_{i=\overline{1,n}} r_{x_i}$ și $A_1 \subseteq A_0$ cu $\operatorname{dia}(A_1) < \eta$. Evident $(\exists)\ i = \overline{1, n}$ cu $A_1 \cap V_{\frac{1}{2} r_{x_i}}(x_i) \neq \emptyset$, de unde deducem imediat că $A_1 \subseteq V_{r_{x_i}}(x_i)$, deci avem:

$$\omega_f(A_1) = \operatorname{dia} f(A_1) \leqslant \operatorname{dia} f(A \cap V_{r_{x_i}}(x_i)) < \alpha$$

Corolar 1. *În același cadru avem: dacă $\omega_f(x) \leqslant \alpha$, $(\forall)\ x \in A_0$ și $\varepsilon > 0$ este arbitrar, atunci $(\exists)\ \eta > 0$ a.î. $\omega_f(A_1) < \alpha + \varepsilon$, $(\forall)\ A_1 \subseteq A_0$, $\operatorname{dia}(A_1) < \eta$.*

5.5.32. Propoziție. *Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ o funcție continuă cu proprietatea că $(\exists)\ a_n \in \mathbf{R}^*$, $a_n \to 0$, a.î. $f(x + a_n) = f(x)$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$, $(\forall)\ n \in \mathbf{N}$ (1). Atunci f este constantă.*

Dem. Fixez $x_0 \in \mathbf{R}$. Înlocuind succesiv în (1) pe x cu $x_0 + a_n$ obținem $f(x_0 + m\, a_n) = f(x_0)$, $(\forall)\ m, n \in \mathbf{N}$. Înlocuind apoi în (1) pe x cu $x_0 - a_n$ obținem $f(x_0 - m\, a_n) = f(x_0)$, $(\forall)\ m, n \in \mathbf{N}$. În fine punem $x_0 = 0$ și deducem că $f(m\, a_n) = f(0)$, $(\forall)\ m \in \mathbf{Z}$, $(\forall)\ n \in \mathbf{N}$. Cum mulțimea $\{m\, a_n\ ;\ m \in \mathbf{Z},\ n \in \mathbf{N}\}$ este densă în $\mathbf{R}$ (Ex. 5.2.13.), deducem (T.5.3.21.) că $f(x) = f(0)$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$, prin urmare f este constantă.

Corolar 1. *Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ o funcție continuă, periodică și neconstantă. Atunci f posedă o cea mai mică perioadă pozitivă.*

Dem. Fie $A := \{t \in \mathbf{R}_+^*\ ;\ f(x + t) = f(x),\ (\forall)\ x \in \mathbf{R}\}$ și $T := \sup A$. Evident $(\exists)\ t_n \in A$, $t_n \to T$. Atunci $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$ avem $f(x + t_n) = f(x)$, $(\forall)\ n \in \mathbf{N}$, deci $f(x + T) = \lim_{n \to \infty} f(x + t_n) = f(x)$ și deci T este perioadă pentru f. Rămîne să arătăm că $T > 0$. Dacă $T = 0$ din T.5.5.32 rezultă f constantă, absurd. Așadar $T > 0$.

5.5.33. Teoremă (G a u s s-D'A l e m b e r t). *Orice polinom cu coeficienți complecși de grad nenul posedă cel puțin o rădăcină complexă.*

Să demonstrăm în prealabil două leme ajutătoare.

Lema 1. *Fie $P \in \mathbf{C}[X]$ un polinom de* grad *$n \geqslant 1$. Atunci $\lim_{|z| \to \infty} |P(z)| = +\infty$.*

Dem. Fie $P = \sum_{k=0}^{n} c_k X^k$. Evident putem lua $c_n = 1$. Atunci $(\forall)\, z \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$ avem :

$$|P(z)| = \left| z^n \left(1 + \frac{c_{n-1}}{z} + \ldots + \frac{c_0}{z^n} \right) \right| \geqslant |z|^n \left(1 - \frac{|c_{n-1}|}{|z|} \ldots - \frac{|c_0|}{|z|^n} \right).$$

Deoarece $\lim_{|z| \to \infty} \frac{|c_k|}{|z|^{n-k}} = 0$, $(\forall)\, k = \overline{0,\ n-1}$, rezultă că

$$\lim_{|z| \to \infty} |z|^n \left(1 - \frac{|c_{n-1}|}{z^n} - \ldots - \frac{|c_0|}{|z|^n} \right) = +\infty,$$

de unde deducem imediat $\lim_{|z| \to \infty} |P(z)| = +\infty$.

Lema 2. *Fie* $P \in \mathbf{C}[X]$ *un polinom de grad* $n \geqslant 1$. *Dacă* $(\exists)\, z_0 \in \mathbf{C}$ *cu* $|P(z_0)| \leqslant |P(z)|$, $(\forall)\, z \in \mathbf{C}$, *atunci* $P(z_0) = 0$.

Dem. Presupunem $P(z_0) \neq 0$ și fie $Q(z) := \frac{P(z + z_0)}{P(z_0)}$, $z \in \mathbf{C}$. Evident $Q(0) = 1$ și cf. ipotezei $|Q(z)| \geqslant 1$, $(\forall)\, z \in \mathbf{C}$. Deoarece P este polinom neconstant, rezultă că Q este un polinom neconstant, deci Q este de forma :

$$Q(z) = 1 + c_k z^k + c_{k+1} z^{k+1} + \ldots + c_n z^n,\ z \in \mathbf{C},$$

unde $1 \leqslant k \leqslant n$ și $c_k \neq 0$. Fie $\theta := \arg c_k$ și $\varphi := \frac{1}{k}(\pi - \theta)$. Evident avem :

$$c_k (e^{i\varphi})^k = |c_k|\, e^{i\theta} \cdot e^{i(\pi - \theta)} = |c_k|\, e^{i\pi} = -|c_k|.$$

Atunci $(\forall)\, r \in \mathbf{R}_+^*$ fixat, rezultă :

$$|Q(re^{i\varphi})| \leqslant |1 + c_k r^k e^{i\varphi k}| + |c_{k+1} (re^{i\varphi})^{k+1}| + \ldots + |c_n (re^{i})^n| =$$

$$= (1 - r^k |c_k|) + |c_{k+1}| r^{k+1} + \ldots + |c_n| r^n =$$

$$= 1 - r^k (|c_k| - |c_{k+1}| r - \ldots - |c_n| r^{n-k}).$$

Pentru $r > 0$, suficient de mic, ultimul număr este strict mai mic ca 1, deci $(\exists)\, r \in \mathbf{R}_+^*$ cu $|Q(re^{i\varphi})| < 1$, absurd. Rămîne că $P(z_0) = 0$.

Dem. T.5.5.33. Fie $P \in \mathbf{C}[X]$ un polinom de grad $n \geqslant 1$ fixat. Mulțimea $\{|P(z)|\ ;\ z \in \mathbf{C}\}$ este evident minorată de 0, deci posedă margine inferioară (finită) ; fie $m := \inf_{z \in \mathbf{C}} |P(z)|$. Din definiția marginii inferioare, rezultă că există $(z_j)_{j \geqslant 1}$ un șir din $\mathbf{C}$ a.î. $|P(z_j)| \to m$. Dacă șirul $(|z_j|)_{j \geqslant 1}$ ar fi nemărginit, ar conține un subșir, să-l notăm la fel, care are limită $+\infty$. Atunci din Lema 1, rezultă $\lim_{j \to \infty} |P(z_j)| = +\infty$; cum $\lim_{j \to \infty} |P(z_j)| = m$, obținem o contradicție. Așadar $(|z_j|)_{j \geqslant 1}$ este mărginit, deci $(\operatorname{Re} z_j)_{j \geqslant 1}$ și $(\operatorname{Im} z_j)_{j \geqslant 1}$ sînt mărginite, de unde deducem, utilizînd un raționament standard (v. T.2.3.21.(5°)) că $(z_j)_{j \geqslant 1}$, posedă un subșir, să-l notăm la fel, convergent către un punct $z_0 \in \mathbf{C}$. Evident avem

$$|P(z_0)| = \lim_{j \to \infty} |P(z_j)| = m \leqslant |P(z)|,\ (\forall)\, z \in \mathbf{C}.$$

Din Lema 2 rezultă că $P(z_0) = 0$ și teorema este complet demonstrată.

Corolar 1. *Orice polinom cu coeficienți complecși de grad $n \geq 1$ posedă (exact) n rădăcini (distincte sau nu).*

Dem. Prin inducție relativ la n. Pentru $n = 1$ afirmația este evidentă. Fie $n \geq 1$ cu proprietatea că orice polinom cu coeficienți complecși de grad n posedă n rădăcini și fie $P \in \mathbf{C}[X]$ un polinom de grad $n + 1$ fixat. Din T.5.5.33. rezultă că P posedă cel puțin o rădăcină $z_0 \in \mathbf{C}$, deci $P(z_0) = 0$, de unde deducem (T.4.9.5.Cor.2) că $(\exists)\ P_1 \in \mathbf{C}[X]$ un polinom de grad n a.î.

$$P(z) = (z - z_0)\, P_1(z),\ (\forall)\ z \in \mathbf{C}$$

Cum P_1 are gradul n, el posedă n rădăcini, care sînt evident și rădăcini ale lui P, prin urmare P posedă $n + 1$ rădăcini etc.

Observația 1. Fie $P \in \mathbf{R}[X]$ *un polinom de grad impar. Atunci P posedă cel puțin o rădăcină reală.*

Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ funcția asociată a lui P i.e. $f(x) = P(x)$. Presupunem coeficientul dominant al lui P pozitiv. Evident $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = +\infty$, deci $(\exists)$ $b \in \mathbf{R}$ cu $f(b) > 0$. Analog găsim $a \in \mathbf{R}$ cu $f(a) < 0$. Cum f este evident continuă și funcțiile continue au proprietatea lui Darboux, există $x_0 \in (a, b)$ cu $f(x_0) = 0$.

Observația 2. Nu orice polinom $P \in \mathbf{R}[X]$ de grad par (nenul) posedă cel puțin o rădăcină reală. Spre exemplu $P = X^2 + 1$ nu are rădăcini reale.

5.6. Funcții continue concrete

Funcțiile concrete pe axa reală cel mai des utilizate în Analiză, sînt *funcțiile elementare*. Noțiunea de funcție elementară așa cum se folosește ea în mod curent, nu este suficient de precisă (cele patru operații algebrice nu sînt suficiente pentru a putea defini riguros orice funcție elementară, cum ar fi spre exemplu, sin, log etc.). *Clasa* funcțiilor elementare cuprinde : funcțiile polinomiale, raționale, trigonometrice, trigonometrice inverse, funcția putere exponențială, logaritmică etc.

5.6.1. Propoziție. *Funcțiile polinomiale sînt continue.*

Dem. 1. Fie $f(x) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \ldots + c_0$, $x \in \mathbf{R}$. Funcția $g = \underline{\mathbf{1}_{\mathbf{R}}}$ fiind evident continuă, avem (P.5.5.24) că funcția g^k este continuă $(\forall)\ k = \overline{1, n}$. Atunci (P.5.5.25) funcția $f = c_n g^n + c_{n-1} g^{n-1} + \ldots + c_0$ este continuă.

Dem. 2. Fixăm $x_0 \in \mathbf{R}^*$ și $\varepsilon > 0$. Dacă $0 < \eta < |x_0|$ și $|x - x_0| < \eta$, avem :

$$|x^k - x_0^k| = |x - x_0| \cdot |x^{k-1} + x^{k-2} x_0 + \ldots + x_0^{k-1}| \leq$$

$$\leq |x - x_0| \cdot [(|x - x_0| + |x_0|)^{k-1} + (|x - x_0| + |x_0|)^{k-2} + \ldots + |x_0^{k-1}|] \leq$$

$$\leq \eta [|x_0|^{k-1} (2^{k-1} + 2^{k-2} + \ldots + 1)] = 2^{k-1} |x_0|^{k-1} \eta,$$

deci

$$|f(x) - f(x_0)| \leq \sum_{k=0}^{n} |c_k| \cdot |x^k - x_0^k| \leq \eta \sum_{k=0}^{n} 2^{k-1} |c_k| \cdot |x_0|^{k-1}$$

Așadar

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon,\ (\forall)\ x \in \mathbf{R},\ |x - x_0| < \eta,$$

unde

$$0 < \eta < \min\left\{|x_0|, \left(\sum_{k=0}^{n} 2^{k-1}|c_k|\cdot|x_0|^{k-1}\right)^{-1}\cdot\varepsilon\right\}$$

Corolar 1. *Funcțiile raționale sînt continue.*

5.6.2. Propoziție. *Funcțiile trigonometrice și funcțiile trigonometrice inverse sînt continue.*

Dem. Am văzut (P.4.2.10) că $(\forall)\ x, y \in \mathbf{R}$, avem $|\sin x - \sin y| \leqslant |x - y|$. Fie deci $x_0 \in \mathbf{R}$ fixat și $x_n \in \mathbf{R}$, $x_n \to x_0$. Atunci $|\sin x_n - \sin x_0| \leqslant |x_n - x_0|$ și deoarece $|x_n - x_0| \to 0 (n \to \infty)$, rezultă (P.2.7.7) că $|\sin x_n - \sin x_0| \to 0 (n \to \infty)$, deci $\sin x_n \to \sin x_0 (n \to \infty)$, prin urmare sin este continuă în x_0.

Analog se arată că funcția cos este continuă. Cum avem $\operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$, $x \in \mathbf{R} \setminus \dfrac{\pi}{2} + \pi\mathbf{Z}$, rezultă (P.5.5.24) că tg este continuă etc.

Mai departe, funcția $\sin : \mathbf{R} \to [-1, 1]$ fiind continuă, rezultă că funcția $\sin\big|_{\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]} : \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$ este continuă. Cum aceasta din urmă este strict monotonă și surjectivă, avem (T.5.5.19.Cor.2) că inversa sa, i.e. funcția $\operatorname{arc}\sin = (\sin\big|_{\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]})^{-1}$, este continuă.

Analog se arată că funcțiile arc cos, arc tg și arc ctg sînt continue.

5.6.3. Definiție. Dacă $a \in \mathbf{R}$ și $n \in \mathbf{N}$, am definit $a^0 := 1$; $a^1 := a$, $a^{n+1} := a \cdot a^n$ (P.2.1.16.). Dacă $a \in \mathbf{R}_+$ și $n \in \mathbf{N}$, am definit $a^{\frac{1}{n}} :=$ rădăcina pozitivă (unică) a ecuației $x^n - a = 0$ (T.2.1.23.). Dacă $a \in \mathbf{R}_+$ să punem $a^{\frac{m}{n}} := (a^{\frac{1}{n}})^m = (a^m)^{\frac{1}{n}}$ (v. P.2.1.25.(4°)) și $a^{-\frac{m}{n}} := (a^{-1})^{\frac{m}{n}}$. Cu aceasta am definit a^r pentru orice $r \in \mathbf{Q}$. Cazul $a = 1$ fiind banal, vom considera $a \in \mathbf{R}_+ \setminus \{1\}$.

5.6.4. Proprietățile lui a^r, $r \in \mathbf{Q}$.

1° $(a^m)^n = (a^n)^m = a^{mn}$, $(\forall)\ a \in \mathbf{R}_+$, $(\forall)\ m, n \in \mathbf{Z}$.

În particular

$$(a^{-1})^n = (a^n)^{-1} = a^{-n}.$$

Într-adevăr, $(\forall)\ m, n \in \mathbf{N}$ avem *):

$$(a^{-n})^m := ((a^{-1})^n)^m \overset{\boxed{2°}}{=} (a^{-1})^{nm} := a^{-nm}$$

$$(a^n)^{-m} := ((a^n)^{-1})^m \overset{\boxed{5°}}{=} ((a^{-1})^n)^m \overset{\boxed{2°}}{=} (a^{-1})^{nm} = a^{-nm}$$

Așadar $(a^{-n})^m = (a^n)^{-m} = a^{-nm}$. De aici și din (P.2.1.8.(1°)) rezultă relația căutată.

2° $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$, $(\forall)\ a \in \mathbf{R}_+$, $(\forall)\ m, n \in \mathbf{Z}$.

Fie $n, m \in \mathbf{N}$ fixați; avem (i) $n \leqslant m$ sau (ii) $n > m$.

(i) $a^{-n} \cdot a^m = a^{-n} \cdot (a^n \cdot a^{m-n}) \overset{\boxed{1°}}{=} (a^n)^{-1} \cdot a^n \cdot a^{m-n} = a^{m-n}$

---

* Notăm cu □ (resp. ○) relațiile din P. 2.1.16. (resp. P. 2.1.25.)

(ii) $a^{-n}\cdot a^m \overset{1^\circ}{=} (a^{-1})^n\ a^m = (a^{-1})\cdot(a^{-1})^{n-m}\cdot a^m \overset{|1^\circ|}{=} (a^{-1}\cdot a)^m\cdot(a^{-1})^{n-m} \overset{1^\circ}{=} a^{m-n}$

Aşadar $a^{-n}\cdot a^m = a^{-n+m}$, $(\forall)\ n, m \in \mathbf{N}$. De aici şi din $\boxed{1^\circ}$ deducem imediat relaţia căutată.

3° $a^{\pm\frac{mp}{np}} = a^{\pm\frac{m}{n}}$, $(\forall)\ m, n, p \in \mathbf{N}$.

Într-adevăr, avem :

$$(a^{\frac{mp}{np}})^{np} := ((a^{\frac{1}{np}})^{mp})^{np} \overset{|2^\circ|}{=} ((a^{\frac{1}{np}})^{np})^{mp} = a^{mp}$$

$$(a^{\frac{m}{n}})^{np} := ((a^{\frac{1}{n}})^{m})^{np} \overset{|2^\circ|}{=} ((a^{\frac{1}{n}})^{np})^{m} \overset{|2^\circ|}{=} a^{p}$$

Din cele două relaţii rezultă $a^{\frac{mp}{np}} = a^{\frac{m}{n}}$.

Mai departe, avem :

$$a^{-\frac{mp}{np}} (= a^{-1})^{\frac{mp}{np}} = a^{-1})^{\frac{m}{n}} = a^{-\frac{m}{n}}$$

Cu aceasta relaţia dată este arătată.

Relaţia 3° ne asigură că *definiţia lui* a^r, $r \in \mathbf{Q}$ *este coerentă*. Într-adevăr, $(\forall)\ r \in \mathbf{Q}$ avem $r = \pm\frac{m}{n}$ cu $m, n \in \mathbf{N}$ şi orice altă reprezentare a lui r se scrie $r = \pm\frac{mp}{np}$ cu $p \in \mathbf{N}$. Ori relaţia 3° ne arată că definiţia lui a^r nu depinde de reprezentarea lui r.

4° $(ab)^n = a^n\cdot b^n$, $(\forall)\ a, b \in \mathbf{R}_+$, $(\forall)\ n \in \mathbf{Z}$.

Într-adevăr, $(\forall)\ n \in \mathbf{N}$ avem :

$$(ab)^{-n} := ((ab)^{-1})^n = (a^{-1}\cdot b^{-1})^n \overset{|4^\circ|}{=} (a^{-1})^n\cdot(b^{-1})^n := a^{-n}\cdot b^{-n}$$

De aici şi din $\boxed{4^\circ}$ rezultă relaţia căutată.

5° $a^{-\frac{m}{n}} = (a^{-\frac{1}{n}})^m = (a^{\frac{1}{n}})^{-m} = (a^{-m})^{\frac{1}{n}} = (a^{\frac{m}{n}})^{-1} = (a^{-1})^{\frac{m}{n}}$, $(\forall)\ a \in \mathbf{R}_+$, $m,\ n \in \mathbf{N}$

În particular $a^{\frac{m}{n}} = (a^{\frac{1}{n}})^m = (a^m)^{\frac{1}{n}}$, $(\forall)\ n \in \mathbf{N},\ m \in \mathbf{Z}$.

Plecînd de la definiţia lui $a^{-\frac{m}{n}}$ şi $a^{\frac{m}{n}}$, avem :

$$a^{-\frac{m}{n}} = (a^{-1})^{\frac{m}{n}} = ((a^{-1})^{\frac{1}{n}})^m = ((a^{-1})^m)^{\frac{1}{n}}$$

Însă $a^{-\frac{1}{n}} := (a^{-1})^{\frac{1}{n}}$ şi $a^{-n} := (a^{-1})^n$, deci $a^{-\frac{m}{n}} = (a^{-\frac{1}{n}})^m = (a^{-m})^{\frac{1}{n}}$.

Mai departe avem :

$$a^{\frac{m}{n}}\cdot a^{-\frac{m}{n}} = (a^{\frac{1}{n}})^m\cdot(a^{-\frac{1}{n}})^m \overset{|4^\circ|}{=} (a^{\frac{1}{n}}\cdot a^{-\frac{1}{n}})^m = (a^{\frac{1}{n}}\cdot(a^{-1})^{\frac{1}{n}})^m \overset{|2^\circ|}{=} ((a\cdot a^{-1})^{\frac{1}{n}})^m = 1,$$

deci, inversul fiind unic, rezultă $a^{-\frac{m}{n}} = (a^{\frac{m}{n}})^{-1}$.

În fine :

$$(a^{\frac{1}{n}})^{-m} = ((a^{\frac{1}{n}})^{-1})^m \overset{|7^\circ|}{=} ((a^{-1})^{\frac{1}{n}})^m := (a^{-1})^{\frac{m}{n}} = a^{-\frac{m}{n}}$$

5.6.5. Propoziție. *Fie* $a \in \mathbf{R}_+$ *și* $r_1, r_2 \in \mathbf{Q}$. *Atunci au loc relațiile* :
(i) $(a^{r_1})^{r_2} = (a^{r_2})^{r_1} = a^{r_1 r_2}$; (ii) $a^{r_1+r_2} = a^{r_1} \cdot a^{r_2}$.

Dem. Evident $(\exists)\ m_1, m_2 \in \mathbf{Z}$, $(\exists)\ n_1, n_2 \in \mathbf{N}$ a.î. $r_i = \frac{m_i}{n_i}$. Atunci din P.5.6.4 rezultă :

(i) $(a^{r_1})^{r_2} = (a^{\frac{m_1}{n_1}})^{\frac{m_2}{n_2}} \overset{5^\circ}{=} (((a^{\frac{1}{n_1}})^{m_1})^{\frac{1}{n_2}})^{m_2} \overset{5^\circ}{=} (((a^{\frac{1}{n_1}})^{\frac{1}{n_2}})^{m_1})^{m_2} \overset{1^\circ}{=} (a^{\frac{1}{n_1 n_2}})^{m_1 m_2} \overset{5^\circ}{=} a^{\frac{m_1 m_2}{n_1 n_2}} = a^{r_1 r_2}$

(ii) $(a^{\frac{m_1}{n_1}} \cdot a^{\frac{m_2}{n_2}})^{n_1 n_2} = (a^{\frac{m_1}{n_1}})^{n_1 n_2} \cdot (a^{\frac{m_2}{n_2}})^{n_1 n_2} \overset{(i)}{=} a^{m_1 n_2} \cdot a^{m_2 n_1} = a^{m_1 n_2 + m_2 n_1}$, deci

$$a^{\frac{m_1}{n_1}} \cdot a^{\frac{m_1}{n_2}} = (a^{m_1 n_2 + m_2 n_1})^{\frac{1}{n_1 m_2}} \overset{(i)}{=} a^{\frac{m_1}{n_1} + \frac{m_2}{n_2}}$$

5.6.6. Propoziție. *Fie* $a \in \mathbf{R}_+^* \setminus \{1\}$ *și* $f(r) = a^r$, $r \in \mathbf{Q}$. *Atunci* f *este strict pozitivă, strict crescătoare, dacă* $a > 1$ (*resp. strict descrescătoare dacă* $0 < a < 1$) *și continuă.*

Dem. Dacă $a > 1$, avem $a^{\frac{1}{n}} > 1$, deci $a^{\frac{m}{n}} := (a^{\frac{1}{n}})^m > 1$, $(\forall)\ m, n \in \mathbf{N}$ și deci $a^r > 1$, $(\forall)\ r \in \mathbf{Q}_+$ (1). Fie acum $r_1, r_2 \in \mathbf{Q}$, $r_1 < r_2$, fixați. Atunci (P.5.6.5)

$$a^{r_2} = a^{r_2 - r_1} \cdot a^{r_1} \overset{(1)}{>} 1 \cdot a^{r_1} = a^{r_1},$$

deci f este strict crescătoare.

Mai departe $(\forall)\ p \in \mathbf{Q}$, $(\forall)\ n \in \mathbf{N}$ cu $|p| < \frac{1}{n}$, avem :

$$a^{-\frac{1}{n}} < a^p < a^{\frac{1}{n}}, \text{ deci } a^{-\frac{1}{n}} - 1 < a^p - 1 < a^{\frac{1}{n}} - 1. \text{ Fixăm } \varepsilon > 0.$$

Cum (P.2.6.1) $a^{\pm\frac{1}{n}} \to 0$ $(n \to \infty)$, $(\exists)\ m \geqslant 1$ a.î. $-\varepsilon < a^{\pm\frac{1}{m}} - 1 < \varepsilon$, deci

$$-\varepsilon < a^p - 1 < \varepsilon,\ (\forall)\ p \in \mathbf{Q},\ |p| < \frac{1}{m}$$

și deci $\lim\limits_{\mathbf{Q} \ni p \to 0} (a^p - 1) = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{\mathbf{Q} \ni p \to 0} a^p = 1$ (2)

Fie acum $r_0 \in \mathbf{Q}$ fixat. Atunci (cf (2)) $(\forall)\ \varepsilon > 0$, $(\exists)\ \eta > 0$ a.î.

$$|a^p - 1| < \varepsilon a^{-r_0},\ (\forall)\ p \in \mathbf{Q},\ |p| < \eta,$$

deci

$$1 - \varepsilon a^{-r_0} < a^p < 1 + \varepsilon a^{-r_0},\ (\forall)\ p \in \mathbf{Q},\ |p| < \eta\ (3)$$

În fine, $(\forall)\ r, r_0 \in \mathbf{Q}$, $|r - r_0| < \eta$, avem (cf. (3)) :

$$a^{r_0}(1 - \varepsilon a^{r_0}) < a^{r_0} \cdot a^{r - r_0} < a^{r_0}(1 + \varepsilon a^{-r_0}),$$

deci

$$a^{r_0} - \varepsilon < a^r < a^{r_0} + \varepsilon$$

și deci

$$-\varepsilon < a^r - a^{r_0} < \varepsilon \Leftrightarrow |a^r - a^{r_0}| < \varepsilon$$

Prin urmare $\lim\limits_{\mathbf{Q} \ni r \to r_0} a^r = a^{r_0} \Leftrightarrow f$ continuă în r_0 (T..5.5.6)

5.6.7. Teoremă. *Fie* $a \in \mathbf{R}_+^* \setminus \{1\}$ *și* $f(r) = a^r$, $r \in \mathbf{Q}$. *Atunci* $(\exists !)\ g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}_+^*$ *continuă, surjectivă, strict crescătoare, dacă* $a > 1$ (*resp. strict descrescătoare, dacă* $0 < a < 1$) *a.î.* $g|_{\mathbf{Q}} = f$.

Dem. Presupunem $a > 1$. Am văzut (P.5.6.6) că f este continuă și strict crescătoare. Fixăm $x_0 \in \mathbf{R}$; evident $x_0 \in \mathbf{Q}'$, deci (T.5.5.18.Cor.1) $f(x_0-), f(x_0+)$ există, sînt finite și $(\forall)\ r, s \in \mathbf{Q},\ r < x_0 < s$, avem :

$$f(r) < f(x_0-) \leqslant f(x_0+) < f(s),$$

deci

$$0 \leqslant f(x_0+) - f(x_0-) \leqslant f(s) - f(r) =$$

$$= a^r(a^{s-r} - 1) \leqslant f(x_0-)\cdot(f(s-r) - 1)$$

Dacă $r \nearrow x_0$ și $s \searrow x_0$, avem $s - r \to 0$, deci (P.5.6.6.) $f(s-r) \to f(s) = 1$ și deci (P.5.3.13.) $f(x_0+) - f(x_0-) = 0$. Așadar (T.5.4.5. $\lim\limits_{r \to x_0} f(r)$ există și este finită. În acest caz (T.5.5.23) $(\exists!)\ g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}_+$ continuă a.î. $g|_{\mathbf{Q}} = f$, unde $g(x) = \lim\limits_{r \to x} f(r)$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$. Fie mai departe $x, y \in \mathbf{R}$, $x < y$, fixați și fie $r \in \mathbf{Q}$ cu $x < r < y$. Din T.5.5.18.Cor.1 rezultă

$$g(x) = f(x+) \leqslant f(r) < f(y-) = g(y),$$

deci g este strict crescătoare.

În fine, scriem $a = 1 + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$. Atunci

$$g(n) = a^n = (1 + \varepsilon)^n > 1 + n\varepsilon \to \infty \ (n \to \infty)$$

și

$$g(-n) = a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n \to 0 \ (n \to \infty)$$

Cum $g(\mathbf{R})$ este un interval (T.5.5.16) inclus în $\mathbf{R}_+^*$, concluzionăm că $g(\mathbf{R}) = \mathbf{R}_+^*$, deci g surjectivă. Din (1) mai deducem (T.5.5.18.Cor.3) și $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = +\infty$ și $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = 0$.

5.6.8. Definiție. Fie $a \in \mathbf{R}_+ \setminus \{1\}$ fixat. Funcția $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}_+^*$ dată de T.5.6.7. se numește *funcția exponențială* (pe $\mathbf{R}$) *de bază* a și se notează cu $\exp_a$ sau impropriu cu a^x. Dacă $a = e$, funcția $\exp_a$ se numește simplu *funcția exponențială* (pe $\mathbf{R}$) și se notează cu exp sau impropriu cu e^x.

Observație. Dacă $a = 1$, avem $a^r = 1$, $(\forall)\ r \in \mathbf{Q}$, ceea ce conduce la convenția naturală $1^x = 1$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$.

5.6.9. Definiție (f u n c ț i i l e h i p e r b o l i c e). Funcția $\mathrm{sh} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definită astfel $\mathrm{sh}\, x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ se numește *sinus hiperbolic* (pe $\mathbf{R}$). Analog se definesc *cosinus hiperbolic* și *tangentă hiperbolică* (pe $\mathbf{R}$) prin relațiile

$$\mathrm{ch}\, x := \frac{e^x + e^{-x}}{2},\ x \in \mathbf{R};\quad \mathrm{th}\, x := \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}},\ x \in \mathbf{R}$$

5.6.10. Propoziție. *Fie $a \in \mathbf{R}_+ \setminus \{1\}$ și a^x funcția exponențială (pe $\mathbf{R}$) de bază a. Atunci a^x este strict crescătoare dacă $a > 1$ (resp. strict descrescătoare dacă $0 < a < 1$), aplică omeomorf $\mathbf{R}$ pe $\mathbf{R}_+^*$ și avem :*

1° $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$, $(a^x)^y = a^{xy}$, $a^x \cdot a^y = a^{x-y}$, $(\forall)\ x, y \in \mathbf{R}$;

2° *Dacă* $a > 1$, $a^x \to +\infty$ $(x \to +\infty)$; $a^x \to 0$ $(x \to -\infty)$;

3° *Dacă* $0 < a < 1$, $a^x \to 0$ $(x \to +\infty)$; $a^x \to +\infty$ $(x \to -\infty)$.

Dem. Funcția $\exp_a : \mathbf{R} \to \mathbf{R}_+^*$ fiind continuă, surjectivă și strict monotonă (T.5.6.7), rezultă (T.5.5.19.Cor.2) că este omeomorfă etc.

1° Fie $x, y \in \mathbf{R}$ fixați. Atunci $(\exists)\ r_n \in \mathbf{Q}$, $r_n \to x$ și $(\exists)\ s_n \in \mathbf{Q}$, $s_n \to y$ (P.5.1.18.). Din (P.5.6.5) rezultă $a^{r_n+s_n} = a^{r_n} \cdot a^{s_n}$, $(\forall)\ n \geqslant 1$, de unde prin trecere la limită, obținem $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$ etc.

2° A fost demonstrat în T.5.6.7.

3° Dacă $0 < a < 1$, atunci $b := \dfrac{1}{a} > 1$, deci

$$\lim_{x \to \infty} a^x = \lim_{x \to \infty} b^{-x} = \lim_{t \to -\infty} b^t = 0 \text{ (cf. 2°) etc.}$$

Corolar 1. *Funcția exponențială pe* $(\mathbf{R})$ exp *este strict crescătoare și aplică omeomorf* $\mathbf{R}$ *pe* $\mathbf{R}_+^*$. *Funcțiile* sh, ch, th *sînt continue.*

5.6.11. Definiție. Fie $a \in \mathbf{R}_+^* \setminus \{1\}$ fixat și $\exp_a : \mathbf{R} \to \mathbf{R}_+^*$ funcția exponențială de bază a. Atunci funcția $(\exp_a)^{-1} : \mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R}$ se numește *logaritm în baza* a și se notează $\log_a$. Dacă $a = e$, atunci $\log_a$ se notează simplu cu ln și se numește *logaritm natural.*

Așadar $(\forall)\ x \in \mathbf{R}_+^*$, $(\forall)\ y \in \mathbf{R}$, avem :

$$\boxed{\log_a x = y \Leftrightarrow \exp_a y = x}\ ;\ \boxed{x = a^{\log_a x}}\ ;\ \boxed{x = e^{\ln x}}$$

5.6.12. Propoziție. *Funcția* $\log_a x$ *cu* $a \in \mathbf{R}_+^* \setminus \{1\}$, *este strict crescătoare, dacă* $a > 1$ (*resp. strict descrescătoare dacă* $0 < a < 1$), *aplică omeomorf* $\mathbf{R}_+^*$ *pe* $\mathbf{R}$ *și avem :*

1° $\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$, $(\forall)\ x, y \in \mathbf{R}_+^*$;

2° $\log_a \dfrac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$, $(\forall)\ x, y \in \mathbf{R}_+^*$;

3° $\log_a x^y = y \log_a x$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}_+^*$, $(\forall)\ y \in \mathbf{R}_+^*$;

4° *Dacă* $a > 1$, $\log_a x \to +\infty\ (x \to +\infty)$; $\log_a x \to -\infty\ (x \searrow 0)$;

5° *Dacă* $0 < a < 1$, $\log_a x \to -\infty\ (x \to +\infty)$; $\log_a x \to +\infty\ (x \searrow 0)$.

Dem. Funcția $\exp_a : \mathbf{R} \to \mathbf{R}_+^*$ fiind strict crescătoare, dacă $a > 1$ (resp. strict descrescătoare dacă $0 < a < 1$) și omeomorfă (P.5.6.9) ; rezultă imediat că inversa sa i.e. funcția $\log_a : \mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R}$ este strict crescătoare, dacă $a > 1$ (resp. strict descrescătoare dacă $0 < a < 1$) și omeomorfă. De aici deducem, în ipoteza $a > 1$, că

$$\exp_a x \to +\infty\ (x \to +\infty) \Leftrightarrow \log_a y \to +\infty\ (y \to +\infty)$$

$$\exp_a x \to 0\ (x \to -\infty) \Leftrightarrow \log_a y \to -\infty\ (y \searrow 0)$$

Am obținut astfel 4°. Analog se arată 5°.

1° Notăm $\log_a x = A$, $\log_a y = B$. Atunci

$$\log_a x = A \Leftrightarrow \exp_a A = x\ ;\ \log_a y = B \Leftrightarrow \exp_a B = y,$$

deci

$$xy = (\exp_a A)(\exp_a B) = \exp_a (A + B) \text{ (P.5.6.9.(1°))}$$

și deci

$$\log_a (xy) = A + B = \log_a x + \log_a y \text{ etc.}$$

Corolar 1.

$$\log_a \frac{1}{x} = -\log_a x\ ;\ \log_a \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \log_a x,\ (\forall)\ x \in \mathbf{R}_+^*$$

5.6.13. Definiție. Fie $A \subseteq \mathbf{R}$ o mulțime și $f, g : A \to \mathbf{R}$ două funcții. Funcția $f^g : A \to \mathbf{R}$ se definește prin relația $(f^g)(x) := (f(x))^{g(x)}$, $(\forall)\ x \in A$, dacă expresia din dreapta are sens (spre exemplu dacă $f > 0$); ea se numește *f la puterea g*. Dacă $f = \mathbf{1}_{\mathbf{R}_+^*}$ și $g = a$ (const.), atunci f^g se notează impropriu prin x^a și se numește *funcția putere* (x la puterea a).

5.6.14. Propoziție. *Fie $A \subseteq \mathbf{R}$ o mulțime și $f : A \to \mathbf{R}_+^*$, $g : A \to \mathbf{R}$ două funcții continue în $x_0 \in A$. Atunci funcția f^g este continuă în x_0.*

Dem. Fie $h := f^g$ i.e. $h(x) = f(x)^{g(x)}$, $(\forall)\ x \in A$. Evident avem $h = \mathrm{e}^{g \ln f}$. Deoarece f este continuă în x_0 și ln continuă (pe $\mathbf{R}_+^*$), rezultă (P.5.5.25.) că $\ln f$ este continuă în x_0, deci (P.5.5.24.) $g \ln f$ este continuă în x_0. Cum e^t este continuă (pe $\mathbf{R}$), conchidem că h este continuă în x_0.

Corolar 1. $(\forall)\ a \in \mathbf{R}$, *funcția $f(x) = x^a$, $x \in \mathbf{R}_+^*$ este continuă.*

Corolar 2. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n = \mathrm{e}^x$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$

Dem. Dacă $x = 0$, afirmația este evidentă. Fie $x \neq 0$ fixați atunci

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left[\left(1 + \frac{x}{n}\right)^{\frac{x}{n}}\right]^x = \mathrm{e}^x$$

5.6.15. Propoziție (C a u c h y). *Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ o funcție continuă și additivă. Atunci f este liniară, deci* $(\exists!)\ c \in \mathbf{R}$ *a.î.* $f(x) = cx$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$.

Dem. f fiind aditivă, rezultă (prin inducție) că $(\forall)\ n, m \in \mathbf{N}$ și $x \in \mathbf{R}$, avem :

$$f(nx) = f(x + x + \ldots + x) = nf(x);$$

$$f(0) = f(0 + 0) = 2f(0), \text{ deci } f(0) = 0;$$

$$0 = f(0) = f(x - x) = f(x) + f(-x), \text{ deci } f(-x) = -f(x);$$

$$f(x) = f\left(n\left(\frac{1}{n}x\right)\right) = nf\left(\frac{1}{n}x\right), \text{ deci } f\left(\frac{1}{n}x\right) = \frac{1}{n}f(x);$$

$$f\left(\frac{m}{n}x\right) = mf\left(\frac{1}{n}x\right) = \frac{m}{n}f(x)$$

Din relațiile obținute rezultă

$$f(rx) = rf(x),\ (\forall)\ x \in \mathbf{R},\ (\forall)\ r \in \mathbf{Q}$$

Fie acum $x, \alpha \in \mathbf{R}$ fixați și $r_n \in \mathbf{Q}$, $r_n \to \alpha$. Cum $f(r_n x) = r_n f(x)$ $(\forall)\ n \geqslant 1$, prin trecere la limită, $n \to \infty$, rezultă ținînd seama că f este continuă, relația :

$$f(\alpha x) = \lim_{n\to\infty} f(r_n x) = \lim_{n\to\infty} r_n f(x) = \alpha f(x),$$

prin urmare f este omogenă; punem $c = f(1)$.

Corolar 1. *Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ o funcție continuă neidentic-nulă cu proprietatea :* $f(x + y) = f(x).f(y)$, $(\forall)\ x\ y \in \mathbf{R}$. *Atunci* $(\exists!)\ c > 0$ *a.î.* $f(x) = c^x$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$.

Dem. $f(x) = f\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{x}{2}\right) = \left(f\left(\dfrac{x}{2}\right)\right)^2 \geqslant 0$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$. Dacă $(\exists)\ x_0 \in \mathbf{R}$ cu $f(x_0) = 0$, atunci $f(x) = f(x - x_0)\, f(x_0) = 0$, deci $f = 0$, absurd. Rămîne că $f > 0$.

Punem $g := \ln f$. Evident g este continuă și aditivă, deci (P.5.6.14) $g(x) = \alpha x$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$ și deci

$$f(x) = \mathrm{e}^{g(x)} = \mathrm{e}^{\alpha x} = c^x,\ (\forall)\ x \in \mathbf{R}$$

Corolar 2. *Fie* $f : \mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R}$ *o funcție continuă neidentic nulă și multiplicativă. Atunci* $(\exists)\ \alpha \in \mathbf{R}$ *a.î.* $f(x) = x^\alpha$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}_+^*$.

Dem. Fie $g(t) := f(e^t)$, $t \in \mathbf{R}$. Funcția g este continuă, neidentic nulă și $(\forall)\ t_1, t_2 \in \mathbf{R}$ avem :

$$g(t_1 + t_2) = f(e^{t_1} \cdot e^{t_2}) = f(e^{t_1}) \cdot f(e^{t_2}) = g(t_1) \cdot g(t_2).$$

Atunci (Cor.1) $(\exists)\ a > 0$ *a.î.* $g(t) = a^t$, $(\forall)\ t \in \mathbf{R}$, deci

$$f(x) = g(\ln x) = a^{\ln x} = x^{\ln a},\ (\forall)\ x \in \mathbf{R}_+^*$$

5.6.15. Propoziție

$$(\forall)\ x \in \mathbf{R} \text{ are loc relația } e^x = \sum_{n \geqslant 0} \frac{x^n}{n!}$$

Dem. Evident seria $\sum_{n \geqslant 0} \frac{x^n}{n!}$ este absolut convergentă (cf. T.3.2.7.), deci este convergentă ; fie $f(x)$ suma sa. Atunci (T.3.4.2) $(\forall)\ x, y \in \mathbf{R}$ avem :

$$f(x)\, f(y) = \sum_{n \geqslant 0} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k\, y^{n-k}}{k!(n-k)!} \right) = \sum_{n \geqslant 0} \frac{1}{n!} (x + y)^n = f(x + y)$$

Dacă $x \in \mathbf{R}$, $|x| \leqslant 1$, rezultă

$$|f(x) - f(0)| = \left| x \sum_{n \geqslant 1} \frac{x^n}{(n+1)!} \right| \leqslant |x| \cdot \sum_{n \geqslant 1} \frac{|x|^n}{n!} \leqslant |x| \cdot e,$$

de unde deducem că f este continuă în 0. Atunci din relația :

$$f(x) - f(x_0) = f(x_0)\,(f(x - x_0) - 1),\ (\forall)\ x, x_0 \in \mathbf{R},$$

rezultă că f este continuă în x_0, deci pe $\mathbf{R}$. Aplicăm P.5.6.14. Cor 1, conchidem că $f(x) = c^x$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$, cu $c > 0$ fixat. Deoarece $c = f(1) = e$, obținem $f(x) = e^x$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$.

5.6.17. Calculul limitelor unor funcții uzuale.

1° $\lim\limits_{x \to \infty} x^p a^x = 0,\ 0 < a < 1,\ p \in \mathbf{N}$;

2° $\lim\limits_{x \to \infty} a^x\, P(x) = \begin{cases} 0, & 0 < a < 1 \\ \pm\infty, & a > 1 \end{cases},\ P \in \mathbf{R}[X]$;

3° $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{P(x)}{a^x} = \begin{cases} \pm\infty, & 0 < a < 1 \\ 0, & a > 1 \end{cases}$;

4° $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x^p} = 0$; $\lim\limits_{x \searrow 0} \frac{\ln x}{x^p} = -\infty\ (p \in \mathbf{N})$;

5° $\lim\limits_{x \searrow 0} x^p \ln x = 0\ (p \in \mathbf{N})$;

6° $\lim\limits_{x \to \infty} x^{\frac{1}{x}} = 1$, $\lim\limits_{x \searrow 0} x^{\frac{1}{x}} = 0$.

Dem. 1° $\lim\limits_{x \to \infty} x^p a^x = 0$, $|a| < 1$, $p \in \mathbf{N}$. Fie $(x_n)_{n \geqslant 1}$ un șir cu elemente din $\mathbf{R}_+$, care are limita $+\infty$. Deoarece

$$[x_n]_* \leqslant x_n < [x_n]_* + 1,\ (\forall)\ n \geqslant 1,$$

deducem

$$[x_n]_*^p\, a^{[x_n]_*+1} \leqslant x_n^p \cdot a^{x_n} < ([x_n]_* + 1)^p \cdot a^{[x_n]_*},\ (\forall)\ n \geqslant 1$$

Însă (P.2.6.1) $\lim\limits_{n\to\infty} n^p a^n = 0$, deci $([x_n]_*)_{n\geqslant 1}$ fiind un subșir al șirului $1, 2, 3, \ldots$, avem :

$$\lim_{n\to\infty} [x_n]_*^p \cdot a^{[x_n]_*+1} = \lim_{n\to\infty} ([x_n]_* + 1)^p \cdot a^{[x_n]_*} = 0$$

și deci (P.2.7.5.) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^p\, a^{x_n} = 0$, prin urmare $\lim\limits_{x\to\infty} x^p\, a^x = 0$.

2° Considerăm polinomul

$$P(x) = c_0\, x^n + c_1\, x^{n-1} + \ldots + c_n$$

Atunci

$$a^x\, P(x) = a^x\, x^n \left(c_0 + \frac{c_1}{x} + \ldots + \frac{c_n}{x^n} \right), \ (x \neq 0),$$

deci $\lim\limits_{x\to\infty} a^x\, P(x) = 0 \cdot c_0 = 0$, dacă $|a| < 1$.

Dacă $a > 1$, avem $a^x\, x^n > x^n$, $(\forall)\, x \in \mathbf{R}_+$, deci $\lim\limits_{n\to\infty} a^x\, x^n = +\infty$ și deci $\lim\limits_{n\to\infty} a^x P(x) = (\operatorname{sign} c_0) \cdot \infty$.

3° Să punem $b := \dfrac{1}{a}$. Atunci din 2° deducem :

$$\lim_{x\to\infty} \frac{P(x)}{a^x} = \lim_{n\to\infty} b^x\, P(x) = \begin{cases} 0, & 0 < b < 1 \\ 0, & b > 1 \end{cases} \text{ etc.}$$

4° $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln x}{x^n} = 0 \ \ (p \in \mathbf{N})$

Evident este suficient să luăm $p = 1$. Fie $(x_n)_{n\geqslant 1}$ un șir cu elemente din $\mathbf{R}_+^*$ care are limita $+\infty$. Ca în 1° avem :

$$\frac{\ln [x_n]_*}{[x_n]_* + 1} \leqslant \frac{\ln x_n}{x_n} \leqslant \frac{\ln([x_n]_* + 1)}{[x_n]_*}, \ (\forall)\, n \geqslant 1$$

Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln n}{n} = 0$ (P.2.6.1.) și $([x_n]_*)_{n\geqslant 1}$ este un subșir al șirului $1, 2, 3, \ldots$, rezultă că

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln [x_n]_*}{[x_n]_* + 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln([x_n]_* + 1)}{[x_n]_*} = 0,$$

deci (P.2.5.7.) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln x_n}{x_n} = 0$ și deci $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$.

Deoarece $\lim\limits_{x\searrow 0} \ln x = -\infty$ (P.5.6.11.(5°)) și $\lim\limits_{x\searrow 0} \dfrac{1}{x^p} = +\infty$ (5.4.6.(1°)), rezultă că $\lim\limits_{x\searrow 0} \dfrac{\ln x}{x^p} = -\infty$.

5° $\lim\limits_{x\searrow 0} x^p \ln x = 0$. Într-adevăr, să punem $y = \dfrac{1}{x}$, $x \in \mathbf{R}_+^*$. Atunci $x \searrow 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow y \to \infty$, deci

$$\lim_{x\searrow 0} x^p \ln x = \lim_{y\to\infty} \frac{-\ln y}{y^p} = 0 \ \text{(cf. 4°)}$$

6° $\lim\limits_{x\to-\infty} x^{\frac{1}{x}} = 1$, $\lim\limits_{x\searrow 0} x^{\frac{1}{x}} = 0$

Într-adevăr, avem:

$$\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} e^{\ln x^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{\ln x}{x}} = e^0 = 1 \text{ (cf. } 4^\circ)$$

$$\lim_{x\searrow 0} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\searrow 0} e^{\frac{\ln x}{x}} = 0 \text{ (cf. } 4^\circ)$$

5.7. Funcții uniform continue

Noțiunea de continuitate este o noțiune *punctuală*, fiea depinde de fiecare punct pe care este definită funcția. Să definim acum noțiunea de *uniformă continuitate*, care depinde de întreaga mulțime pe care este definită funcția.

5.7.1. Definiție. Fie $A \subseteq \mathbf{R}$ o mulțime și $f : A \to \mathbf{R}$ o funcție. Vom spune că f este *uniform continuă* pe mulțimea $B \subseteq A$, dacă:

$$(\forall)\ \varepsilon > 0,\ (\exists)\ \eta = \eta(\varepsilon) > 0 \text{ a.î. } (\forall)\ x_1, x_2 \in B,\ |x_1 - x_2| \leqslant \eta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

O funcție uniform continuă pe întreaga mulțime de definiție o vom numi simplu *uniform continuă*.

Din D.5.7.1 rezultă evident afirmațiile:

1) f uniform continuă $\Leftrightarrow (\forall)\ \varepsilon > 0$, $(\exists)\ \eta > 0$ a.î. $(\forall)\ B \subseteq A$ cu $\operatorname{dia}(B) < \eta$, rezultă $\omega_f(A) < \varepsilon$ i.e. din $f(A) < \varepsilon$;

2) f nu este uniform continuă $\Leftrightarrow (\exists)\ \varepsilon > 0$ cu proprietatea:

$$(\forall)\ n \in \mathbf{N},\ (\exists)\ x_n, y_n \in A \text{ a.î. } |x_n - y_n| < \frac{1}{n} \text{ și } |f(x_n) - f(y_n)| \geqslant \varepsilon.$$

Observația 1. Din D.5.7.1. reținem că η care în cazul continuității lui f depinde de ε și punctul $x \in B$, aici η depinde *numai* de ε, deci este *independent* de punctul x din B.

Exemple.

1. Fie $f(x) = ax + b$, $x \in \mathbf{R}$ ($a, b \in \mathbf{R}$ fixați, $a \neq 0$). Atunci

$$|f(x) - f(y)| = |a| \cdot |x - y| \leqslant \varepsilon,\ (\forall)\ x, y \in A,\ |x - y| \leqslant \frac{\varepsilon}{|a|},$$

deci f este uniform continuă.

2. Fie $f(x) = \sin x$, $x \in \mathbf{R}$. Evident avem (D.4.1.10., Exemplul 1):

$$|f(x) - f(y)| \leqslant |x - y|, (\forall)\ x, y \in \mathbf{R}$$

Atunci $(\forall)\ \varepsilon > 0$ și $\eta = \varepsilon$, avem:

$$|f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon,\ (\forall)\ x, y \in A,\ |x - y| \leqslant \eta,$$

deci f este uniform continuă.

3. *Fie* $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $x \in (0, 1)$. *Atunci* f *nu este uniform continuă.*

Presupunem prin absurd f uniform continuă. Atunci pentru $\varepsilon = 1$, $(\exists)\ 0 < \delta < 1$ a.î. $\left|\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y}\right| < 1$, $(\forall)\ x, y \in (0, 1)$, $|x - y| < \delta$, deci $\left|\dfrac{1}{x}\right| \leqslant$

$\leqslant 1+\frac{1}{\delta}$, $(\forall)\ x \in (0, \delta)$. Pentru $x := \frac{\delta}{2}$ obținem $\frac{1}{\delta} < 1$, absurd. Rămîne că f nu este uniform continuă.

4. *Fie $A \subseteq \mathbf{R}$ o mulțime și $f : A \to \mathbf{R}$ o funcție lipschitziană i.e.* $(\exists)\ \lambda > 0$ *a.î.* $|f(x) - f(y)| \leqslant \lambda |x - y|$, $(\forall)\ x, y \in A$. *Atunci f este uniform continuă.* Într-adevăr, pentru $\varepsilon > 0$ fixat, luăm $\eta_\varepsilon = \varepsilon\lambda^{-1}$.

5. *Fie $f(x) = x^2$, $x \in \mathbf{R}$. Atunci f nu este uniform continuă.*

Presupunem f uniform continuă și fie $\varepsilon = 1$. Atunci $(\exists)\ \eta_1 > 0$ a.î.

$$|x^2 - y^2| < 1,\ (\forall)\ x, y \in \mathbf{R},\ |x - y| \leqslant \eta_1,$$

deci

$$|2x\eta_1 + \eta_1^2| = |x^2 - (x + \eta_1)^2| < 1,\ (\forall)\ x \in \mathbf{R}$$

și deci $|x| < \frac{1}{2\eta}(1 + \eta_1^2)$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$, absurd etc.

5.7.2. Propoziție. *Fie $A \subseteq \mathbf{R}$ o mulțime și $f : A \to \mathbf{R}$ o funcție. Dacă f este uniform continuă pe mulțimea $B \subseteq A$, atunci f este continuă pe mulțimea*

$$C := \{x \in B;\ (\exists)\ V \in \mathcal{V}(x) \text{ a.î. } A \cap V \subseteq B\}$$

Dem. Fie $x_0 \in \mathring{C}$ și $\varepsilon > 0$ fixați. Atunci

$$(\exists)\ \eta_1 > 0 \text{ a.î. } (\forall)\ x_1, x_2 \in B,\ |x_1 - x_2| < \eta_1 \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

Evident $(\exists)\ \delta > 0$ a.î. $A \cap V_\delta(x_0) \subseteq B$; alegem $\delta < \eta$. În acest caz avem:

$$(\forall)\ x \in A,\ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon,$$

deci f este continuă în x_0.

Corolar 1. *Fie $A \subseteq \mathbf{R}$ o mulțime și $f : A \to \mathbf{R}$ o funcție. Dacă f este uniform continuă, atunci f este continuă.*

Observația 1. Dacă $f : A \to \mathbf{R}$ este uniform continuă pe mulțimea $B \subseteq A$, $B \neq A$, nu rezultă numaidecît că f este continuă pe B.

Contraexemplu. Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ funcția caracteristică a mulțimii $B = [0, 1]$. Atunci f este uniform continuă pe B și nu este continuă în punctele 0 și 1.

Observația 2. Reciproca Cor. 1 nu este numaidecît adevărată.

Contraexemplu. Fie $f : (0, 1) \to \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$. Atunci f este continuă și nu este uniform continuă.

5.7.3. Propoziție. *Fie $A \subseteq \mathbf{R}$ o mulțime și $f : A \to \mathbf{R}$ o funcție. Atunci f este uniform continuă $\Leftrightarrow$ $(\exists)\ c \in A$ a.î. f este uniform continuă pe $A_1 := \{x \in A;\ x \leqslant c\}$ și pe $A_2 := \{x \in A;\ x \geqslant c\}$.*

Dem. Implicația $(\Rightarrow)$ este evidentă.

$(\Leftarrow)$ Fie $\varepsilon > 0$ fixat. Cf. ipotezei $(\exists)\ \eta_{\varepsilon 1} > 0$ și $\eta_{\varepsilon 2} > 0$ a.î.

$$|f(x) - f(y)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2},\ (\forall)\ x, y \in A_1,\ |x - y| \leqslant \eta_{\varepsilon 1} \text{ și } (\forall)\ x, y \in A_2,\ |x - y| < \eta_{\varepsilon 2}$$

Notăm $\eta_\varepsilon := \min\{\eta_{\varepsilon 1}, \eta_{\varepsilon 2}\}$ și fie $x, y \in A$, $|x - y| \leqslant \eta_\varepsilon$ fixați. Dacă $x, y \in A_1$ sau $x, y \in A_2$, din (1) rezultă că $|f(x) - f(y)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$. Dacă $x \in A_1$ și $y \in A_2$ sau invers, rezultă imediat că $|x - c| \leqslant \eta_\varepsilon$ și $|y - c| \leqslant \eta_\varepsilon$, deci cf. (1) avem $|f(x) - f(c)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ și $|f(y) - f(c)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ și deci $|f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon$. Așadar

$$|f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon,\ (\forall)\ x, y \in A,\ |x - y| < \eta_\varepsilon \text{ etc.}$$

5.7.4. Propoziție. *Fie $A \subseteq \mathbf{R}$ o mulțime și $f : A \to \mathbf{R}$ o funcție. Atunci f este uniform continuă $\Leftrightarrow$ $(\forall)\ x_n, y_n \in A$ cu $x_n - y_n \to 0$ $(n \to \infty)$, rezultă că $f(x_n) - f(y_n) \to 0$ $(n \to \infty)$.*

Dem. $(\Rightarrow)$ Fie $\varepsilon > 0$ și $x_n, y_n \in A$, $x_n - y_n \to 0$, fixați. Funcția f fiind uniform continuă, $(\exists)\ \eta > 0$ a.î.

$$(\forall)\ x, y \in A,\ |x - y| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Pentru η de mai sus $(\exists)\ N \geqslant 1$ a.î. $|x_n - y_n| < \eta$, $(\forall)\ n \geqslant N$, deci

$$|f(x_n) - f(y_n)| \leqslant \varepsilon,\ (\forall)\ n \geqslant N \text{ și deci } f(x_n) - f(y_n) \to 0\ (n \to \infty).$$

$(\Leftarrow)$ Presupunem că f nu este uniform continuă. Atunci $(\exists)\ \varepsilon > 0$ cu proprietatea:

$$(\forall)\ n \geqslant 1,\ (\exists)\ x_n, y_n \in A,\ |x_n - y_n| \leqslant \frac{1}{n} \text{ și } |f(x_n) - f(y_n)| \geqslant \varepsilon \quad (1)$$

Din (1) rezultă $x_n - y_n \to 0$ $(n \to \infty)$ și $f(x_n) - f(y_n) \not\to 0$ $(n \to \infty)$, absurd. Rămâne că f este uniform continuă.

5.7.5. Propoziție. *Fie $A \subseteq \mathbf{R}$ o mulțime și $f : A \to \mathbf{R}$ uniform continuă. Atunci $(\forall)\ (x_n)_{n \geqslant 1}$ un șir Cauchy cu elemente din A, rezultă că $(f(x_n))_{n \geqslant 1}$ este șir Cauchy.*

Dem. Fie $\varepsilon > 0$ fixat. Atunci $(\exists)\ \eta > 0$ a.î.

$$(\forall)\ x, y \in A,\ |x - y| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Șirul $(x_n)_{n \geqslant 1}$ fiind Cauchy, $(\exists)\ N \geqslant 1$ cu proprietatea $|x_n - x_m| < \eta$, $(\forall)$ $n, m \geqslant N$. Atunci

$$|f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon,\ (\forall)\ n, m \geqslant N,$$

deci $(f(x_n))_{n \geqslant 1}$ este șir Cauchy.

Corolar 1. *Fie $A \subseteq \mathbf{R}$ o mulțime și $f : A \to \mathbf{R}$ o funcție uniform continuă. Atunci f are limită finită în fiecare punct de acumulare al lui A.*

Dem. Fie $x_0 \in A'$ fixat. Atunci $(\forall)\ (x_n)_{n \geqslant 1}$ un șir de elemente din A cu $x_n \to x_0$, rezultă că $(x_n)_{n \geqslant 1}$ este șir Cauchy, deci $(f(x_n))_{n \geqslant 1}$ este șir Cauchy și deci convergent. Prin urmare (T.5.3.4. Cor. 1) f are limită finită în x_0.

5.7.6. Propoziție. *Fie $A \subseteq \mathbf{R}$ o mulțime și $f : A \to \mathbf{R}$ o funcție uniform continuă. Atunci $(\forall)$ $B \subseteq A$ mărginită, rezultă că $f(B)$ este mărginită.*

Dem. Fie $(y_n)_{n \geqslant 1}$ un șir fixat cu elemente din $f(B)$ și fie $(x_n)_{n \geqslant 1}$ un șir cu elemente din B cu $f(x_n) = y_n$, $(\forall)\ n \geqslant 1$. Mulțimea B fiind mărginită, șirul $(x_n)_{n \geqslant 1}$ posedă (T. 2.3.21.(5°)) un subșir convergent $(x_{n_k})_{k \geqslant 1}$. Atunci $(x_{n_k})_{k \geqslant 1}$ este șir Cauchy (P. 2.3.12.), deci (P.5.7.5.) $(f(x_{n_k}))_{k \geqslant 1}$ este șir Cauchy și deci (P.2.3.13.) este mărginit. Așadar $f(B)$ este relativ secvențial compactă, prin urmare (T.5.2.9. Cor. 1) mărginită.

Corolar 1. *Fie $A \subseteq \mathbf{R}$ o mulțime mărginită, și $f : A \to \mathbf{R}$ o funcție uniform continuă. Atunci $f(A)$ este mărginită.*

5.7.7. Teoremă. *Fie $A \subseteq \mathbf{R}$ o mulțime și $f : A \to \mathbf{R}$ o funcție uniform continuă. Atunci f poate fi prelungită în mod unic la o funcție uniform continuă $g : \bar{A} \to \mathbf{R}$.*

Dem. Fie $z \in \bar{A} \setminus A \subseteq A'$ fixat. Din P.5.7.5. Cor. 1 rezultă că $\lim\limits_{x \to z} f(x)$ există și este finită: să o notăm cu $g(z)$. Dacă $z \in A$, punem $g(z) := f(z)$. Obținem astfel o funcție $g : \bar{A} \to \mathbf{R}$ care prelungește pe f.

Să arătăm că g este uniform continuă. Fie în acest scop $\varepsilon > 0$ fixat. Cf. ipotezei $(\exists)\ \eta > 0$ cu proprietatea:

$$|f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon,\ (\forall)\ x, y \in A,\ |x - y| < \eta \qquad (1)$$

Fie acum $z, z' \in \bar{A} \setminus A$, $|z - z'| < \eta$, fixați. Atunci (P.5.7.4.) $(\exists)\ x_n,\ y_n \in A$ cu $x_n \to z$ și $y_n \to z'$. Cum $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n - y_n| = |z - z'| < \eta$, $(\exists)\ N \geqslant 1$ a.î.

$|x_n - y_n| < \eta$, $(\forall)\ n \geqslant N$, deci cf. (1) avem $|f(x_n) - f(y_n)| \leqslant \varepsilon$, $(\forall)\ n \geqslant N$, de unde prin trecerea la limită, $n \to \infty$, obținem $|g(z) - g(z')| \leqslant \varepsilon$. Așadar

$$|g(z) - g(z')| \leqslant \varepsilon,\ (\forall)\ z, z' \in A' \setminus A,\ |z - z'| < \eta \qquad (2)$$

Din (1) și (2) deducem că g este uniform continuă pe A.

Unicitatea lui g rezultă din T.5.5.21.

5.7.8. Teoremă. *Fie $A \subseteq \mathbf{R}$ o mulțime compactă și $f: A \to \mathbf{R}$ o funcție continuă. Atunci f este uniform continuă.*

Dem. Presupunem că f nu este uniform continuă, deci $(\exists)\ \varepsilon > 0$ proprietatea:

$$(\forall)\ n \geqslant 1,\ (\exists)\ x_n,\ y_n \in A,\ |x_n - y_n| \leqslant \frac{1}{n} \text{ a.î. } |f(x_n) - f(y_n)| \geqslant \varepsilon$$

Mulțimea A fiind compactă, șirul $(x_n)_{n\geqslant 1}$ posedă un subșir convergent $(x_{n_k})_{k\geqslant 1}$ către un punct $x \in A$. Atunci

$$|x - y_{n_k}| \leqslant |x - x_{n_k}| + |x_{n_k} - y_{n_k}| \to 0\ (k \to \infty),$$

deci $y_{n_k} \to x (k \to \infty)$. Trecînd la limită, $k \to \infty$, în relația:

$$|f(x_{n_k}) - f(x_{n_k})| \geqslant \varepsilon,\ k \geqslant 1,$$

obținem, ținînd seama că f este continuă, relația absurdă $|f(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon$

Rămîne că f este uniform continuă.

Corolar 1. *Fie $I \subseteq \mathbf{R}$ un interval și $f: I \to \mathbf{R}$ o funcție continuă. Atunci f este uniform continuă $\Leftrightarrow (\exists) a, b \in I$ a.î. f este uniform continuă pe $I \cap (-\infty, a]$ și pe $I \cap [b, +\infty)$.*

Dem. ($\Leftarrow$) Presupunem $a < b$. Din T.5.7.8. avem că f este uniform continuă pe $[a, b]$. Aplicăm mai departe P.5.7.3.

Corolar 2. *Fie $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$ și $f: (a, b) \to \mathbf{R}$ o funcție continuă. Atunci cond. 1°—3° sînt echivalente: 1° f uniform continuă; 2° $f(a+)$ și $f(b-)$ există și sînt finite; 3° $(\exists)\ g: [a, b] \to \mathbf{R}$ (uniform) continuă a.î. $g|_{[a,b]} = f$.*

Dem. 1° $\Rightarrow$ 2°. Aplicăm P.5.7.5. Cor. 1; 2° $\Rightarrow$ 3°. Aplicăm T.5.5.23.; 3°$\Rightarrow$1°. Dacă g este continuă, atunci (T.5.7.8.) g este uniform continuă, deci $f = g|_{[a,b]}$ este uniform continuă.

Observație. Cor. 2. este adevărat și în cazul cînd $a, b \in \bar{\mathbf{R}}$.

Exemplul 1. Fie $f(x) = \sqrt{x}$, $x \in \mathbf{R}_+$. Atunci f este uniform continuă.

Evident f este continuă pe $\mathbf{R}_+$, derivabilă pe $\mathbf{R}_+^*$ și avem $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $(\forall)$ $x \in \mathbf{R}_+^*$. Cum $[0, 1]$ este compact, din T.5.7.8. rezultă că f este uniform continuă pe $[0, 1]$. Este clar că $|f'(x)| = f'(x) \leqslant \frac{1}{2}$, $(\forall)\ x \in [1, \infty)$, deci (T.6.3.4. Cor. 5)

f este lipschitziană și deci (D.5.7.1., Exemplul 4) f este uniform crntinuă pe $[1, \infty)$. Din T.5.7.8. Cor. 1 deducem că f este uniform continuă pe $\mathbf{R}_+$.

Exemplul 2. *Fie* $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *o funcție definită astfel* $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$, *dacă* $x \neq 0$ *și* $f(0) = 0$. *Atunci* f *este uniform continuă.*

Evident f este continuă pe $\mathbf{R}$, derivabilă pe $\mathbf{R}^*$ și avem $f'(x) = \sin\frac{1}{x} - \frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}^*$. Cum $[-1, 1]$ este compact, din T.5.7.8. rezultă că f este uniform continuă pe $[-1, 1]$. Este clar că $|f'(x)| \leqslant 1 + 1$, $(\forall)\ |x| \geqslant 1$ deci raționînd ca în Exemplul 1, rezultă că f este uniform continuă pe $(-\infty, -1$ și pe $[1, \infty)$. Prin urmare (T.5.7.8. Cor. 1) f este uniform continuă.

CAPITOLUL 6

CALCUL DIFERENȚIAL REAL

6.1. Funcții derivabile. Operații cu funcții derivabile

Vom prezenta în acest capitol principalele rezultate de calcul diferențial : teoremele Rolle, Lagrange, Cauchy, Darboux, L'Hospital, Taylor etc. Alte rezultate de calcul diferențial vor fi prezentate în capitolul 12.

6.1.1. Definiție. $A \subseteq \mathbf{R}$ o mulțime $x_0 \in A \cap A'$ un punct și $f: A \to \mathbf{R}$ o funcție. Vom spune că f este *derivabilă* în x_0, dacă $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ (1) există și este finită. Această limită se notează cu $f'(x_0)$ și se numește *derivata lui f în* x_0. Dacă $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ există și este egală cu $\pm \infty$, vom nota, prin extensiune această limită cu $f'(x_0)$. Dacă $x_0 \in A \cap A'^{s}$ (resp. $x_0 \in A \cap A'^{d}$) și în (1) luăm limita la stînga (resp. la dreapta) în x_0, obținem *derivata la stînga* (resp. la *dreapta*) a lui f în x_0 și o notăm cu $f'_s(x_0)$ (resp. $f'_d(x_0)$). Vom spune că f este *derivabilă* (pe A), unde $A \subseteq A'$, dacă f este derivabilă în fiecare punct x din A.

1° Evident avem : $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ există $\Leftrightarrow \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ există. În acest caz cele două limite sînt egale.

2°. Fixăm $x_0 \in A$ și punem $g(t) := f(x + t)$, $t \in A - x_0$. Atunci $f'(x_0)$ există $\Leftrightarrow g'(0)$ există. În acest caz avem $f'(x_0) = g'(0)$.

Afirmații analoage pentru derivatele laterale.

6.1.2. Semnificația geometrică a derivatei. Fie $I \subseteq \mathbf{R}$ un interval, $f: I \to \mathbf{R}$ o funcție și Γ_f graficul lui f i.e. mulțimea $\{(x, f(x)) ; x \in I\}$ din $\mathbf{R}^2$. Dacă $x \in I$ punem $P_x = (x, f(x))$. Vom spune că Γ_f are *tangentă* (geometrică) în punctul $P_{x_0} \in \Gamma_f$ dacă secanta $P_{x_0}P_x$, $(x \in I)$, tinde, cînd $x \to x_0$, către o dreaptă, numită *tangenta* (geometrică) la grafic în punctul P_{x_0}. Atunci avem că f este *derivabilă* în $x_0 \Leftrightarrow \Gamma_f$ are tangentă geometrică în P_{x_0}. În acest caz avem $f'(x_0) = \operatorname{tg} \theta$, unde θ este unghiul format de axa Ox și tangenta geometrică la grafic în P_{x0}. Așadar $f'(x_0)$ reprezintă *panta tangentei geometrice la graficul lui f în punctul* $(x_0, f(x_0))$, iar ecuația tangentei

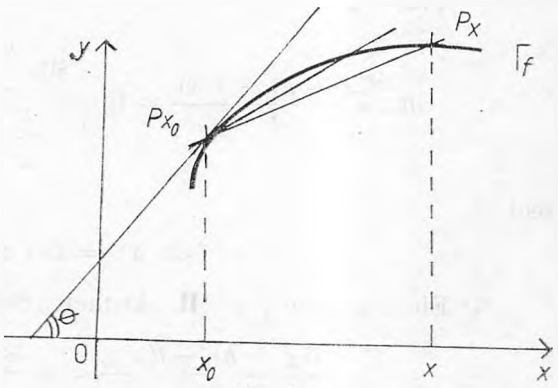


Fig. 13

geometrice la graficul lui f (Fig. 13) în punctul $(x_0, f(x_0))$ se scrie :

$$y - f(x_0) = (x - x_0)f'(x_0)$$

Exemplul 1. Fie $f(x) = |x|$, $x \in \mathbf{R}$. Atunci f este derivabilă pe $\mathbf{R}^*$, nederivabilă în 0 și avem $f'(x_0) = \dfrac{|x_0|}{x_0}$, dacă $x_0 \neq 0$, $f'_s(0) = -1$ și $f'_d(0) = +1$.

Exemplul 2. Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definită astfel $f(x) = x \sin \dfrac{1}{x}$, dacă $x \neq 0$ și $f(0) = 0$. Atunci f este derivabilă pe $\mathbf{R}^*$ și nederivabilă în 0.

6.1.3. Propoziție.

1° $(x^n)' = nx^{n-1}$, $(\forall)$ $x \in \mathbf{R}$, $(\forall)$ $n \in \mathbf{N}$;

2° $(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$, $(\forall)$ $x \in \mathbf{R}$;

3° $(a^x)' = a^x \ln a$, $(\forall)$ $x \in \mathbf{R}$ $(a \in \mathbf{R}_+^*)$;

4° $(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$, $(\forall)$ $x \in \mathbf{R}$;

5° $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$, $(\forall)$ $x \in \mathbf{R}_+^*$;

6° $(x^a)' = ax^{a-1}$ $(\forall)$ $x \in \mathbf{R}_+^*$ $(a \in \mathbf{R})$.

Dem. 1° Fie $f(x) = x^n$, $x \in \mathbf{R}$ cu $n \in \mathbf{N}$ fixat. Atunci avem :

$$f(x + h) = (x + h)^n = x^n + C_n^1 x^{n-1}h + \ldots + C_n^n h^n,$$

deci

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} (C_n^1 x^{n-1} + C_n^2 x^{n-2}h + \ldots + C_n^n h^{n-1}) = C_n^1 x^{n-1}$$

și deci

$$(x^n)' = nx^{n-1}, \quad (\forall) \quad x \in \mathbf{R}.$$

2° $f(x) = \sin x$, $x \in \mathbf{R}$. Atunci avem :

$$f(x + h) - f(x) = \sin(x + h) - \sin x = 2 \sin \frac{h}{2} \cos \left(x + \frac{h}{2} \right).$$

Deoarece $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\sin t}{t} = 1$ și cos este continuă, rezultă

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sin \dfrac{h}{2}}{\dfrac{h}{2}} \cdot \cos \left(x + \frac{h}{2} \right) = \cos x,$$

deci

$$(\sin x)' = \cos x, \quad (\forall) \quad x \in \mathbf{R}.$$

3° Fie $f(x) = a^x$, $x \in \mathbf{R}$. Atunci avem :

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h} = a^x \frac{a^h - 1}{h}, \quad (\forall) \quad h \in \mathbf{R}^*.$$

Punem $a^h - 1 = t$. Funcția $\exp_a$ fiind omeomorfă, rezultă $t \to 0 \Leftrightarrow h \to 0$. Deoarece $h = \dfrac{\ln(1+t)}{\ln a}$, avem

$$\frac{a^h - 1}{h} = \frac{t \ln a}{\ln (1+t)} = \frac{\ln a}{\ln(1+t)^{1/t}},$$

deci

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = a^x \lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h} = a^x \lim_{t\to 0} \frac{\ln a}{\ln (1+t)^{1/t}} = a^x \ln a$$

și deci

$$(a^x)' = a^x \ln a, \ (\forall)\ x \in \mathbf{R}.$$

4° Aplicăm 3° pentru $a = 1$ Să dăm o demonstrație directă : fie $f(x) = e^x$, $x \in \mathbf{R}$. Evident avem :

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x \frac{e^h - 1}{h}, \ (\forall)\ x,\ h \in \mathbf{R},\ h \neq 0 \quad (1).$$

Ținînd seama (P.5.6.5.) că $e^h = \sum_{n\geq 0} \frac{h^n}{n!}$, $(\forall)\ h \in \mathbf{R}$, rezultă :

$$\frac{e^h - 1}{h} = \sum_{n\geq 1} \frac{h^{n-2}}{n!} = 1 + h \sum_{n\geq 2} \frac{h^{n-2}}{n!}, \ (\forall)\ h \in \mathbf{R}^* \qquad (2)$$

Însă

$$\left| \sum_{n\geq 2} \frac{h^{n-2}}{n!} \right| \leq \sum_{n\geq 0} \frac{|h|^{n-2}}{n!} \leq \sum_{n\geq 2} \frac{1}{n!} < e, \ (\forall)\ |h| \leq 1.$$

Atunci, din (2) prin trecerea la limită, obținem : $\lim_{h\to 0} \dfrac{e^h - 1}{h} = 1$, deci cf. (1) rezultă

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = e^x \lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^x.$$

Prin urmare $(e^x)' = e^x$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$.

5° Evident avem :

$$\frac{\ln (x+h) - \ln x}{h} = \frac{1}{x} \ln \left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}, \ (\forall)\ x,\ h \in \mathbf{R}_+^*.$$

Cum (P.5.6.14. Cor. 1) $\lim_{h\to 0} \left(1 + \dfrac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}} = e$, rezultă

$$\lim_{h\to 0} \frac{\ln (x+h) - \ln x}{h} = \frac{1}{x}, \ (\forall)\ x \in \mathbf{R}_+^*.$$

Prin urmare $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}_+^*$.

6° Fie $f(x) = x^a$, $x \in \mathbf{R}_+^*$. Evident avem: $f(x) = e^{a \ln x}$, $(\forall)$ $x \in \mathbf{R}_+^*$. Atunci din 5° rezultă

$$f'(x) = e^{a \ln x} \cdot (a \ln x)' = x^a \cdot a \cdot \frac{1}{x} = ax^{a-1}, \ (\forall)\ x \in \mathbf{R}_+^*.$$

Corolar 1.

1° $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{a^x - a^{x_0}}{x - x_0} = a^{x_0} \ln a \ (a \in \mathbf{R}_+^*)$;

2° $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{a^x - 1}{x} = \lim\limits_{x \to \infty} x(a^{\frac{1}{x}} - 1) = \ln a \ (a \in \mathbf{R}_+^*)$;

3° $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = \lim\limits_{x \to \infty} x(e^{\frac{1}{x}} - 1) = 1$;

4° $(\sqrt{x})' = (x^{\frac{1}{2}})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}_+^*$.

Corolar 2. *Fie $a \in \mathbf{R}$ și $p \in \mathbf{R}_+^*$ fixați și $f(x) = |x - a|^p$, $x \in \mathbf{R}$. Atunci f este derivabilă pe $\mathbf{R} \setminus \{a\}$ și avem $f'(x) = p|x-a|^{p-1} \dfrac{x-a}{|x-a|}$, $(\forall) x \in \mathbf{R} \setminus \{a\}$.*

In punctul $x = a$ distingem următoarele situații:

1° *Dacă $p = 1$, avem $f'_s(a) = -1$ și $f'_d(a) = +1$;*

2° *Dacă $0 < p < 1$, avem $f'_s(a) = -\infty$ și $f'_d(a) = +\infty$;*

3° *Dacă $1 < p < +\infty$, funcția f este derivabilă în a și $f'(a) = 0$.*

6.1.4. Propoziție. *Fie $A \subseteq \mathbf{R}$ o mulțime $x_0 \in A \cap A'^s$ (resp. $A \cap A'^d$) un punct și $f : A \to \mathbf{R}$ o aplicație. Dacă f este derivabilă la stînga (resp. la dreapta) în x_0, atunci f este continuă la stînga (resp. la dreapta) în x_0 i.e. $f(x_0-) = f(x_0)$ (resp. $f(x_0+) = f(x_0)$).*

Dem. Presupunem f derivabilă la stînga în x_0 și fie $\varepsilon > 0$ fixat. Atunci $(\exists)$ $\eta > 0$ a.î.

$$\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'_s(x_0) \right| \leqslant \varepsilon, \ (\forall)\ x \in A \cap (x_0 - \eta, x_0), \tag{1}$$

deci

$$|f(x) - f(x_0)| \leqslant |x - x_0| \cdot (|f'_s(x_0)| + \varepsilon), \ (\forall)\ x \in A \cap (x_0 - \eta, x_0),$$

de unde rezultă că $\lim\limits_{x \nearrow x_0} f(x) = f(x_0)$. Prin urmare f este continuă la stînga în x_0.

Corolar 1. *Fie $A \subseteq \mathbf{R}$ o mulțime, $x_0 \in A \cap A'$ un punct și $f : A \to \mathbf{R}$ o funcție. Dacă f este derivabilă în x_0, atunci f este continuă în x_0.*

Dem. Relația (1) de mai sus se înlocuiește prin relația:

$$\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right| \leqslant \varepsilon, \ (\forall)\ x \in A \cap (x_0 - \eta, x_0 + \eta) \setminus \{x_0\} \text{ etc.}$$

Observația 1. Reciproca Cor. 1 nu este numaidecît adevărată.

Contraexemplu. Fie $f(x) = |x|$, $x \in \mathbf{R}$. Atunci f este continuă și nederivabilă în 0.

Observația 2. Dacă $f'(x_0)$ există, nu rezultă numaidecît că f este continuă în x_0.

Contraexemplu. Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ funcția signum. Atunci $f'(0) = +\infty$ și f este discontinuă în 0.

6.1.5. Propoziție. *Fie $A \subseteq \mathbf{R}$ o mulțime, $x_0 \in A \cap A'$ un punct și $f : A \to \mathbf{R}$ o funcție. Atunci $f'(x_0)$ există $\Leftrightarrow$ $(\exists)\ V \in \mathcal{V}(x_0)$ a.î. $(f|_{A\cap V})'(x_0)$ există. În acest caz avem $f'(x_0) = (f|_{A\cap V})'(x_0)$.*

Dem. $(\exists)\ f'(x_0) \Leftrightarrow (\exists) \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \Leftrightarrow (\exists)\ V \in \mathcal{V}(x_0)$ a.î.

$\lim\limits_{A\cap V \ni x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ există $\Leftrightarrow (\exists)\ V \in \mathcal{V}(x_0)$ a.î.

$(\exists) \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f_{A\cap V}(x) - f_{A\cap V}(x_0)}{x - x_0} \Leftrightarrow (\exists)\ V \in \mathcal{V}(x_0)$ a.î. $(\exists)\ (f|_{A\cap V})'(x_0)$.

În acest caz avem evident $f'(x_0) = (f|_{A\cap V})'(x_0)$.

Corolar 1. *Fie $A \subseteq \mathbf{R}$ o mulțime, $f : A \to \mathbf{R}$ o funcție și $D \subseteq A$ o mulțime deschisă relativ la A. Atunci f este derivabilă pe $D \Leftrightarrow f|_D$ este derivabilă pe D.*

Dem. Fie G deschisă în $\mathbf{R}$ cu $A \cap G = D$. Atunci $(\forall)\ x_0 \in D$ avem $G \in \mathcal{V}(x_0)$, deci (P.6.1.5.) : $(\exists)\ f'(x_0) \Leftrightarrow (\exists)\ (f|_{A\cap G})'(x_0) \Leftrightarrow (\exists)\ (f_D)'(x_0)$.

Corolar 2. *Fie $I_k \subseteq \mathbf{R}$ $(k = \overline{1, 2})$ două intervale disjuncte, $f : I_1 \cup I_2 \to \mathbf{R}$ o funcție și $f_k = f|_{I_k} (k = \overline{1, 2})$. Atunci :*

1° Dacă $\sup I_1 < \inf I_2$ și $x_0 \in I_k$, rezultă : f este derivabilă în $x_0 \Leftrightarrow f_k$ este derivabilă în x_0 ;

2° Dacă $\sup I_1 = \inf I_2 = c$ și $x_0 \in I_k \setminus \{c\}$, rezultă : f este derivabilă în $x_0 \Leftrightarrow f_k$ este derivabilă în x_0 ;

3° În cazul 1° și 2° avem $f'(x_0) = f_k'(x_0)$.

Dem. Aplicăm P. 6.1.5., ținînd seamă că I_k (resp. $I_k \setminus \{c\}$) este deschisă în $I_1 \cup I_2$.

6.1.6. Propoziție. *Fie $A \subseteq \mathbf{R}$ o mulțime, $x_0 \in A \cap A'^{s}$ (resp. $A \cap A'^{d}$) un punct și $f : A \to \mathbf{R}$ o funcție. Dacă $(\exists)\ f'(x_0)$, atunci $(\exists)\ f_s'(x_0)$ (resp. $f_d'(x_0)$), și avem : $f_s'(x_0) = f'(x_0)$ (resp. $f_d'(x_0) = f'(x_0)$).*

Dem. Evidentă.

6.1.7. Propoziție. *Fie $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$ și $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ o funcție. Atunci $(\exists) f'(a)$ (resp. $f'(b)$) $\Leftrightarrow (\exists)\ f_d'(a)$ (resp. $f_s'(b)$). În acest caz avem : $f'(a) = f_d'(a)$ (resp. $f'(b) = f_s'(b)$).*

Dem. Evidentă.

6.1.8. Propoziție. *Fie $A \subseteq \mathbf{R}$ o mulțime, $x_0 \in A \cap A'^{b}$ un punct și $f : A \to \mathbf{R}$ o funcție. Atunci $(\exists)\ f'(x_0) \Leftrightarrow (\exists)\ f_s'(x_0)$, $(\exists)\ f_d'(x_0)$ și sînt egale. În acest caz avem : $f'(x_0) = f_s'(x_0) = f_d'(x_0)$.*

Dem. Evident avem : $(\exists)\ f'(x_0) \Leftrightarrow (\exists) \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \overset{5.4.5.}{\Leftrightarrow} (\exists)$ $\lim\limits_{x\nearrow x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, $(\exists) \lim\limits_{x\searrow x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ și sînt egale $\Leftrightarrow (\exists)\ f_s'(x_0)$, $(\exists)\ f_d'(x_0)$ și sînt egale.

Observație. Dacă $x_0 \in A \cap A'$, atunci P. 6.1.8. poate să nu aibă sens, ca pre exemplu în cazul $A = [a, b]$ și $x_0 = a$ sau $x_0 = b$.

Exemplul 1. Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ o funcție definită astfel : $f(x) = \sin x$, dacă $x \geqslant 0$ și $f(x) = x^2$, dacă $x < 0$. Să se studieze derivabilitatea lui f.

Deoarece $\mathbf{R}_+^*$ și $\mathbf{R}_-^*$ sînt mulțimi deschise în $\mathbf{R}$, iar $f_{\mathbf{R}_+^*} = \sin$ și $f_{\mathbf{R}_-^*} = x^2$ sînt derivabile, rezultă (P. 6.1.5.) că f este derivabilă pe $\mathbf{R}_+^* \cup \mathbf{R}_-^* = \mathbf{R}^*$ și avem $f'(x) = \cos x$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}_+^*$ și $f'(x) = 2x$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}_-^*$. Mai departe avem: $f'_s(0) = \lim\limits_{x \nearrow 0} \dfrac{x^2 - 0}{x - 0} = 0$, $f'_d(0) = \lim\limits_{x \searrow 0} \dfrac{\sin x - 0}{x - 0} = 1$, deci (P. 6.1.5.) f nu este derivabilă în 0.

Exemplul 2. *Fie* $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *o funcție definită astfel* $f(x) = 1 + x^2$, *dacă* $x \geqslant 0$ *și* $f(x) = ax + b$, *dacă* $x < 0$, *unde* a *și* b *sînt parametri reali. Să se determine* a *și* b *a.î.* f *să fie derivabilă în* 0.

Ca și în Exemplul 1 se arată că f este derivabilă pe $\mathbf{R}^*$ și avem $f'(x) = 2x$, $(\forall) x \in \mathbf{R}_+^*$ și $f'(x) = a$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}_-^*$. Dacă f este derivabilă în 0, ea este continuă în 0, deci $f(0-) = f(0+)$. Cum $f(0-) = b$ și $f(0+) = 1$, rezultă $b = 1$. Mai departe avem:

$$f'_s(0) = \lim_{x \nearrow 0} \frac{(ax + 1) - 1}{x - 0} = a,\ f'_d(0) = \lim_{x \searrow 0} \frac{(1 + x^2) - 1}{x - 0} = 0$$

Așadar (P. 6.1.8.) f este derivabilă în $0 \Leftrightarrow f'_s(0) = f'_d(0) \Leftrightarrow a = 0$. Prin urmare $f(x) = 1$, $(\forall)\ x < 0$.

6.1.9. Teoremă. *Fie* $A \subseteq \mathbf{R}$ *o mulțime,* $x_0 \in A \cap A'$ *un punct,* $f, g : A \to \mathbf{R}$ *două aplicații derivabile în* x_0 *și* $\lambda \in \mathbf{R}$ *un număr. Atunci* $f + g$, λf, fg *și* f/g (*dacă* $g(x) \neq 0$, $(\forall)\ x \in A$) *sînt derivabile în* x_0 *și avem:*

$1^\circ\ (f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$; $2^\circ\ (\lambda f)'(x_0) = \lambda f'(x_0)$;

$3^\circ\ (fg)'(x_0) = f'(x_0)\, g(x_0) + f(x_0)\, g'(x_0)$;

$4^\circ\ \left(\dfrac{f}{g}\right)'(x_0) = \dfrac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$.

Dem. $1^\circ \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{(f + g)(x) - (f + g)(x_0)}{x - x_0} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} +$

$+ \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) + g'(x_0)$ etc. Analog se arată și 2°.

3° Plecăm de la identitatea:

$$\frac{(fg)(x) - (fg)(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\,[g(x) - g(x_0)] +$$

$$+ \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\, g(x_0) + \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}\, f(x_0),\ (\forall)\ x \in A \setminus \{x_0\} \qquad (1)$$

Deoarece f este derivabilă în x_0 și g este derivabilă în x_0, deci continuă în x_0, avem:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\,[g(x) - g(x_0)] = f'(x_0).\ 0 = 0.$$

Atunci din (1) prin trecere la limită, obținem:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{(fg)(x) - (fg)(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)g(x_0) + g'(x_0) \cdot f(x_0).$$

4° $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\dfrac{1}{g(x)}-\dfrac{1}{g(x_0)}}{x-x_0}=-\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\cdot\dfrac{1}{g(x)g(x_0)}=$

$=-g'(x_0)\cdot\dfrac{1}{g^2(x_0)}$, deci $\dfrac{1}{g}$ este derivabilă în x_0 și avem $\left(\dfrac{1}{g}\right)'(x_0)=-\dfrac{g'(x_0)}{g^2(x_0)}$.

De aici și din 3° deducem:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0)=\left(f\cdot\frac{1}{g}\right)'(x_0)=f'(x_0)\cdot\frac{1}{g(x_0)}+f(x_0)\cdot\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0)=$$

$$=\frac{f'(x_0)}{g(x_0)}-f(x_0)\frac{g'(x_0)}{g^2(x_0)}\text{ etc.}$$

Corolar 1. *Funcțiile raționale sînt derivabile.*

Exemple.

1. $(\operatorname{tg}x)'=\left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)'=\dfrac{\cos x\cdot\cos x-\sin x\cdot(-\sin x)}{\cos^2 x}=\dfrac{1}{\cos^2 x}$.
2. $(\operatorname{ctg}x)'=\left(\dfrac{\cos x}{\sin x}\right)'=\dfrac{-\sin x\cdot\sin x-\cos x\cdot\cos x}{\sin^2 x}=-\dfrac{1}{\sin^2 x}$.
3. $(\operatorname{sh}x)'=\left(\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}\right)'=\dfrac{(e^x)'-(e^{-x})'}{2}=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}=\operatorname{ch}x$.
4. $(\operatorname{ch}x)'=\left(\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}\right)'=\dfrac{(e^x)'+(e^{-x})'}{2}=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}=\operatorname{sh}x$.

6.1.10. Teoremă. *Fie A, $B\subseteq\mathbf{R}$ două mulțimi, $f:A\to B$, $g:B\to\mathbf{R}$ două aplicații, $x_0\in A\cap A'$ și f derivabilă în x_0, $y_0=f(x_0)\in B\cap B'$ și g derivabilă în y_0. Atunci $g\circ f$ este derivabilă în x_0 și avem:* $(g\circ f)'(x_0)=g'(y_0)\cdot f'(x_0)$.

Dem. Fie $x_n\in A\setminus\{x_0\}$ $(n\geqslant 1)$, $x_n\to x_0$ fixat; notăm $y_n:=f(x_n)$ $(n\geqslant 1)$. Atunci avem:

$$\frac{gf(x_n)-gf(x_0)}{x_n-x_0}=\begin{cases}0, & f(x_n)=f(x_0)\\ \dfrac{g(y_n)-g(y_0)}{y_n-y_0}\cdot\dfrac{f(x_n)-f(x_0)}{x-x_0}, & f(x_n)\neq f(x_0)\end{cases}$$

1° Dacă $(\exists)\ n_0\geqslant 1$ cu $f(x_n)\neq f(x_0)$, $(\forall)\ n\geqslant n_0$, din (1) deducem:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{gf(x_n)-gf(x_0)}{x_n-x_0}=g'(y_0)f'(x_0).$$

2° Dacă există o infinitate de indici $n\geqslant 1$ cu $f(x_n)=f(x_0)$, atunci ținînd seama că f este derivabilă în x_0, avem $f'(x_0)=0$, deci $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(x_0)-f(x_0)}{x_n-x_0}=0$ și deci din (1) deducem:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{gf(x_n)-gf(x_0)}{x_n-x_0}=0=g'(y_0)\cdot f'(x_0).\qquad(1)$$

Așadar avem întotdeauna

$$\lim_{n\to\infty}\frac{gf(x_n)-gf(x_0)}{x_n-x_0}=g'(y_0)f'(x_0).$$

Cum $(x_n)_{n\geq 1}$ a fost arbitrar, concludem că $g \circ f$ este derivabilă în x_0 şi avem: $(g \circ f)'(x_0) = g'(y_0) f'(x_0)$.

Corolar 1. *Fie $I, J \subseteq \mathbf{R}$ două intervale, $f : I \to J$, $g : J \to \mathbf{R}$ două aplicaţii. Dacă f este derivabilă în $x_0 \in I$ şi g este derivabilă în $y_0 = f(x_0)$, atunci $g \circ f$ este derivabilă în x_0 şi avem relaţia $(g \circ f)'(x_0) = g'(y_0) \cdot f'(x_0)$.*

Corolar 2. *Fie $A \subseteq \mathbf{R}$ o mulţime, $x_0 \in A \cap A'$ un punct şi $u, v : A \to \mathbf{R}$ două funcţii derivabile în x_0 cu $u \geq 0$. Atunci u^v este derivabilă în x_0 şi avem $(u^v)'(x_0) = (u^v \ln u \cdot v' + vu^{v-1}u')(x_0)$.*

Dem. Fie $f = u^v$. Logaritmăm, apoi derivăm; obţinem

$$f'(x_0) = f(x_0)(v \ln u)'(x_0) = (u^v)(x_0)\left(v' \ln u + v\frac{u'}{u}\right)(x_0) =$$

$$= (u^v \ln u \cdot v' + vu^{v-1}u')(x_0).$$

Exemple.

Fie $A \subseteq \mathbf{R}$ o mulţime şi $u : A \to \mathbf{R}$ o funcţie derivabilă pe $A \cap A'$. Atunci $(\forall)\ x \in A \cap A'$ au loc relaţiile:

1° $(u^n(x))' = n\,u'(x) \cdot u^{n-1}(x)$;

2° $(\sin u(x))' = u'(x) \cos u(x)$; $(\cos u(x))' = -u'(x) \sin u(x)$;

3° $(e^{u(x)})' = e^{u(x)}u'(x)$;

4° $(\ln u)'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$ (dacă $u > 0$).

În particular avem, spre exemplu, relaţiile:

$$(e^{-\sin(x^3+1)})' = -2x\cos(x^3+1) \cdot e^{-\sin(x^3+1)},\ (\forall)\ x \in \mathbf{R};$$

$$(\sin^3(1-x))' = -3\cos(1-x) \cdot \sin^2(1-x),\ (\forall)\ x \in \mathbf{R};$$

$$(\cos(\ln(1-x^3)))' = \frac{3x^2}{1-x^3}\sin(\ln(1-x^3)),\ (\forall)\ x \in (-1, 1).$$

6.1.11. Propoziţie. *Fie $I \subseteq \mathbf{R}$ un interval, $x_0 \in \mathring{I}$ şi $f : I \to \mathbf{R}$. Atunci*

1° *Dacă f continuă în x_0 şi $f(x_0) \neq 0$, rezultă: $|f|$ derivabilă în $x_0 \Leftrightarrow f$ derivabilă în x_0; în acest caz avem relaţia $|f|'(x_0) = f'(x) \cdot \operatorname{sign} f(x_0)$;*

2° *Dacă $f(x_0) = 0$, rezultă: $|f|$ derivabilă în $x_0 \Leftrightarrow f$ derivabilă în x_0 şi $f'(x_0) = 0$.*

Dem. 1° Deoarece f este continuă şi nenulă în x_0, atunci $(\exists)\ \delta > 0$ a.î. $f \geq 0$ (resp. < 0) pe $J := I \cap [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$, deci $|f| = f$ (resp. $-f$) pe J. Din P. 6.1.5. rezultă: $|f|$ derivabilă în $x_0 \Leftrightarrow |f|_J$ este derivabilă în $x_0 \Leftrightarrow f_{|J}$ (resp $-f_{|J}$) este derivabilă în x_0. Evident $|f|'(x_0) = f'(x_0)$ (resp. $-f'(x_0)$).

2° Deoarece $f(x_0) = 0$, avem:

$$\frac{|f(x)| - |f(x_0)|}{x - x_0} = \begin{cases} \left|\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right|, & x \in I,\ x > x_0 \\ -\left|\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right|, & x \in I,\ x < x_0 \end{cases} \tag{1}$$

($\Rightarrow$) Dacă $|f|$ este derivabilă în x_0, din (1) rezultă:

$$0 \leqslant \lim_{x \searrow x_0} \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right| = |f|'_d(x_0) = |f|'(x_0),$$

$$0 \leqslant \lim_{x \searrow x_0} \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right| = -|f|'_s(x_0) = -|f|'(x_0),$$

deci $|f|'(x_0) \geqslant 0$ și $-|f|'(x_0) \geqslant 0$ și deci $|f|'(x_0) = 0$.
Așadar $\lim_{x \to x_0} \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right| = 0$, deci $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0$ și deci f este derivabilă în x_0 și $f'(x_0) = 0$.

($\Leftarrow$)Dacă f este derivabilă în x_0 și $f'(x_0)=0$, rezultă $\lim_{x \to x_0} \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right| = 0$, deci din (1) deducem că $|f|'_d(x_0)$ și $|f|'_s(x_0)$ există și sînt 0, deci $|f|$ este derivabilă în x_0 și $|f|'(x_0) = 0$.

Corolar 1. *Fie* $I \subseteq \mathbf{R}$ *un interval,* $x_0 \in \mathring{I}$ *și* $f, g : I \to \mathbf{R}$ *două funcții derivabile în* x_0. *Atunci*:

1° *Dacă* $f(x_0) \neq g(x_0)$, *rezultă că funcțiile* $\max\{f, g\}$ *și* $\min\{f, g\}$ *sînt derivabile în* x_0;

2° *Dacă* $f(x_0) = g(x_0)$, *rezultă că funcție* $\max\{f, g\}$ (*resp.* $\min\{f, g\}$) *este derivabilă în* $x_0 \Leftrightarrow f'(x_0) = g'(x_0)$.

Dem. 1° Prin definiție $\max\{f, g\} = \frac{f + g + |f - g|}{2}$. Dacă $f(x_0) \neq g(x_0)$, avem $h(x_0) \neq 0$, unde $h = f - g$. Cum h este derivabilă în x_0, rezultă (P.6.1.11 (1°)) $|h|$ derivabilă în x_0, deci $\frac{f + g + |f - g|}{2}$ este derivabilă în x_0.

2° Dacă f și g sînt derivabile în x_0, rezultă că $f + g$ este derivabilă în x_0. Evident avem $\max\{f, g\}$ derivabilă în $x_0 \Leftrightarrow |f - g|$ derivabilă în $x_0 \Leftrightarrow (f - g)'(x_0) = 0$ (P. 6.1.11. (2°)) $\Leftrightarrow f'(x_0) = g'(x_0)$.

Corolar 2. *Fie* $I \subseteq \mathbf{R}$ *un interval,* $x_0 \in \mathring{I}$ *și* $f : I \to \mathbf{R}$ *derivabilă în* x_0. *Atunci* 1° *Dacă* $f(x_0) \neq 0$, *rezultă că* f^+ *și* f^- *sînt derivabile în* x_0; 2° *Dacă* $f(x_0) = 0$, *rezultă*: f^+ (*resp.* f^-) *este derivabilă în* $x_0 \Leftrightarrow f'(x_0) = 0$.

Corolar 3. *Fie* $I \subseteq \mathbf{R}$ *un interval și* $f : I \to \mathbf{R}$ *o funcție derivabilă cu* $f'(x) \neq 0$, $(\forall)\ x \in \mathring{I}$. *Atunci* $|f|$ *este derivabilă pe* $\mathring{I}$ (*pe* I) $\Leftrightarrow f > 0$ *sau* $f < 0$ *pe* $\mathring{I}$ (*resp.* $f \geqslant 0$ *sau* $f \leqslant 0$ *pe* I).

Dem. ($\Rightarrow$) Presupunem că $(\exists)\ x_1, x_2 \in \mathring{I}$, $x_1 < x_2$, cu $f(x_1) \cdot f(x_2) < 0$. Atunci $(\exists)\ x_0 \in (x_1, x_2)$ cu $f(x_0) = 0$, deci $f'(x_0) = 0$ absurd etc.

Corolar 4. *Fie* P *o funcție polinomială cu coeficienți reali și* $x_0 \in \mathbf{R}$. *Atunci* 1° Dacă $P(x_0) \neq 0$, *rezultă că* $|P|$ *este derivabilă în* x_0; 2° *Dacă* $P(x_0) = 0$, *rezultă*: $|P|$ *derivabilă în* $x_0 \Leftrightarrow x_0$ *nu este rădăcină simplă.*

Dem. 2° Din P. 6.1.11. (2°) rezultă: $|P|$ derivabilă în $x_0 \Leftrightarrow P'(x_0) = 0$. Însă $P(x_0) = P'(x_0) = 0 \Leftrightarrow x_0$ este rădăcină de ordin $\geqslant 2$.

Corolar 5. *Fie* $I \subseteq \mathbf{R}$ *un interval,* $x_0 \in \mathring{I}$ *și* $f : I \to \mathbf{R}$. *Dacă* f *este derivabilă în* x_0, $f(x_0) = 0$ *și* $f'(x_0) \neq 0$, *atunci* $|f|$ *admite derivate laterale în* x_0, *diferite între ele.*

6.1.12. Derivatele unor funcții uzuale

1° $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$. În particular avem:

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}\,(\forall)\ x \in \mathbf{R}^*; \quad (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}},\ (\forall)\ x \in \mathbf{R}_+^*.$$

2° $(\sin x)' = \cos x,\ (\forall)\ x \in \mathbf{R}$;

3° $(\cos x)' = -\sin x,\ (\forall)\ x \in \mathbf{R}$;

4° $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x,\ (\forall)\ x \in \mathbf{R} \setminus \left(\dfrac{\pi}{2} + \pi\mathbf{Z}\right)$;

5° $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x} = -(1 + \operatorname{ctg}^2 x),\ (\forall)\ x \in \mathbf{R} \setminus \pi\mathbf{Z}$;

6° $(a^x)' = a^x \ln a,\ (\forall)\ x \in \mathbf{R}\ (0 < a \neq 1)$. În particular avem

$$(e^x)' = e^x,\ (\forall)\ x \in \mathbf{R};$$

7° $(\ln x)' = \dfrac{1}{x},\ (\forall)\ x \in \mathbf{R}_+$

8° $(\operatorname{arc\,sin} x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}},\ (\forall)\ x \in (-1, 1)$;

9° $(\operatorname{arc\,cos} x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}},\ (\forall)\ x \in (-1, 1)$;

10° $(\operatorname{arc\,tg} x)' = \dfrac{1}{1 + x^2},\ (\forall)\ x \in \mathbf{R}$;

11° $(\operatorname{arc\,ctg} x)' = -\dfrac{1}{1 + x^2},\ (\forall)\ x \in \mathbf{R}$;

12° $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x,\ (\forall)\ x \in \mathbf{R}$;

13° $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x,\ (\forall)\ x \in \mathbf{R}$;

14° $(\ln(x + \sqrt{a^2 + x^2}))' = \dfrac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}},\ (\forall)\ x \in \mathbf{R}\ (a \neq 0)$;

15° $\left(\dfrac{1}{2a} \ln \dfrac{x - a'}{x + a}\right)' = \dfrac{1}{x^2 - a^2},\ (\forall)\ |x| > a\ (a > 0)$;

16° $\left(\dfrac{1}{2a} \ln \dfrac{a + x'}{a - x}\right)' = \dfrac{1}{a^2 - x^2},\ (\forall)\ |x| < a\ (a > 0)$

6.2. Derivate de ordin superior

6.2.1. Definiție. Fie $A \subseteq \mathbf{R}$ o mulțime cu $A' \subseteq A'$ și $f: A \to \mathbf{R}$ o funcție derivabilă. Dacă f' este derivabilă, vom pune $f'' := (f')'$ și în general $f^{(n)} := (f^{(n-1)})'$, dacă $f^{(n-1)}$ este derivabilă, pentru $n \in \mathbf{N}$ fixat. Funcția $f^{(n)}$ se numește *derivata de ordinul n* a funcției f. Vom spune că f este de *clasă n* și vom scrie $f \in \mathcal{C}^n(A)$, dacă $f', f'', \ldots f^{(n)}$ există și $f^{(n)}$ este continuă. Vom spune că f este de *clasă infinit* sau *indefinit derivabilă*, și vom scrie $f \in \mathcal{C}^\infty(A)$, dacă f este de clasă n, $(\forall)\ n \geqslant 0$.

6.2.2. Propoziție. *Fie $A \subseteq \mathbf{R}$ o mulțime cu $A' \subseteq A$ și $f: A \to \mathbf{R}$ o aplicație. Atunci $f \in \mathcal{C}^n(A) \Leftrightarrow (\forall)\ x_0 \in A$, există $V \subseteq A$ o vecinătate a lui x_0 a.î. $f|_V \in \mathcal{C}^n(V)$.*

Dem. Pentru $n = 1$ afirmația rezultă din P. 6.1.5. Aplicăm mai departe principiul inducției.

6.2.3. Propoziție (F o r m u l a l u i L e i b n i z). *Fie $A \subseteq \mathbf{R}$ o mulțime cu $A' \subseteq A$ și $f, g : A \to \mathbf{R}$ două funcții de n ori derivabile într-un punct $x_0 \in A$. Atunci fg este de n ori derivabilă în x_0 și avem relația :*

$$(fg)^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0)g^{(0)}(x_0) + C_n^1 f^{(n-1)}(x_0)g'(x_0) + \ldots + C_n^n f^{(0)}(x_0)g^{(n)}(x_0).$$

Dem. Fie $P(n)$ relația de demonstrat. Să o arătăm prin inducție relativ la n. $P(1)$ este adevărată : $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x)\,g'(x_0)$. Fie $k \geqslant 1$ cu $P(k)$ adevărată. Atunci avem :

$$(fg)^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0)g^{(0)}(x_0) + C_k^1 f^{(k-1)}(x_0)g'(x_0) + \ldots + C_k^k f^{(0)}(x_0)g^{(k)}(x_0),$$

de unde prin derivare obținem :

$$(fg)^{(k+1)}(x_0) = (f^{(k+1)}(x_0)g^{(0)}(x_0) + f^{(k)}(x_0)g'(x_0)) + (C_k^1 f^{(k)}(x_0)g'(x_0) +$$

$$+ C_k^1 f^{(k-1)}(x_0)g''(x_0)) + \ldots + (C_k^k f'(x_0)g^{(k)}(x_0) + C_k^k f^{(0)}(x_0)g^{(k+1)}(x_0)) =$$

$$= f^{(k+1)}(x_0)g^{(0)}(x_0) + C_{k+1}^1 f^{(k)}(x_0)g'(x_0) + \ldots + C_{k+1}^{k+1} f^{(0)}(x_0)g^{(k+1)}(x_0)$$

am utilizat relația $C_k^{j-1} + C_k^j = C_{k+1}^j j = \overline{1,\ k}$), deci $P(k+1)$ este adevărată. Aplicăm mai departe principiul inducției.

Corolar 1. *Fie $A \subseteq \mathbf{R}$ o mulțime cu $A' \subseteq A$ și $n \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$. Dacă $f, g \in \mathcal{C}^n(A)$, atunci $fg \in \mathcal{C}^n(A)$.*

6.2.4. Propoziție. *Să se stabilească relațiile :*

$$1^\circ\ (\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$$
$$2^\circ\ (\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) \Bigg| \ (\forall)\ x \in \mathbf{R},\ (\forall)\ n \in \mathbf{N};$$

$3^\circ)\ (\ln x)^{(n)} = (-1)^{n+1}\,(n-1)!\,x^{-n},\ (\forall)\ x \in \mathbf{R}_+^*,\ (\forall)\ n \in \mathbf{N};$

$4^\circ\ (a^x)^{(n)} = a^x(\ln a)^n,\ (unde\ a > 0),\ (\forall)\ x \in \mathbf{R},\ (\forall)\ n \in \mathbf{N};$

$5^\circ\ (x^n)^{(m)} = m(m-1)\ldots(m-n+1)x^{m-n},\ (\forall)\ x \in \mathbf{R},\ (\forall)\ n \in \overline{1,\ m};$

$6^\circ\ (\mathrm{e}^{-x^2})^{(n)} = P_n(x)\,\mathrm{e}^{-x^2},\ (\forall)\ x \in \mathbf{R}, (\forall)\ n \in \mathbf{N},$ *unde P polinom de gradul n.*

Dem. $1^\circ\ (\sin x)' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right), (\forall)\ x \in \mathbf{R}.$

Fie $n \geqslant 1$ a.î. $(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right), (\forall)\ x \in \mathbf{R}$. Atunci

$$(\sin x)^{(n+1)} = \left(\sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)\right)' = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + (n+1)\frac{\pi}{2}\right).$$

Aplicăm mai departe principiul inducției.

2° Se raționează ca în 1°.

$3^\circ\ (\ln x)' = \dfrac{1}{x} = (-1)^{1+1} \cdot 0!\,x^{-1},\ (\forall)\ x \in \mathbf{R}_+^*$

Fie $n \geqslant 1$ a.î. $(\ln x)^{(n)} = (-1)^{n+1}(n-1)!\,x^{-n}$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}_+^*$. Atunci

$(\ln x)^{(n+1)} = (-1)^{n+1} \cdot (n-1)!\,(-n)x^{-n-1} = (-1)^{n+2}n!\,x^{-(n+1)},\ (\forall)\ x \in \mathbf{R}_+^*$.

Aplicăm mai departe principiul inducției.

Analog se arată și relațiile 4°–6°.

6.3. Teoremele lui Rolle, Lagrange, Cauchy și consecințele lor

6.3.1. Teoremă (F e r m a t). *Fie* $I \subseteq \mathbf{R}$ *un interval,* $f : I \to \mathbf{R}$ *o funcție și* $x_0 \in \overset{\circ}{I}$ *un punct de extrem local pentru* f. *Dacă* f *este derivabilă în* x_0, *atunci* $f'(x_0) = 0$

Dem. Presupunem că x_0 este maxim local pentru f. Atunci $(\exists)\ \delta > 0$ a.î. $(x_0 - \delta,\ x_0 + \delta) \subseteq I$ și $f(x) \leqslant f(x_0)$, $(\forall)\ x \in (x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$. Evident avem :

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \begin{cases} \geqslant 0, & (\forall)\ x \in (x_0 - \delta,\ x_0) \\ \leqslant 0, & (\forall)\ x \in (x_0,\ x_0 + \delta), \end{cases}$$

deci

$$f'_s(x_0) = \lim_{x \nearrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geqslant 0,\ f_d(x_0) = \lim_{x \searrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leqslant 0$$

și deci

$$0 \leqslant f'_s(x_0) = f'(x_0) = f'_d(x_0) \leqslant 0 \Leftrightarrow f'(x_0) = 0.$$

Corolar 1. *Fie* $I \subseteq \mathbf{R}$ *un interval și* $f : I \to \mathbf{R}$ *o funcție derivabilă.* Atunci *extremele locale ale funcției* f *se află printre soluțiile ecuației* $f'(x) = 0$.

Observație. Dacă $x_0 \in I \setminus \overset{\circ}{I}$, atunci T. 6.3.1. nu este numaidecît adevărată.

Contraexemplu. Fie $f(x) = x$, $x \in [0, 1]$. Atunci $x = 0$ (resp. $x = 1$) este minim (resp. maxim) absolut pentru f și $f'(0) = 1$, $f'(1) = 1$

6.3.2. Teoremă (R o l l e). *Fie* $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$ *și* $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ *o funcție cu proprietățile* : 1° f *este continuă pe* $[a, b]$; 2° f *este derivabilă pe* (a, b) ; 3° $f(a) = f(b)$. *Atunci există* $c \in (a, b)$ *a.î.* $f'(c) = 0$.

Dem. $I := [a, b]$ fiind o mulțime mărginită și închisă, decicompactă și f continuă, $(\exists)\ x_0, x_1 \in [a, b]$ a.î. $f(x_0) \leqslant f(x) \leqslant f(x_1)$ $(\forall)\ x \in I$.

(i) Dacă $f(x_0) = f(x_1)$, atunci f constantă, deci $f' = 0$.

(ii) Dacă $f(x_0) \neq f(x_1)$, atunci $x_0 \notin \{a, b\}$ sau $x_1 \notin \{a, b\}$, altfel, din $x_0 \in \{a, b\}$ și $x_1 \in \{a, b\}$ rezultă că $f(x_0) = f(x_1) = f(a) = f(b)$, absurd. Așadar $x_0 \in (a, b)$ sau $x_1 \in (a, b)$; presupunem spre exemplu că $x_0 \in (a, b)$. Cum $x_0 \in \overset{\circ}{I}$ și x_0 este punct de minim absolut, deci punct de minim local, din T. 6.3.1. rezultă că $f'(x_0) = 0$.

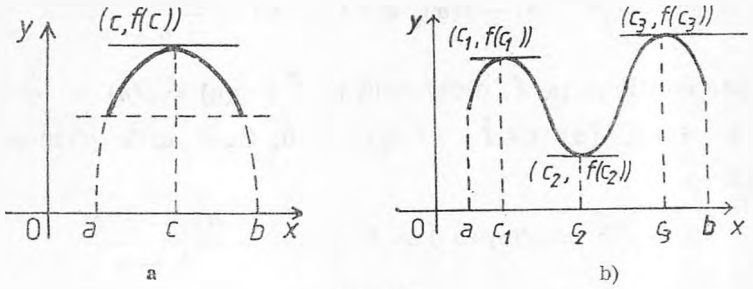
Corolar 1. *Fie* $I \subseteq \mathbf{R}$ *un interval și* $f : I \to \mathbf{R}$ *o funcție derivabilă. Atunci* : 1° *Între două soluții consecutive ale ecuației* $f(x) = 0$ *se află cel puțin o soluție a ecuației* $f'(x) = 0$; 2° *Între două soluții consecutive* x_1, x_2 *ale ecuației* $f(x) = 0$ *se află cel mult o soluție a ecuației* $f(x) = 0$ *și exact una, dacă* $f_1(x_1) \cdot f(x_2) < 0$.

Corolar 2. *Fie* $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ *o funcție de* n *ori derivabilă. Dacă* $(\exists)\ a \leqslant x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ *a.î.* $f(x_k) = 0$, $(\forall)\ k = \overline{0, n}$, *atunci* $(\exists)\ c \in (a, b)$ *a.î.* $f^{(n)}(c) = 0$.

Dem. Aplicînd T. 6.3.2. rezultă că f' se anulează în cel puțin n puncte distincte $c_i \in (x_{i-1}, x_i)$, $(i = \overline{1, n})$. Aplicînd din nou T.6.3.2. rezultă că f'' se anulează în cel puțin $n - 1$ puncte distincte $c'_i \in (c^1_{i-1}, c^1_i)(i = \overline{2, n})$ etc.

3.3.3. Semnificația geometrică a teoremei lui Rolle

Fie $f: [a, b] \to \mathbf{R}$ o funcție continuă pe $[a, b]$, derivabilă pe (a, b) și cu $f(a) = f(b)$. Atunci există cel puțin un punct $c \in (a, b)$ a.î. tangenta geometrică la graficul lui f în punctul $(c, f(c))$ este paralelă cu axa Ox (fig. 14.a) și b))



a) b)

Fig. 14

Observația 1. Fie $f:[a, b] \to \mathbf{R}$ o funcție continuă pe $[a, b]$, derivabilă pe (a, b) și cu $f(a) = f(b)$. Atunci ecuația $f'(x) = 0$ poate avea o soluție, un număr finit arbitrar de soluții sau o infinitate numerabilă de soluții.

Exemplu 1. Fie $f(x) = x^2$, $x \in [-1, 1]$. Atunci $f'(x) = 0$ are exact o soluție: $x = 0$.

Exemplul 2. Fie $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right)x$, $x \in [0, 1]$. Atunci ecuația $f'(x) = 0$ are exact $n + 1$ soluții și anume $x_k = \frac{2k+1}{2n+2}$ $(k = \overline{0, n})$.

Exemplul 3. Fie $f(x) = x \sin \frac{\pi}{x}$, dacă $x \in (0, 1]$ și $f(0) = 0$. Atunci $f\left(\frac{1}{n}\right) = 0$, $(\forall)\ n \in \mathbf{N}$, deci aplicînd teorema lui Rolle pe intervalul $\left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$ $(n \geqslant 1)$ rezultă că f' se anulează cel puțin într-un punct x_n. Așadar ecuația $f'(x) = 0$ are o infinitate numerabilă de soluții.

Observația 2. Fiecare din condițiile teoremei lui Rolle sînt *esențiale*.

Exemplul 1. Fie $f(x) = x$, $x \in [0, 1]$. Atunci f este derivabilă pe $[0, 1]$ și $f(0) \neq f(1)$. Evident $f'(x) \neq 0$, $(\forall)\ x \in [0, 1]$.

Exemplul 2. Fie $f(x) = x^2$, dacă $x \in (0, 1]$ și $f(0) = 1$. Atunci f derivabilă pe $(0,1)$, $f(0) = f(1)$, însă f nu este continuă în 0. Evident $f'(x) \neq 0$, $(\forall)\ x \in (0, 1)$.

Exemplul 3. Fie $f(x) = |x|$, $x \in [-1, 1]$. Atunci f este continuă pe $[-1, 1]$, $f(-1) = f(1)$, f derivabilă pe $[-1, 1] \setminus \{0\}$ și nederivabilă în $x = 0$. Evident $f'(x) \neq 0$, $(\forall)\ x \in [-1, 1] \setminus \{0\}$.

Observație 3 Condițiile din ipoteza teoremei lui Rolle sînt suficiente și nu numaidecît necesare pentru ca derivata să se anuleze într-un punct.

Exemplul 1. Fie $f(x) = x^2$, dacă $x \in [-1, 2] \cap \mathbf{Q}$ și $f(x) = 0$, $(\forall)\ x \in [-1, 2] \setminus \mathbf{Q}$. Atunci f este derivabilă și continuă numai în $x = 0$ și avem $f'(0) = 0$.

Exemplul 2. Fie $f(x) = x^3$, $x \in [-1, 1]$. Atunci f este derivabilă pe $[-1, 1]$, însă $f(-1) \neq f(1)$. Evident f' se anulează în punctul $x = 0$.

6.3.4. Teoremă (Lagrange). *Fie* $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$ *şi* $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ *o funcţie cu proprietăţile*: 1° f *continuă pe* $[a, b]$; 2° f *derivabilă pe* (a, b). *Atunci* $(\exists)\ c \in (a, b)$ *a.î.* $f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$.

Dem. Fie $I := [a, b]$ şi $g : I \to \mathbf{R}$ *o funcţie definită astfel*:

$$g(x) = \lambda(x - a) - f(x),\ x \in I; \quad \lambda := \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Evident g este continuă pe I, derivabilă pe $\mathring{I}$ şi $g(a) = g(b) = -f(a)$.

Atunci cf. T. 6.3.2. $(\exists)\ c \in \mathring{I}$ a.î. $g'(c) = 0$. Cum însă $g'(x) = \lambda - f'(x)$, $x \in \mathring{I}$, rezultă că

$$\lambda - f'(c) = g'(c) = 0 \Leftrightarrow f'(c) = \lambda = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Corolar 1. *Fie* $I \subseteq \mathbf{R}$ *un interval şi* $f : I \to \mathbf{R}$ *o funcţie continuă pe* I *şi derivabilă pe* $\mathring{I}$. *Atunci* $(\forall)\ x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$, *există* $c \in (x_1, x_2)$ *a.î.* $f(x_1) - f(x_2) = (x_1 - x_2)\ f'(c)$.

Dem. Aplicăm T. 6.3.4. pentru funcţia $f|_{[x_1, x_2]}$.

Corolar 2. *Fie* $I \subseteq \mathbf{R}$ *un interval şi* $f : I \to \mathbf{R}$ *o funcţie derivabilă. Atunci* f *constantă* $\Leftrightarrow f' = 0$.

Dem. $(\Leftarrow)$ Fie $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$, fixaţi, Cf. Cor. 1 $(\exists)\ c \in (x_1, x_2)$ a.î. $f(x_1) - f(x_2) = (x_1 - x_2)f'(c)$. Cum $f'(c) = 0$, rezultă $f(x_1) = f(x_2)$, prin urmare f este constantă.

Corolar 3. *Fie* $I \subseteq \mathbf{R}$ *un interval şi* $f : I \to \mathbf{R}$ *o funcţie derivabilă. Atunci* f *este monoton crescătoare* (*resp. descrescătoare*) $\Leftrightarrow f' \geqslant 0$ (*resp.* $f' \leqslant 0$).

Dem. $(\Rightarrow)$ Fie $x_0 \in I$ fixat; presupunem $x_0 < \sup I$. Deoarece f este monoton crescătoare, avem:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geqslant 0,\ (\forall)\ x \in I \cap (x_0, +\infty),$$

deci

$$f'(x_0) = f'_d(x_0) = \lim_{x \searrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geqslant 0.$$

Raţionament analog dacă $x_0 > \inf I$

$(\Leftarrow)$ Presupunem $f' \geqslant 0$ şi fie $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$ fixaţi. Atunci cf. T.6.3.4. $(\exists)\ c \in (x_1, x_2)$ a.î. $f(x_1) - f(x_2) = (x_1 - x_2)f'(c)$. Cum $x_1 - x_2 < 0$ şi $f'(c) \geqslant 0$, rezultă că $f(x_1) - f(x_2) \leqslant 0$, deci $f(x_1) \leqslant f(x_2)$, prin urmare f este monoton crescătoare.

Corolar 4. *Fie* $I \subseteq \mathbf{R}$ *un interval şi* $f : I \to \mathbf{R}$ *o funcţie derivabilă. Atunci* 1° *Dacă* $f' > 0$ (*resp.* $f' < 0$), *rezultă că* f *este strict crescătoare* (*resp. descrescătoare*); 2° *Dacă mulţimea* $A := \{x \in I;\ f'(x) \neq 0\}$ *este densă în* I, *rezultă că* f *este strict crescătoare* (*resp. descrescătoare*) $\Leftrightarrow f' \geqslant 0$ (*resp.* $f' \leqslant 0$).

Dem. 1° Se raţionează ca în Cor. 3.

2° $(\Leftarrow)$ Dacă $f' \geqslant 0$, rezultă (Cor. 3) f monoton crescătoare. Fie $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$ fixaţi. Presupunem că $f(x_1) = f(x_2)$; atunci ţinînd seama că avem $f(x_1) \leqslant f(x) \leqslant f(x_2)$, $(\forall)\ x \in [x_1, x_2]$, rezultă f constantă pe $[x_1, x_2]$. deci f' se anulează pe $[x_1, x_2]$ şi deci $A \cap (x_1, x_2) = \emptyset$. Aceasta contrazice faptul că A este densă în I. Rămîne că $f(x_1) \neq f(x_2)$, deci $f(x_1) < f(x_2)$ şi deci f este strict crescătoare.

Corolar 5. *Fie* $I \subseteq \mathbf{R}$ *un interval de capete* a, $b \in \overline{\mathbf{R}}$ *și* $f : I \to \mathbf{R}$ *o funcție derivabilă pe* $\mathring{I}$. *Atunci avem* :

1° $f' \geqslant 0$ *pe* $\mathring{I}$ *și* $f(a+) \geqslant 0$ (*resp.* > 0) $\Rightarrow f \geqslant 0$ (*resp* > 0) pe $\mathring{I}$;

2° $f' \geqslant 0$ *pe* $\mathring{I}$ *și* $f(b-) \leqslant 0$ (*resp.* < 0) $\Rightarrow f \leqslant 0$ (*resp.* < 0) *pe* $\mathring{I}$;

3° $f' \leqslant 0$ *pe* $\mathring{I}$ *și* $f(a+) \leqslant 0$ (*resp.* < 0) $\Rightarrow f \leqslant 0$ (*resp.* < 0) *pe* $\mathring{I}$;

4° $f' \leqslant 0$ *pe* $\mathring{I}$ *și* $f(b-) \geqslant 0$ (*resp.* > 0) $\Rightarrow f \geqslant 0$ (*resp.* > 0) *pe* $\mathring{I}$.

Dem. 1° Dacă $f' \geqslant 0$ pe $\mathring{I}$, rezultă că f este strict monotonă pe $\mathring{I}$, deci $f(a+)$ și $f(b-)$ există. Dacă $(\exists)\ x_0 \in \mathring{I}$ cu $f(x_0) < 0$, atunci $f(x) \leqslant f(x_0)$ $(\forall)$ $x \in (a, x_0)$, deci $f(a+) = \inf_{x \in (a,\, x_0)} f(x) \leqslant f(x_0) < 0$, absurd. Rămîne că $f(x) \geqslant 0$ $(\forall)$ $x \in \mathring{I}$ (fig. 15a).

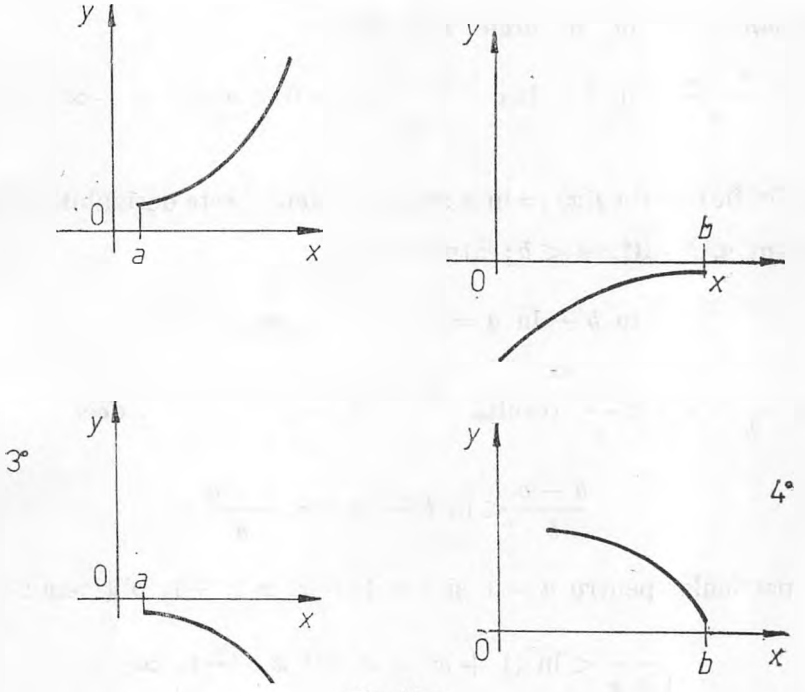


Fig. 15 a

Corolar 6. *Fie* $I \subseteq \mathbf{R}$ *un interval* (*resp. compact*) *și* $f : I \to \mathbf{R}$ *o funcție derivabilă cu* f' *mărginită* (*resp. continuă*). *Atunci* f *este lipschitziană.*

Dem. Fie $\lambda := \sup_{x \in I} |f'(x)|$. Atunci $(\forall)$ $x, y \in I$, $x < y$, $(\exists)$ $\xi \in (x, y)$ a.î. $f(x) - f(y) = (x - y)\ f'(\xi)$, deci $|f(x) - f(y)| \leqslant \lambda |x - y|$ etc.

Observație. Dacă o funcție $f : I \to \mathbf{R}$ este derivabilă și strict monotonă, nu rezultă numaidecît că $f' > 0$.

Contraexemplu : $f(x) = x^3$, $x \in \mathbf{R}$, este derivabilă, strict monotonă și $f'(0) = 0$.

Semnificația geometrică a teoremei lui Lagrange

Fie $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ o funcție continuă pe $[a, b]$ și derivabilă pe (a, b). Atunci există cel puțin un punct $c \in (a, b)$ a.î. tangenta geometrică la graficul

ui f în punctul $(c, f(c))$ este paralelă cu dreapta care trece prin punctele $A(a, f(a))$ = şi $B(b, f(b))$ (fig. 15. b)).

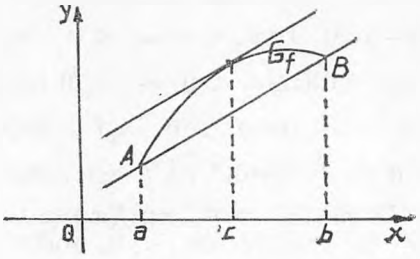


Fig. 15 b

Exemplul 1. Să se arate inegalităţile:

$$\frac{b-a}{a} < \ln b - \ln a < \frac{b-a}{a}, \ (\forall)\ 0 < a < b < +\infty.$$

Într-adevăr, fie funcţia $f(x) := \ln x, x \in \mathbf{R}_+^*$. Evident f este derivabilă şi $f'(x) = \frac{1}{x}$.

Fixăm $a,\ b \in \mathbf{R}_+^*,\ a < b$; atunci avem :

$$\ln b - \ln a = (b-a)\frac{1}{\zeta},\ a < \zeta < b$$

Deoarece $\frac{1}{b} < \frac{1}{\zeta} < \frac{1}{a}$, rezultă $\frac{b-a}{b} < \frac{b-a}{\zeta} < \frac{b-a}{a}$, deci

$$\frac{b-a}{b} < \ln b - \ln a < \frac{b-a}{a}$$

În particular pentru $a = 1$ şi $b = 1 + x,\ x > -1$, obţinem :

$$\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x,\ (\forall)\ x \in (-1,\ \infty),$$

iar dacă $a = x$ şi $b = 1 + x, x \in \mathbf{R}_+^*$, obţinem :

$$\frac{1}{1+a} < \ln(1+x) - \ln x < \frac{1}{x},\ (\forall)\ x \in \mathbf{R}_+^*$$

Exemplul 2. Să se arate inegalitatea $e^x > 1 + x,\ (\forall)\ x \in \mathbf{R}_*$.

Fie $f(x) = e^x - 1 - x,\ x \in \mathbf{R}$. Evident f este derivabilă şi $f'(x) = e^x - 1$, deci $f'(x) < 0$, dacă $x \in \mathbf{R}_-^*$, $f'(x) > 0$, dacă $x \in \mathbf{R}_+^*$ şi $f'(0) = 0$. Din T.6.3.4. Cor. 4 rezultă că f este strict descrescătoare pe $\mathbf{R}_-^*$ şi strict crescătoare pe $\mathbf{R}_+^*$, deci 0 este punct de minim absolut şi este unic determinat. Atunci putem scrie :

$$f(x) > f(0),\ (\forall) x \in \mathbf{R}^* \Leftrightarrow e^x > 1 + x,\ (\forall)\ x \in \mathbf{R}^* \qquad (1)$$

Din inegalitatea (1) și din P. 2.1.28. Cor. 2, rezultă inegalitățile:

$$1 + \sum_{k=1}^{n} x_k \leqslant \prod_{k=1}^{n} (1 + x_k) \leqslant e^{\sum_{k=1}^{n} x_k}, \tag{2}$$

dacă $x_k > -1$ $(k = \overline{1, n})$ și toți având același semn.

Din (2) pentru $x_k = \frac{1}{k}$, $(k = \overline{1, n})$, obținem inegalitatea $e^{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}} \geqslant$

$\geqslant \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k}\right) = n + 1$, din care deducem din nou că seria $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n}$ este divergentă.

Exemplul 3. Să se arate că $e^x \geqslant x^e$, $(\forall)$ $x \in \mathbf{R}_+^*$ *și* e *este singurul număr pozitiv cu această proprietate.*

Fie funcția $f(x) := \frac{1}{x} \ln x$, $x \in \mathbf{R}_+^*$. Evident f este derivabilă și avem $f'(x) = \frac{1}{x^2}(1 - \ln x)$, $(\forall)$ $x \in \mathbf{R}_+^*$, deci $f'(x) > 0$, dacă $x \in (0, e)$, $f'(x) < 0$, dacă $x \in (e, \infty)$ și $f'(e) = 0$. Așadar f este strict crescătoare pe $(0, e)$ și strict descrescătoare pe (e, ∞), deci e este punct de maxim absolut și el este unic determinat. Atunci putem scrie:

$$e^{-1} = f(e) > f(x) = \frac{1}{x} \ln x, \ (\forall)\ x \in \mathbf{R}_+^* \setminus \{e\} \Leftrightarrow e^x > x^e, \ (\forall)\ x \in \mathbf{R}_+^* \setminus \{e\}$$

Fie acum $a \in \mathbf{R}_+^*$ cu proprietatea $a^x \geqslant x^a$, $(\forall)$ $x \in \mathbf{R}_+^*$. Atunci $x \ln a \geqslant$ $\geqslant a \ln x$, $(\forall)$ $x \in \mathbf{R}_+^*$, deci $f(a) = \frac{1}{a} \ln a \geqslant \frac{1}{x} \ln x$, $(\forall)$ $x \in \mathbf{R}_+^*$. Aceasta înseamnă că a este punct de maxim global, deci $a = e$.

În particular obținem $\boxed{e^\pi > \pi^e}$.

6.3.5. Teoremă (C a u c h y). *Fie* $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$ *și* $f, g : [a, b] \to \mathbf{R}$ *două funcții cu proprietățile*: 1° f *și* g *sînt continue pe* $[a, b]$; 2° f *și* g *sînt derivabile pe* (a, b). *Atunci* $(\exists)$ $c \in (a, b)$ *a.î.*

$$(f(b) - f(a))\ g'(c) = (g(b) - g(a))\ f'(c).$$

Dem. Fie $I := [a, b]$ și $\varphi : I \to \mathbf{R}$ *o funcție definită astfel*

$$\varphi(x) = [f(b) - f(a)] \cdot [g(x) - g(a)] - [g(b) - g(a)][f(x) - f(a)].$$

Evident φ este continuă pe I, derivabilă pe $\overset{\circ}{I}$ și $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$. Atunci cf. T. 6.3.2. $(\exists)$ $c \in \overset{\circ}{I}$ *a.î.* $\varphi'(c) = 0$. Cum însă avem:

$$\varphi'(x) = [f(b) - f(a)]\ g'(x) - [g(b) - g(a)]\ f'(x), \quad x \in \overset{\circ}{I},$$

rezultă

$$[f(b) - f(a)]\ g'(c) - [g(b) - g(a)]\ f'(c) = \varphi'(c) = 0 \text{ etc.}$$

Corolar 1. *Fie* $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$ *şi* $f, g : [a, b] \to \mathbf{R}$ *două funcţii cu proprietăţile* : 1° f *şi* g *sînt continue pe* $[a, b]$; 2° f *şi* g *sînt derivabile pe* (a, b) *şi* $g'(x) \neq 0$, $(\forall)\ x \in (a, b)$. *Atunci* $g(a) \neq g(b)$ *şi* $(\exists)\ c \in (a, b)$ *a.î.*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Dem. Dacă $g(a) = g(b)$, atunci din T. 6.2.3. rezultă că $(\exists)\ x_0 \in (a, b)$ a.î. $g'(x_0) = 0$, absurd. Rămîne că $g(a) \neq g(b)$. Aplicăm mai departe T. 6.3.5.

6.3.6. Definiţie. Fie $I \subseteq \mathbf{R}$ un interval şi $f : I \to \mathbf{R}$ o funcţie. Vom spune că f este *o derivată* (funcţie derivată), dacă există $g : I \to \mathbf{R}$ o funcţie derivabilă a.î. $g' = f$ i.e. $g'(x) = f(x)$, $(\forall)\ x \in I$.

6.3.7. Teoremă (D a r b o u x). Fie $I \subseteq \mathbf{R}$ *un interval şi* $f : I \to \mathbf{R}$ *o funcţie derivată. Atunci* f *are proprietatea Darboux.*

Dem. Fie $g : I \to \mathbf{R}$ derivabilă a.î. $g' = f$ şi fie $a, b \in I$, $a < b$ şi λ cuprins între $f(a)$ şi $f(b)$ fixaţi; presupunem că $f(a) < f(b)$, deci $f(a) < \lambda < f(b)$. Considerăm funcţia $\varphi(x) = g(x) - \lambda x$, $x \in I$. Evident φ este derivabilă şi avem

$$\varphi'(x) = g'(x) - \lambda = f(x) - \lambda,\ (\forall)\ x \in I,$$

deci

$$\varphi'(a) = f(a) - \lambda < 0\ ;\ \varphi'(b) = f(b) - \lambda > 0.$$

Deoarece

$$\lim_{x \searrow a} \frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{x - a} = \varphi'(a) < 0\ ;\ \lim_{x \nearrow b} \frac{\varphi(x) - \varphi(b)}{x - b} = \varphi'(b) > 0,$$

rezultă că există $c, d \in (a, b)$, $c < d$, cu proprietăţile :

$$\frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{x - a} < 0,\ (\forall)\ x \in (a, c)\ ;\ \frac{\varphi(x) - \varphi(b)}{x - b} > 0,\ (\forall)\ x \in (d, b),$$

deci

$$\varphi(x) < \varphi(a),\ (\forall)\ x \in (a, c)\ ;\ \varphi(x) \not< \varphi(b),\ (\forall)\ x \in (d, b). \tag{1}$$

Funcţia φ fiind continuă şi $[a, b]$ închis şi mărginit, $(\exists)\ x_0 \in [a, b]$ a.î. $\varphi(x_0) \leqslant \varphi(x)$, $(\forall)\ x \in [a, b]$. De aici şi din (1) rezultă că $x_0 \neq a$ şi $x_0 \neq b$, deci $x_0 \in (a, b)$. Atunci putem aplica T. 6.3.1, deci $\varphi'(x_0) = 0$ şi deci $f'(x_0) = \lambda$, prin urmare f are proprietatea Darboux.

Corolar 1. *Fie* $I \subseteq \mathbf{R}$ *un interval şi* $f : I \to \mathbf{R}$ *o funcţie derivabilă. Atunci* f' *are proprietatea Darboux.*

Corolar 2. *Fie* $I \subseteq \mathbf{R}$ *un interval şi* $f : I \to \mathbf{R}$ *o funcţie derivabilă. Dacă* $f'(x) \neq 0$, $(\forall)\ x \in I$, *atunci* $f'(x) > 0$, $(\forall)\ x \in I$ *sau* $f'(x) < 0$, $(\forall)\ x \in I$, *deci* f *este strict monotonă.*

Dem. Dacă ar exista $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$, cu $f'(x_1) \cdot f'(x_2) < 0$, atunci f' avînd proprietatea Darboux, ar exista $x_0 \in (x_1, x_2)$ cu $f'(x_0) = 0$, absurd.

Corolar 3 (t e o r e m a l u i R o l l e g e n e r a l i z a t ă). *Fie* $a, b \in \overline{\mathbf{R}}$, $a < b$ *şi* $f : (a, b) \to \mathbf{R}$ *o funcţie derivabilă cu proprietatea că* $f(a+)$, $f(b-)$ *există şi sînt egale. Atunci* $(\exists)\ c \in (a, b)$ *a.î.* $f'(c) = 0$.

Dem. Presupunem că $f'(x) \neq 0$ $(\forall)\ x \in (a, b)$. Atunci (Cor 2) f' păstrează semn constant, spre exemplu $f' > 0$, deci f este strict crescătoare. Fie $a < c < d < b$ fixaţi. Evident avem $f(x) < f(c)$, $(\forall)\ x \in (a, c)$, deci

$$f(a+) = \lim_{x \searrow a} f(x) = \lim_{x \searrow a} f|_{(a,c)}\ (x) \leqslant f(c).$$

Analog avem $f(b-) \geqslant f(d)$, deci $f(a+) \leqslant f(c) < f(d) \leqslant f(b-) = f(a+)$ absurd. Rămîne că $(\exists)\ c \in (a, b)$ cu $f'(c) = 0$.

Observație. Se pot da Cor. 3 demonstrații directe fără a utiliza teorema lui Darboux (v. P.7.3.10.)

Corolar 4 (teorema lui Cauchy generalizată). *Fie* $a, b \in \bar{\mathbf{R}}$, $a < b$ *și* $f, g : (a, b) \to \mathbf{R}$ *două funcții cu proprietățile*: 1° $f(a+)$, $f(b-)$, $g(a+)$, $g(b-)$ *există și sînt finite*; 2° f *și* g *sînt derivabile și* $g'(x) \neq 0$, $(\forall)\ x \in (a, b)$. *Atunci* $g(a+) \neq g(b-)$ *și* $(\exists)\ c \in (a, b)$ *a.î.*

$$\frac{f(b-) - f(a+)}{g(b-) - g(a+)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Dem. Avem $g(a+) \neq g(b-)$, altfel din Cor. 3 ar rezulta că $(\exists)\ c \in (a,b)$ cu $g'(c) = 0$, absurd. Fie mai departe $\varphi : (a, b) \to \mathbf{R}$ o funcție definită astfel:

$$\varphi(x) = [f(b-) - f(a+)] \cdot [g(x) - g(a+)] - [g(b-) - g(a+)] \cdot [f(x) - f(a+)]$$

Evident φ derivabilă și $\varphi(a+) = \varphi(b-) = 0$, deci cf. Cor. 3 $(\exists)\ c \in (a, b)$ a.î. $\varphi'(c) = 0$. Se continuă ca în T. 6.3.5.

6.3.8. Teoremă. *Fie* $I \subseteq \mathbf{R}$ *un interval,* $x_0 \in I$ *un punct și* $f : I \to \mathbf{R}$ *o funcție cu proprietățile*: 1° f *continuă pe* I; 2° f *derivabilă pe* $I \setminus \{x_0\}$; 3° $l = \lim\limits_{x \to x_0} f'(x)$ *există. Atunci* $f'(x_0)$ *există și este egală cu* l.

Dem. (i) $l \in \mathbf{R}$. Fie $\varepsilon > 0$ fixat; atunci cf. 3° $(\exists)\ \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ a.î.

$$|l - f'(x)| < \varepsilon\ (\forall)\ x \in V \cap I \setminus \{x_0\}, \tag{1}$$

unde $V = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Aplicînd T. 6.3.4. pe intervalul $[x_0, x]$, cu $x \in V \cap I \setminus \{x_0\}$, $x > x_0$, avem:

$$l - \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l - f'(\xi),\ \xi \in (x_0, x) \tag{2}$$

Raționament analog pentru $x \in V \cap I \setminus \{x_0\}$, $x < x_0$. Din (1) și (2) rezultă

$$\left| l - \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right| < \varepsilon,\ (\forall)\ x \in V \cap I \setminus \{x_0\},$$

deci $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ există și este egală cu l. prin urmare $f'(x_0)$ există și este egală cu l.

(ii) $l = +\infty$. Fie $c > 0$ fixat; atunci $(\exists)\ \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ a.î. $f'(x) \geqslant c$, $(\forall)$ $x \in V \cap I \setminus \{x_0\}$, unde V are semnificația de mai sus. Aplicînd T. 6.3.4. pe intervalul $[x_0, x]$, cu $x \in V \cap I \setminus \{x_0\}$, $x > x_0$, avem:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(\xi),\ \xi \in (x_0, x).$$

Raționament analog pentru $x \in V \cap I \setminus \{x_0\}$, $x < x_0$. Așadar

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geqslant c,\ (\forall)\ x \in V \cap I \setminus \{x_0\},$$

deci

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty,$$

prin urmare $f'(x_0)$ există și este egală cu $+\infty$.

(iii) Dacă $l = -\infty$ se raționează ca în cazul (ii).

Corolar 1. *Fie* $I \subseteq \mathbf{R}$ *un interval de capete* a *și* b, $x_0 \in I \setminus \{a\}$ *(resp.* $x_0 \in I \setminus \{b\}$*) un punct și* $f : I \to \mathbf{R}$ *o funcție cu proprietățile*: 1° f *continuă pe* I; 2° f *derivabilă pe* $I \setminus \{x_0\}$; 3° $l = \lim_{x \nearrow x_0} f'(x)$ *(resp.* $l = \lim_{x \searrow x_0} f'(x)$ *există). Atunci* $f'_s(x_0)$ *(resp.* $f'_d(x_0)$*) există și este egală cu* l.

Dem. Aplicăm T. 6.3.8. pentru intervalul $I_0 = (-\infty, x_0] \cap I$ (resp. $[x_0, \infty) \cap I$).

Corolar 2. *Fie* I_1, $I_2 \subseteq \mathbf{R}$ *două intervale disjuncte a.î.* $\sup I_1 = \inf I_2 = c \in I_1 \cup I_2$; *fie* $f : I_1 \cup I_2 \to \mathbf{R}$ *o funcție continuă și* $f_k := f|_{I_k} (k = \overline{1,2})$; *presupunem că* 1° f_k *este derivabilă pe* $\mathring{I}_k$ $(k = \overline{1,2})$; 2° $(\exists)$ $f'_1(c-)$, $(\exists)$ $f'_2(c+)$ *și sînt egale. Atunci* $(\exists)$ $f'(c)$ *și avem* $f'(c) = f'_1(c-) = f'_2(c+)$.

Dem. Aplicăm Cor. 1 pe $I_1 \cup \{c\}$ și $I_2 \cup \{c\}$.

Corolar 3. *Fie* $f : (a, b) \to \mathbf{R}$ *o funcție derivabilă. Dacă* $f'(a+)$ *există și este finită, atunci* $f(a+)$ *există și este finită; mai precis funcția* $\tilde{f} : [a, b) \to \mathbf{R}$ *definită astfel* $\tilde{f}(x) = f(x)$, *dacă* $x \in (a, b)$ *și* $\tilde{f}(a) = f(a+)$, *este derivabilă pe* $[a, b)$ *și avem* : $(\tilde{f})'(x) = f'(x)$, *dacă* $x \in (a, b)$ *și* $(\tilde{f})'(a) = f'(a+)$.

Dem. Fie $l := f'(a+)$. Evident $(\exists)$ $c \in (a, b)$ a.î. $|f'(x)| \leqslant M := 1 + |l|$, $(\forall)$ $x \in (a, c)$, deci din T. 6.3.4. rezultă

$$|f(x) - f(y)| \leqslant M|x - y|, \ (\forall) \ x, y \in (a, c).$$

și deci (P. 5.7.5. Cor. 1) $f|_{(a,c)}$ are limită finită în a, de unde rezultă că f are limită finită în a. Din T.5.5.23. deducem că funcția $\tilde{f}$ din enunț este continuă. Evident avem $(\tilde{f})'(x) = f'(x)$, $(\forall)$ $x \in (a, b)$, deci $\lim_{x \searrow a} (\tilde{f})'(x) = f'(a+)$ și deci (T. 6.3.8.) $\tilde{f}$ este derivabilă în a și derivata sa este egală cu $f'(a+)$.

Observația 1. Din T. 6.3.8. rezultă că aplicația f' este continuă în x_0.

Observația 2. În T. 6.3.8. condiția de continuitate a aplicației f în punctul x_0 este *esențială*.

Contraexemplu. Fie $f : [-1, 1] \to \mathbf{R}$ definită astfel $f(x) = 1$, dacă $x \in [-1, 1] \setminus \{0\}$ și $f(0) = 0$. Atunci $\lim_{x \to 0} f'(x) = 0$ și $f'(0)$ nu există: mai exact avem : $f'_s(0) = -\infty$ și $f'_d(0) = +\infty$.

Observația 3. Condițiile 1°–3° din T. 6.3.8. sînt *suficiente* și nu numaidecît *necesare* pentru existența derivatei lui f în x_0.

Contraexemplu. Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definită astfel $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$, dacă $x \neq 0$ și $f(0) = 0$. Evident f este continuă pe $\mathbf{R}$, derivabilă pe $\mathbf{R}^*$ și avem :

$$f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}, \ (\forall) \ x \in \mathbf{R}^*.$$

Deoarece $\lim_{x \to 0} 2x \sin \frac{1}{x} = 0$ și $\cos \frac{1}{x}$ nu are limită în 0, rezultă că f' nu are limită în 0. Așadar T. 6.3.8. *nu este aplicabilă*. Totuși pornind de la definiție se constată că $f'(0) = 0$:

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0.$$

Observația 4. Reciproca Cor. 3 nu este numaidecît adevărată (v. Contraexemplul de mai sus).

Exemplul 1. *Fie* $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ *o funcție definită astfel* $f(x)=\cos x$ *dacă* $x\geqslant 0$ *și* $f(x)=ax+b$, *dacă* $x<0$, *unde* a *și* b *sînt parametri reali. Să se determine* a *și* b *a.î.* f *să fie derivabilă în* 0.

Evident avem $f(0+)=\lim\limits_{x\searrow 0}\cos x=1$ și $f(0-)=\lim\limits_{x\nearrow 0}(ax+b)=b$, deci f este continuă în $0\Leftrightarrow f(0+)=f(0-)=f(0)\Leftrightarrow 1=b=1\Leftrightarrow \boxed{b=1}$

Mai departe avem $f'(x)=-\sin x$, dacă $x>0$ și $f'(x)=a$, dacă $x<0$. De aici rezultă că $f'(0+)=0$ și $f'(0-)=a$, deci $f'(0)=0$ și $f'_s(0)=a$. Așadar f este derivabilă în $0\Leftrightarrow f'_s(0)=f'_d(0)\Leftrightarrow \boxed{a=0}$.

Exemplul 2. *Fie* $f:\mathbf{R}\to(-1,1)$, *funcția lui Hahn i.e.* $f(x)=\dfrac{x}{1+|x|}$. *Să se cerceteze derivabilitatea lui* f *în* 0.

Evident avem

$$f'(x)=\frac{1\cdot(1+|x|)-x\cdot\frac{|x|}{x}}{(1+|x|)^2}=\frac{1}{(1+|x|)^2},\quad(\forall)\ x\in\mathbf{R}^*,$$

deci

$$f'(x)=\begin{cases}(1+x)^{-2}, & x>0\\ (1-x)^{-2}, & x<0\end{cases};\qquad f^{(n)}(x)=\begin{cases}(-1)^{n+1}n!\,(1+x)^{-n-1}, & x>0\\ n!\,(1-x)^{-n-1}, & x<0\end{cases}$$

și deci

$$\lim_{x\searrow 0}f^{(n)}(x)=(-1)^{n+1}n!,\quad\lim_{x\searrow 0}f^{(n)}(x)=n!,\quad(\forall)\ n\in\mathbf{N}.$$

Așadar $\lim\limits_{x\to 0}f'(x)=1$ și cum f este continuă în 0, rezultă că f este derivabilă în 0 și $f'(0)=1$; mai mult, f' este continuă în 0, deci f este de clasă $\mathcal{C}^1$. Deoarece $(f')'_s(0)=2$ și $(f')'_d(0)=-2$, rezultă că f nu este de două ori derivabilă în 0.

În particular obținem că funcțiile $f_1:\mathbf{R}_+\to[0,1)$ și $f_2:\mathbf{R}_-\to(-1,0]$ definite astfel $f_1(x)=\dfrac{x}{1+x}$ și $f_2(x)=\dfrac{x}{1-x}$, sînt indefinit derivabile și au derivatele nenule în fiecare punct.

6.3.9. Propoziție. *Fie* $I\subseteq\mathbf{R}$ *un interval de forma* (a,b) *sau* $(a,b]$ *cu* $a\in\mathbf{R}$ *și* $b\in\overline{\mathbf{R}}$ *și fie* $f:I\to\mathbf{R}$ *o funcție derivabilă. Atunci* $\lim\limits_{x\to a}f'(x)$ *există și este finită* $\Leftrightarrow\lim\limits_{\substack{x\to a,\ y\to a\\ x\neq y}}\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}$ *există și este finită. In acest caz cele două limite coincid.*

Dem. ($\Rightarrow$) Fie $l=\lim\limits_{x\to a}f'(x)$ și $x_n,\ y_n\in I$, $x_n\neq y_n$, $(\forall)\ n\geqslant 1$, cu $x_n\to a$, $y_n\to a$. Atunci $(\forall)\ n\geqslant 1$ avem: $\dfrac{f(x_n)-f(y_n)}{x_n-y_n}=f'(z_n)$, unde z_n este cuprins între x_n și y_n.

Cum $|z_n-a|\leqslant\max\{|x_n-a|,\ |y_n-a|\}$, $(\forall)\ n\geqslant 1$, rezultă că $z_n\to a$, deci $f'(z_n)\to l$ $(n\to\infty)$ și deci

$$\frac{f(x_n)-f(y_n)}{x_n-y_n}\to l\ (n\to\infty).$$

Prin urmare $\lim\limits_{\substack{x\to a,\ y\to a\\ x\neq y}} \dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}$ există și este egală cu l.

($\Leftarrow$) Fie $l=\lim\limits_{\substack{x\to a,\ y\to a\\ x\neq y}} \dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}$ și $\varepsilon>0$ fixat. Atunci $(\exists)\ 0<\eta<b-a$ a.î.

$$\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}-l\right|<\varepsilon,\ (\forall)\ x,\ y\in(a,\ a+\eta),\ x\neq y \tag{1}$$

deci

$$|f(x)-f(y)|\leqslant(|l|+\varepsilon)|x-y|,\ (\forall)\ x,\ y\in(a,\ a+\eta) \tag{2}$$

Din (2) și din P.5.7.5. Cor. 1 rezultă că f are limită finită în a, deci (T.5.5.23) f poate fi prelungită la o funcție continuă $g: I\cup\{a\}\to\mathbf{R}$. Fixăm în (1) pe $x\in(a,\ a+\eta)$ și trecem la limită după y, $y\to a$; obținem:

$$\left|\frac{|f(x)-g(a)}{x-a}-l\right|\leqslant\varepsilon,\ (\forall)\ x\in(a,\ a+\eta).$$

Cum $g(x)=f(x)$, $(\forall)\ x\in I$, conchidem că g este derivabilă în a și avem $g'(a)=l$

6.3.10. Teoremă. *Fie I, $J\subseteq\mathbf{R}$ două intervale și $f: I\to J$ o funcție continuă și bijectivă. Dacă f este derivabilă în punctul $x_0\in I$ și $f'(x_0)\neq 0$, atunci funcția $f^{-1}: J\to I$ este derivabilă în $y_0=f(x_0)$ și avem relația* $(f^{-1})'(y_0)=\dfrac{1}{f'(x_0)}$.

Dem. Funcția f fiind continuă și bijectivă, iar I și J intervale, este bicontinuă (T.5.5.19. Cor. 2). De aceea avem:

$$x_n\in I\setminus\{x_0\},\ x_n\to x_0\Leftrightarrow y_n=f(x_n)\in J\setminus\{y_0\},\ y_n\to y_0 \tag{1}$$

Dacă notăm $f(x)$ cu y, avem relația:

$$\frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)}{y-y_0}=\frac{1}{\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}},\ (\forall)\ x\in I\setminus\{x_0\}$$

Din (1) rezultă $y\to y_0\Leftrightarrow x\to x_0$, deci

$$\lim_{y\to y_0}\frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)}{y-y_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{1}{\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}=\frac{1}{f'(x_0)}.$$

Prin urmare f^{-1} este derivabilă în y_0 și avem relația $(f^{-1})'(y_0)=\dfrac{1}{f'(x_0)}$.

Corolar 1. *Fie I, $J\in\mathbf{R}$ două intervale și $f: I\to J$ o funcție surjectivă. Dacă f este derivabilă și $f'(x)\neq 0$, $(\forall)\ x\in I$, atunci f este inversabilă și avem relația* $(f^{-1})'(y)=\dfrac{1}{f'(f^{-1}(y))}$, $(\forall)\ y\in J$.

Exemplul 1.

$$(\arcsin y)'=\frac{1}{\sqrt{1-y^2}},\ (\forall)\ y\in(-1,\ 1)$$

Într-adevăr, punem $f(x) = \sin x$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Atunci f aplică bijectiv $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ pe $(-1, 1)$, este derivabilă și are derivata nenulă:

$$f'(x) = \cos x \neq 0, \ (\forall)\ x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Evident $f^{-1}(y) = \arcsin y$, $(\forall)\ y \in (-1, 1)$, deci (T.6.3.8.) avem:

$$(\arcsin y)' = (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}, \text{ unde } x = f^{-1}(y), \text{ deci}$$

$$(\arcsin y)' = \frac{1}{\cos f^{-1}(y)} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(f^{-1}(y))}} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}, \ (\forall)\ y \in (-1, 1).$$

Analog se arată relațiile:

$$(\arccos x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \ (\forall)\ x \in (-1), 1);$$

$$(\operatorname{arc\,tg} x)' = -(\operatorname{arc\,ctg} x)' = \frac{1}{1 + x^2}, \ (\forall)\ x \in \mathbf{R}.$$

Exemplul 2.

$$(\ln y)' = \frac{1}{y}, \ (\forall)\ y \in \mathbf{R}_+^*$$

Într-adevăr, punem $f(x) = e^x$, $x \in \mathbf{R}$. Atunci f aplică bijectiv $\mathbf{R}$ pe $\mathbf{R}_+^*$ este derivabilă și avem (P. 6.1.3. (4°)): $f'(x) = e^x$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$. Cum $f^{-1}(y) = \ln y$, $(\forall)\ y \in \mathbf{R}_+^*$, rezultă

$$(\ln y)' = (f^{-1}(y))' = \frac{1}{f'(x)}, \text{ unde } x = f^{-1}(y), \text{ deci}$$

$$(\ln y)' = \frac{1}{e^{f^{-1}(y)}} = \frac{1}{e^{\ln y}} = \frac{1}{y}, \ (\forall)\ y \in \mathbf{R}_+^*$$

6.3.11. Definiție. Fie $I, J \subseteq \mathbf{R}$ două intervale și $f : I \to J$ o funcție. Vom spune că f este *difeomorfă* (difeomorfism) dacă 1° f bijectivă; 2° f și f^{-1} sînt derivabile. Vom spune că f este $\mathcal{C}^n$*—difeomorfă*, unde $n \in \overline{\mathbf{N}}_0$ este fixat, dacă: 1° f bijectivă; 2° f și f^{-1} sînt de clasă $\mathcal{C}^n$.

Exemple. Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ și $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}_+^*$ două funcții definite astfel $f(x) = x$ și $g(x) = e^x$. Atunci f și g sînt $\mathcal{C}^\infty$ — difeomorfe.

6.3.12. Propoziție. *Fie $I, J \in \mathbf{R}$ două intervale deschise (resp. semideschise, resp. compacte nedegenerate). Atunci I și J sînt $\mathcal{C}^\infty$ — difeomorfe.*

Dem. Dacă I și J sînt $\mathcal{C}^\infty$— difeomorfe, vom scrie $I \approx J$. Presupunem I și J deschise, deci ele sînt de forma: (a, b), (a, ∞), $(-\infty, a)$ și $\mathbf{R}$, unde $a, b \in \mathbf{R}$ și $a < b$. Evident avem:

1° $(0,1) \approx (a, b)$. Punem $f(x) = (1 - x)\, a + xb$, $x \in (0, 1)$;

2° $(0, 1) \approx (0, \infty)$. Punem $f(x) = \frac{x}{1 + x}$, $x \in (0, 1)$;

3° $(a, \infty) \approx (0, \infty) \approx (0, 1)$. Punem $f(x) = x - a$, $x \in (a, \infty)$;

4° $(-\infty, a) \approx (-a, \infty) \approx (0, 1)$. Punem $f(x) = -x$, $x \in (-\infty, a)$;

5° $\mathbf{R} \approx (0, \infty) \approx (0, 1)$. Punem $f(x) = e^x$, $x \in \mathbf{R}$.

Așadar $I \approx (0, 1)$ și $J \approx (0, 1)$, deci $I \approx J$ etc.

6.3.13. Propoziție (teorema de inversare locală). *Fie $I \subseteq \mathbf{R}$ un interval și $f : I \to \mathbf{R}$ o funcție de clasă $\mathcal{C}^1$. Dacă $x_0 \in \mathring{I}$ și $f'(x_0) \neq 0$, atunci există $V \subseteq I$ un interval deschis care conține pe x_0 și $W \subseteq \mathbf{R}$ un interval deschis care conține pe $f(x_0)$ a.î. f aplică $\mathcal{C}^1$ — difeomorf V pe W.*

Dem. Funcția f' fiind continuă și $f'(x_0) \neq 0$, există $V \subseteq I$ un interval deschis care conține pe x_0 a.î. $f'(x) \neq 0$, $(\forall)\ x \in V$. Cum f' are proprietatea Darboux (T. 6.3.7.), rezultă că $f' > 0$ sau $f' < 0$ pe V, deci f este strict monotonă pe V și deci $W := f(V)$ este un interval deschis; evident $f(x_0) \in W$. Aplicînd T. 6.3.10. deducem că $(f|_V)^{-1}$ este derivabilă pe W și avem relația:

$$((f|_V)^{-1})'(y) = \frac{1}{(f|_V)'(x)},\ (\forall)\ y = f(x) \in W \tag{1}$$

Din ipoteză însă rezultă că $(f|_V)'$ este continuă pe V, deci cf. (1) $((f|_V)^{-1})'$ este continuă pe W.

Prin urmare f aplică $\mathcal{C}^1$ — difeomorf V pe W.

Observație. Dacă funcția f din P. 6.3.13. este derivabilă și nu este de clasă $\mathcal{C}^1$, atunci concluzia teoremei nu este numaidecît adevărată.

Contraexemplu. Fie funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definită astfel $f(x) = \frac{1}{2}x + x^2 \sin\frac{1}{x}$, $x \neq 0$ și $f(0) = 0$. Atunci f este derivabilă pe $\mathbf{R}$, $f'(0) = \frac{1}{2} \neq 0$ și totuși f nu este strict monotonă pe nici o vecinătate a lui 0.

6.3.14. Propoziție. *Fie $I, J \subseteq \mathbf{R}$ două intervale și $f : I \to J$ o funcție derivabilă (resp. de clasă $\mathcal{C}^n$, unde $n \in \overline{N}_0$). Atunci f difeomorfă (resp. $\mathcal{C}^n$ — difeomorfă) $\Leftrightarrow f'(x) \neq 0$, $(\forall)\ x \in I$ și f surjectivă.*

Dem. ($\Rightarrow$) Presupunem f difeomorfă, deci f este bijectivă, iar f și f^{-1} sînt derivabile; punem $g := f^{-1}$. Derivînd relația $g \circ f = \mathbf{1}_I$, obținem (T.6.1.10.): $g'(f(x)) \cdot f'(x) = 1$, $(\forall)\ x \in I$, deci $f'(x) \neq 0$, $(\forall)\ x \in I$.

($\Leftarrow$) Dacă $f'(x) \neq 0$, $(\forall)\ x \in I$, rezultă (T. 6.3.7. Cor. 2) că f este strict monotonă, deci bijectivă. Din T. 6.3.10. rezultă că $f^{-1} : J \to I$ este derivabilă și avem:

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{1}(y))}\ (\forall)\ y \in J \tag{1}$$

Așadar f este difeomorfă.

Dacă $f'(x) \neq 0, (\forall)\ x \in I$ și f de clasă $\mathcal{C}^1$, atunci $f' \circ f^{-1}$ este continuă ca o compunere de funcții continue. Ținînd seama de (1) deducem că $(f^{-1})'$ este continuă, prin urmare f este $\mathcal{C}^1$ — difeomorfism. Dacă $f'(x) \neq 0$, $(\forall)\ x \in I$ și f de clasă $\mathcal{C}^2$, rezultă că f este de clasă $\mathcal{C}^1$, deci f^{-1} este de clasă $\mathcal{C}^1$. Atunci $f' \circ f^{-1}$ este de clasă $\mathcal{C}^1$, ca o compunere de funcții de clasă $\mathcal{C}^1$. Ținînd mai departe seama de (1), rezultă că $(f^{-1})'$ este de clasă $\mathcal{C}^1$, deci f^{-1} este de clasă $\mathcal{C}^2$, prin urmare f este $\mathcal{C}^2$ — difeomorfism.

Pentru $n \in \overline{\mathbf{N}}_0$, $n \geqslant 2$, arbitrar, se raţionează în mod analog prin inducţie.

Corolar 1. Fie $I \subseteq \mathbf{R}$ *un interval şi* $f : I \to \mathbf{R}$ *o funcţie derivabilă (resp. de clasă* $\mathcal{C}^n$, *unde* $n \in \mathbf{N}_0$). *Atunci* f *aplică* I *difeomorf (resp.* $\mathcal{C}^n$ *— difeomorf) pe imagine* $\Leftrightarrow f'(x) \neq 0$, $(\forall)\ x \in I$.

Dem. Aplicăm P. 6.3.14. pentru corestricţia lui f.

Corolar 2. *Fie* $a, b \in (0, \infty]$ *şi* $f : (-a, a) \to (-b, b)$ *o funcţie derivabilă (resp. de clasă* $\mathcal{C}^n$, *unde* $n \in \overline{\mathbf{N}}_0$). *Atunci* f *este difeomorfă (resp.* $\mathcal{C}^n$ *— difeomorfă)* $\Leftrightarrow 1°\ f'(x) \neq 0$, $(\forall)\ |x| < a$; $2°\ \lim\limits_{|x| \nearrow a} f'(x) = b$.

Dem. Din P. 6.3.14. avem : f difeomorfă $\Leftrightarrow f'(x) \neq 0$, $(\forall)\ x \in (-a, a)$ şi f surjectivă. Cum $f'(x) \neq 0$, $(\forall)\ x \in (-a, a)$, avem că f este strict monotonă, deci f surjectivă $\Leftrightarrow \lim\limits_{x \searrow -a} f(x) = -b$ şi $\lim\limits_{x \nearrow a} f(x) = b$ sau $\lim\limits_{x \searrow -a} f(x) = b$ şi $\lim\limits_{x \nearrow a} f(x) = -b \Leftrightarrow \lim\limits_{|x| \nearrow a} |f(x)| = b$.

Observaţia 1. Există funcţii indefinit derivabile, bijective şi care nu sînt difeomorfe. Spre exemplu, funcţia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definită astfel $f(x) = x^3$, este indefinit derivabilă, bijectivă şi nu este difeomorfă, deoarece f^{-1} nu este derivabilă în 0.

6.3.15. Propoziţie. *Să se arate că există* $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *indefinit derivabilă, neidentic nulă şi cu suport compact i.e.* $(\exists)\ K \subseteq \mathbf{R}$ *compactă a.î.* $f(x) = 0$, $(\forall)\ x \notin K$.

Dem. Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ o funcţie definită astfel : $f(x) = e^{-1/x}$, dacă $x > 0$ şi $f(x) = 0$, dacă $x \leqslant 0$. Atunci f este indefinit derivabilă. Într-adevăr avem :

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} e^{-1/x}, & x > 0, \\ 0, & x < 0 \end{cases}; \quad f^{(n)}(x) = \begin{cases} P_{2n}\left(\dfrac{1}{x}\right) e^{-1/x}, & x > 0 \\ 0, & x \leqslant 0, \end{cases}$$

unde P_{2n} este un polinom cu coeficienţi reali de grad $2n$. Deoarece

$$f'(0+) = \lim_{x \searrow 0} \frac{1}{x^2} e^{-1/x} = \lim_{t \to \infty} t^2 (e^{-1})^t = 0 \quad \text{(P. 5.6.17.(1°))}$$

şi $f'(0-) = 0$, rezultă că $\lim\limits_{x \to 0} f'(x) = 0$, deci (T. 6.3.8) $f'(0) = 0$ şi f' este continuă în 0.

Dacă $n \geqslant 1$, acelaşi raţionament arată că $\lim\limits_{x \searrow 0} f^{(n)}(x) = \lim\limits_{x \nearrow 0} f^{(n)}(x) = 0$, deci $\lim\limits_{x \to 0} f^{(n)}(x) = 0$ şi deci $f^{(n)}(0) = 0$ şi $f^{(n)}$ este continuă în 0. Aşadar f este indefinit derivabilă.

Fie mai departe $g(x) = f(a^2 - x^2)$, $x \in \mathbf{R}$. Deoarece funcţiile f şi $\mathbf{R} \ni x \mapsto a^2 - x^2$, sînt indefinit derivabile, rezultă că g este indefinit derivabilă. Observăm că : $g(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow f(a^2 - x^2) > 0 \Leftrightarrow a^2 - x^2 > 0 \Leftrightarrow |x| < a$ şi analog : $g(x) = 0 \Leftrightarrow |x| \geqslant a$, unde a a fost arbitrar fixat în $\mathbf{R}_+^*$.

Prin urmare g este indefinit derivabilă, g este neidentic nulă şi g este nulă în afara compactului $[-a, a]$.

Corolar 1. *Fie* $x_0 \in \mathbf{R}$ *şi* $\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$ *fixaţi. Atunci* $(\exists)\ f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *indefinit derivabilă, neidentic nulă şi care se anulează în afara intervalului* $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$.

Dem. Punem $g(x) = f(\varepsilon^2 - (x - x_0)^2)$ cu f construit mai sus.

6.4. Înlăturarea formelor nedeterminate

6.4.1. Definiție. Fie $A \subseteq \mathbf{R}$ o mulțime, $x_0 \in A'$ $[\overline{\mathbf{R}}]$ un punct și $f, g : A \to \mathbf{R}$ două funcții; presupunem că există V o vecinătate a lui x_0 a.î. $g(x) \neq 0, (\forall)\ x \in A \cap V \setminus \{x_0\}$. Dacă $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f|_{A \cap V}(x)}{g|_{A \cap V}(x)}$ există, atunci ea se notează cu $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$. Dacă $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$, vom spune că $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ *prezintă o nedeterminare de forma* $\dfrac{0}{0}$. *A înlătura* (a ridica) o nedeterminare de forma $\dfrac{0}{0}$ înseamnă a găsi valoarea limitei $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$, în cazul în care această limită există. Analog se definesc nedeterminările de forma $\dfrac{\infty}{\infty}$, 1^∞, $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, ∞° și 0°.

Observație. Simbolul $\dfrac{0}{0}$, spre exemplu, se numește *nedeterminare*, deoarece : 1° $(\forall)\ l \in \overline{\mathbf{R}}$, există funcții f, g a.î. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$ și $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = l$ sau 2° există funcții f, g a.î. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$ și $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ nu există.

Exemple :

1° $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin \alpha x}{x} = \alpha,\ (\forall)\ \alpha \in \mathbf{R}$.

2° Fie $f(x) = \begin{cases} x^2, \text{ dacă } x \neq \dfrac{1}{n} \\ \dfrac{1}{n}, \text{ dacă } x = \dfrac{1}{n} \end{cases}$; $g(x) = \begin{cases} x, \text{ dacă } x \neq \dfrac{1}{n} \\ \dfrac{1}{n^2}, \text{ dacă } x = \dfrac{1}{n} \end{cases}$

Atunci $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} g(x) = 0$ și $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ nu există.

6.4.2. Propoziție. *Fie* $A \subseteq \mathbf{R}$ *o mulțime,* $x_0 \in A'[\overline{\mathbf{R}}]$ *și* $f, g : A \to \mathbf{R}$ *două funcții. Dacă* $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ *prezintă o nedeterminare de forma* $\dfrac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 1^∞, 0^0 *sau* ∞^0, *ea se reduce la o nedeterminare de forma* $\dfrac{0}{0}$.

Dem. 1° Presupunem că $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \pm\infty$. Atunci $(\exists)\ V$ o vecinătate a lui x_0 a.î. $f(x) \neq 0$ și $g(x) \neq 0$, $(\forall)\ x \in A \cap V \setminus \{x_0\}$. Evident avem :

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{F(x)}{G(x)},\ (\forall)\ x \in A \cap V \setminus \{x_0\}, \tag{1}$$

unde $F(x) = \dfrac{1}{f(x)}$, $G(x) = \dfrac{1}{g(x)}$, $(\forall)\ x \in A \cap V \setminus \{x_0\}$.

Cum $\lim_{x\to x_0} F(x) = \lim_{x\to x_0} G(x) = 0$, din (1) rezultă că nedeterminarea $\frac{\infty}{\infty}$ se reduce la o nedeterminare de forma $\frac{0}{0}$.

2° Din relaţia $f(x)\cdot g(x) = \frac{f(x)}{G(x)}$, $(\forall)\ x \in A \cap V\setminus\{x_0\}$, rezultă că o nedeterminare de tipul $0.\infty$ se reduce la o nedeterminare de tipul $\frac{0}{0}$.

3° Fie acum o nedeterminare de tipul 1^∞. Aceasta înseamnă că $\lim_{x\to x_0} f(x) = 1$ şi $(x)\lim_{x\to x_0} g = \infty$, deci $(\exists)\ V$ o vecinătate a lui x_0 a.î.

$$f(x) > 0 \text{ şi } g(x) > 0,\ (\forall)\ x \in A \cap V\setminus\{x_0\}.$$

Punem $h(x) := [f(x)]^{g(x)}$, $x \in A \cap V\setminus\{x_0\}$. Atunci avem:

$$h(x) = e^{\ln h(x)},\ \ln h(x) = \frac{\ln f(x)}{\frac{1}{g(x)}},\ (\forall)\ x \in A \cap V\setminus\{x_0\}.$$

Evident $\lim_{x\to x_0} (\ln h(x)$ prezintă o nedeterminare de tipul $\frac{0}{0}$ şi avem

$$\lim_{x\to x_0} h(x) = \lim_{x\to x_0} e^{\ln h(x)}.$$

În celelalte cazuri se raţionează în mod analog.

6.4.3. Teoremă (L' H o s p i t a l). *Fie* $a, b \in \overline{\mathbf{R}}$, $a < b$; $I \subseteq \mathbf{R}$ *un intervale cu* $(a, b) \subseteq I \subseteq [a, b]$; $x_0 \in [a, b]$ *un punct*; $f, g: I\setminus\{x_0\} \to \mathbf{R}$ *două funcţii cu proprietăţile*:

1° $\lim_{x\to x_0} (f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$ (*resp.* $\lim_{x\to x_0} |g(x)| = +\infty$);

2° f *şi* g *sînt derivabile şi* $g'(x) \neq 0$, $(\forall)\ x \in I\setminus\{x_0\}$;

3° $l = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ *există* (*finită sau* $\pm\infty$).

Atunci $g(x) \neq 0$, $(\forall)\ x \in I\setminus\{x_0\}$ (*resp.* $(\exists)\ V$ *o vecinătate a lui* x_0 *cu* $g(x) \neq 0$, $(\forall)\ x \in I \cap V\setminus\{x_0\}$) *şi* $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ *există şi este egală cu* l.

Dem. Considerăm separat cele două cazuri.

(I) $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$. Observăm în prealabil că $g(x) \neq 0$, $(\forall)\ x \in I\setminus\{x_0\}$, altfel dacă există $x \in I\setminus\{x_0\}$ cu $g(x) = 0$, atunci aplicînd T. 6.3.7. Cor. 3 pe intervalul de capete x_0 şi x, rezultă că există ξ cuprins între x_0 şi x cu $g'(\xi) = 0$, absurd.

(i) $x_0 = b$. Fixăm $x \in I\setminus\{x_0\}$; aplicînd T. 6.3.7. Cor. 4 pe intervalul $[x, x_0]$, rezultă că $(\exists)\ \xi_x \in (x, x_0)$ a.î.

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0-)}{g(x) - g(x_0-)} = \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)}.$$

Cînd $x \to x_0$, rezultă că $\xi_x \to x_0$, deci

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x_x)}{g'(\xi_x)} = l.$$

(ii) Dacă $x_0 = a$ se procedează la fel.

(iii) Dacă $x_0 \in (a, b)$, aplicăm (i) (resp. (ii)) pe intervalul (a, x_0) (resp. (x_0, b)) și obținem: $\lim\limits_{x \nearrow x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = l \left(\text{resp. } \lim\limits_{x \searrow x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = l \right)$, deci $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = l$.

(II) $\lim\limits_{x \to x_0} |g(x)| = +\infty$.

(i) $x_0 = b$. Deoarece $g'(x) \neq 0$, $(\forall)\ x \in \overset{\circ}{I}$, rezultă (R. 6.3.7. Cor. 2) că g' păstrează un semn constant, deci g este strict monotonă; spre exemplu g este strict crescătoare. Cum $\lim\limits_{x \to x_0} |g(x)| = +\infty$, $(\exists)\ c \in (a, b)$ a.î. $g(x) = |g(x)| > 0$, $(\forall)\ x \in (c, x_0)$. Fie acum $x_n \in (c, x_0)$ $(n \geqslant 1)$, cu $x_n \nearrow x_0$. Atunci $(g(x_n))_{n \geqslant 1}$ este un șir strict crescător și are limita $+\infty$. Aplicînd T. 6.3.5. pe fiecare interval $[x_n, x_{n+1}]$ rezultă:

$$(\exists)\ c_n \in (x_n, x_{n+1}) \text{ a.î. } \frac{f(x_{n+1}) - f(x_n)}{g(x_{n+1}) - g(x_n)} = \frac{f'(c_n)}{g'(c_n)} \tag{1}.$$

Cum $x_n < c_n < x_0$, $(\forall)\ n \geqslant 1$ și $x_n \to x_0$, avem $c_n \to x_0$, deci $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{f'(c_n)}{g'(c_n)} = l$ și deci din (1) obținem: $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{f(x_{n+1}) - f(x_n)}{g(x_{n+1}) - g(x_n)} = l$. Aplicînd lema Cesaro-Stolz (T.2.3.26), deducem că $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{f(x_n)}{g(x_n)}$ există și este egală cu l, prin urmare $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = l$.

(ii) Dacă $x_0 = a$ se procedează la fel.

(iii) Dacă $x_0 \in (a, b)$, aplicăm (i) (resp. (ii)) pe intervalul (a, x_0) (resp. (x_0, b)) și obținem: $\lim\limits_{x \nearrow x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = l \left(\text{resp. } \lim\limits_{x \searrow x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = l \right)$, prin urmare $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = l$.

Corolar 1. *Fie* $a, b \in \overline{\mathbf{R}}$, $a < b$; $I \subseteq \mathbf{R}$ *un interval cu* $(a, b) \subseteq I \subseteq [a, b]$, $x_0 \in (a, b)$ *un punct*; $f, g : I \setminus \{x_0\} \to \mathbf{R}$ *două funcții cu proprietățile:*

1° *f și g sînt de n ori derivabile și* $g^{(n)}(x) \neq 0$, $(\forall)\ x \in I \setminus \{x_0\}$;

2° $\lim\limits_{x \to x_0} f^{(k)}(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g^{(k)}(x) = 0$ *(resp.* $\lim\limits_{x \to x_0} |g^{(k)}(x)| = \infty$*),* $(\forall)\ k = \overline{0, n}$;

3° $l = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}$ *există (finită sau* $\pm\infty$*).*

Atunci $g(x) \neq 0$, $(\forall)\ x \in I \setminus \{x_0\}$ *(resp.* $(\exists)\ V$ *o vecinătate a lui* x_0 *cu* $g(x) \neq 0$, $(\forall)\ x \in I \cap V \setminus \{x_0\}$*) și* $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ *există și este egală cu* l.

Dem. Ca și în T. 6.4.3. arătăm că $g^{(n-1)}(x) \neq 0$, $(\forall)\ x \in I \setminus \{x_0\}$ (resp. $(\exists)\ V$ o vecinătate a lui x_0 cu $g^{(n-1)}(x) \neq 0$, $(\forall)\ x \in I \cap V \setminus \{x_0\}$) și $\lim \dfrac{f^{(n-1)}(x)}{g^{(n-1)}(x)} = l$. Se continuă mai departe același raționament în care în loc de n avem $n-1$ etc.

Corolar 2. *Fie* $P \in \mathbf{R}[X]$ *un polinom de grad* $\geqslant 1$. *Atunci*

$$1^\circ\ \lim_{x \to \infty} \frac{a^x}{P(x)} = \begin{cases} 0, & \text{dacă } 0 < a < 1 \\ \pm\infty, & \text{dacă } a > 1 \end{cases}$$

$$2^\circ\ \lim_{x \to \infty} a^x P(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } 0 < a < 1 \\ \pm\infty, & \text{dacă } a > 1 \end{cases}$$

3° $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln x}{P(x)} = 0.$

4° $\lim\limits_{x\searrow 0} P(x) \ln x = \begin{cases} \pm\infty, \text{ dacă } P(0) \neq 0 \\ 0, \text{ dacă } P(0) = 0. \end{cases}$

Dem. Fie n gradul lui P și c_0 coeficientul său dominant. Atunci

1° $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{a^x}{P(x)} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(a^x)^{(n)}}{P(x)^{(n)}} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{a^x (\ln a)^n}{n!\, c_0} = \begin{cases} 0, & 0 < a < 1 \\ +\infty, & a > 1 \text{ și } c_0 > 0 \\ -\infty, & a > 0 \text{ și } c_0 < 0 \end{cases}$

2° Dacă $0 < a < 1$, aplicăm 1° punînd $b = \dfrac{1}{a}$, iar dacă $a > 1$, avem evident limita egală cu $\pm\infty$.

3° $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln x}{P(x)} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\frac{1}{x}}{P'(x)} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{xP'(x)} = 0.$

4° Evident avem:

$$\lim_{x\searrow 0} P(x) \cdot \ln x = \begin{cases} +\infty, \text{ dacă } P(0) < 0 \\ -\infty, \text{ dacă } P(0) > 0. \end{cases}$$

Dacă $P(0) = 0$, avem $P(x) = x^k P_1(x)$, unde $k \geqslant 1$, $P_1 \in \mathbf{R}[X]$ și $P_1(0) \neq 0$. Atunci avem

$$\lim_{x\searrow 0} x^k \ln x = \lim_{k\to\infty} \frac{-\ln t}{t^k} = 0 \text{ (cf. } 3^\circ),$$

deci

$$\lim_{x\searrow 0} P(x) \cdot \ln x = \lim_{x\searrow 0} (x^k \ln x)\, P_1(x) = 0.$$

Observație. T. 6.4.3. nu este numai decît adevărată, dacă inversăm concluzia cu condiția 3°.

Contraexemplu. Fie funcțiile $f(x) = x^2 \sin\dfrac{1}{x}$, $x \in \mathbf{R}^*$; $g(x) = x$, $x \in \mathbf{R}^*$. Atunci $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$ și $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ nu există

6.4.4. Teoremă (C a u c h y). *Fie $I \subseteq \mathbf{R}$ un interval, $x_0 \in I$ un punct și $f, g : I \to \mathbf{R}$ două funcții cu proprietățile:*

1° *$f(x_0) = g(x_0) = 0$;*

2° *f și g sînt derivabile în x_0 și $g'(x_0) \neq 0$.*

Atunci $(\exists)$ *V o vecinătate a lui x_0 cu $g(x) \neq 0$,* $(\forall)$ *$x \in V \cap I \setminus \{x_0\}$ și* $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$.

Dem. Presupunem că $(\forall)$ V o vecinătate a lui x_0 $(\exists)$ $x_V \in I \cap V \setminus \{x_0\}$ a.î. $g(x_V) = 0$. Fie $V_n = \left(x_0 - \dfrac{1}{n}, x_0 + \dfrac{1}{n}\right)$ și $x_n \in I \cap V_n \setminus \{x_0\}$ cu $g(x_n) = 0$ $(n \geqslant 1)$. În acest caz avem:

$$g'(x_0) = \lim_{n\to\infty} \frac{g(x_n) - g(x_0)}{x - x_0} = 0,$$

absurd. Aşadar $(\exists)\ V$ o vecinătate a lui x_0 cu proprietatea că $g(x) \neq 0$, $(\forall)\ x \in V \cap I \setminus \{x_0\}$. Mai departe avem :

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}{\dfrac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}}, \quad (\forall) \quad x \in V \cap I \setminus \{x_0\},$$

de unde prin trecere la limită, $x \to x_0$, obţinem :

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f|_{V \cap I}(x)}{g|_{V \cap I}(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.$$

Observaţie. Teoremele 6.4.3 şi 6.4.4. nu au acelaşi cîmp de aplicabilitate. În T.6.4.3. funcţiile f şi g nu sînt numaidecît definite în x_0 şi ele sînt derivabile pe $I \setminus \{x_0\}$ în timp ce în T.6.4.4. funcţiile f şi g sînt definite şi derivabile în x_0. Cele două teoreme se completează una pe alta.

Exemplul 1. *Să se arate că* $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 \sin \dfrac{1}{x}}{\sin x}$ *există, însă pentru calculul ei nu putem aplica regula lui L'Hospital.*

Fie $f(x) = x^2 \sin \dfrac{1}{x}$, $g(x) = \sin x$, $(\forall)\ 0 < |x| < \dfrac{\pi}{2}$. Atunci f şi g satisfac condiţiile 1° şi 2° însă nu satisfac condiţia 3°. Într-adevăr avem :

$$\lim_{x \to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{2x \sin \dfrac{1}{x} - \cos \dfrac{1}{x}}{\cos x}$$

şi ultima limită nu există, deoarece $\lim\limits_{x \to 0} \cos \dfrac{1}{x}$ nu există.

Pe de altă parte avem $\left| x \sin \dfrac{1}{x} \right| \leqslant |x|$, $(\forall)\ x \neq 0$, deci $\lim\limits_{x \to 0} x \sin \dfrac{1}{x} = 0$ şi deci

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 \sin \dfrac{1}{x}}{\sin x} = \lim_{x \to 0} \left(\frac{x}{\sin x} \right) \cdot \left(x \sin \frac{1}{x} \right) = 1 \cdot 0 = 0.$$

Exemplul 2. *Să se calculeze* $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{\sin^2 x} - \dfrac{1}{x^2} \right)$

$$\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} = \left(\frac{x}{\sin x} \right)^2 \cdot \frac{x^2 - \sin^2 x}{x^4}, \quad (\forall)\ 0 < |x| < \pi$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 - \sin^2 x}{x^4} = \lim_{x \to 0} \frac{2x - 2 \sin x \cos x}{4x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{2x - \sin 2x}{4x^3} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{2 - 2 \cos 2x}{12x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{4 \sin 2x}{24x} = \frac{1}{3}.$$

Prin urmare limita dată este egală cu $\dfrac{1}{3}$.

Exemplul 3. *Fie* $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *două funcții definite astfel*: $f(x) = x^2$, $(\forall)\ x \in \mathbf{Q}$, $f(x) = 1 - \cos x$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$; $g(x) = \sin x$, $(\forall)\ x \in \mathbf{Q}$, $g(x) = x$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$. *Să se calculeze* $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

Evident f și g sînt derivabile în 0 și avem $f'(0) = 0$ și $g'(0) = 1$. Aplicînd T.6.4.4. deducem :

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(0)}{g'(0)} = \frac{0}{1} = 0.$$

6.5. Formula lui Taylor cu restul lui Lagrange. Extreme

Formula lui Taylor este generalizarea naturală a formulei lui Lagrange, în cazul în care funcția f este de clasă $\mathcal{C}^n$.

6.5.1. Definiție. Fie $A \subseteq \mathbf{R}$ o mulțime $x_0 \in A'$ și $f, g : A \setminus \{x_0\} \to \mathbf{R}$ două funcții. Vom spune că $f(x) = o(g(x))$, $x \to x_0$, dacă $(\exists)\ \alpha : A \setminus \{x_0\} \to \mathbf{R}$ a.î $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$ și $f(x) = \alpha(x)\ g(x)$, $(\forall)\ x \in A \setminus \{x_0\}$. Dacă $f, g, h : A \setminus \{x_0\} \to \mathbf{R}$, vom scrie că $f(x) = g(x) + o(h(x))$, $x \to x_0$, dacă $f(x) - g(x) = o(h(x))$, $x \to x_0$.

a) Dacă $(\exists)\ V \subseteq \mathbf{R}$ o vecinătate a lui x_0 a.î. $g(x) \neq 0$, $(\forall)\ x \in A \cap V \setminus \{x_0\}$, atunci $f(x) = o(g(x))$, $x \to x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$.

6.5.2. Definiție. Fie $U \subseteq \mathbf{R}$ o mulțime deschisă, $a \in U$ un punct și $f : U \to \mathbf{R}$ o funcție de n ori derivabilă. Polinomul

$$T_n(x\,;\,a) := f(a) + \frac{x-a}{1!} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \ldots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a)$$

se numește *polinom Taylor* de grad n asociat funcției f și punctului a. Funcția $r_n(x\,;\,a) := f(x) - T_n(x\,;\,a)$, $x \in U$ se numește *restul Taylor* de ordinul n asociat funcției f și punctului a.

6.5.3. Teoremă (Formula lui Taylor cu restul Lagrange). *Fie* $U \subseteq \mathbf{R}$ *o mulțime deschisă și* $f : U \to \mathbf{R}$ *o funcție de* $n+1$ *ori derivabilă. Atunci* $(\forall)\ a \in U$ *și* $x \in V_r(a) \subseteq U$, *există* ξ *cuprins între* a *și* x *a.î.*

$$f(x) = T_n(x\,;\,a) + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{n+1}(\xi).$$

Dem. Fie $\varphi : U \to \mathbf{R}$ o funcție definită astfel :

$$\varphi(x) = f(x) + \frac{b-x}{1!} f'(x) + \ldots + \frac{(b-x)^n}{n!} f^{(n)}(x) + \lambda(b-x)^{n+1}, \qquad (1)$$

cu $b \in V_r(a) \setminus \{a\}$ fixat și λ determinat (unic) prin condiția $\varphi(a) = \varphi(b)$. Deoarece $f^{(k)}$ este derivabilă, $(\forall)\ k = \overline{0, n}$, rezultă că φ este derivabilă, deci (T. 6.3.2.) există ξ cuprins între a și b a.î. $\varphi'(\xi) = 0$. Evident avem :

$$\varphi'(x) = f'(x) + \frac{b-x}{1!} f''(x) + \ldots + \frac{(b-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(x) - \lambda(n+1)(b-x)^n -$$

$$- f'(x) - \frac{b-x}{1!} f''(x) \ldots - \frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(x) =$$

$$= \frac{(b-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(x) - \lambda(n+1)(b-x)^n = \frac{(b-x)^n}{n!} [f^{(n+1)}(x) - \lambda(n+1)!]$$

Cum $\varphi'(\xi) = 0$, rezultă $\lambda = \dfrac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)$. Din (1) avem $\varphi(b) = f(b)$ şi deoarece $\varphi(a) = \varphi(b)$, rezultă $f(b) = \varphi(a)$, deci ţinînd seama de expresia lui $\varphi(a)$ dedusă din (1) obţinem :

$$f(b) = f(a) + \frac{b-a}{1!} f'(a) + \ldots + \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi).$$

Notînd mai departe b cu x, rezultă relaţia

$$f(x) = T_n(x\,;\,a) + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi),$$

unde ξ este cuprins între a şi x.

Corolar 1 (Formula Maclaurin). *Fie $I \subseteq \mathbf{R}$ un interval şi $f : I \to \mathbf{R}$ o funcţie de $n+1$ ori derivabilă. Dacă $0 \in I$, atunci $(\forall)\, x \in I$ există ξ cuprins între 0 şi x, care depinde de x,* a.î. *avem relaţia :*

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \ldots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi).$$

Corolar 2 (Formula lui Taylor în varianta Peano). *Fie $I \subseteq \mathbf{R}$ un interval, $a \in I$ un punct şi $f : I \to \mathbf{R}$ o funcţie de n ori derivabilă pe I cu $f^{(n)}$ continuă în a. Atunci avem relaţia :*

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!} f'(a) + \ldots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + o(|x-a|^n),\ x \to a.$$

Dem. Fie $x \in I$ fixat. Din T. 6.5.3. rezultă

$$f(x) = T_{n-1}(x\,;\,a) + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(\xi_x),$$

unde ξ_x este cuprins între a şi x. Evident avem :

$$f(x) = T_n(x\,;\,a) + \frac{(x-a)^n}{n!} [f^{(n)}(\xi_x) - f^{(n)}(a)] \tag{1}$$

Funcţia $f^{(n)}$ fiind continuă în a, rezultă că

$$\lim_{x \to a} [f^{(n)}(\xi_x) - f^{(n)}(a)] = 0,$$

deoarece ξ_x tinde la a, odată cu x. Atunci

$$\lim_{x \to a} \frac{1}{n!} \cdot \frac{(x-a)^n}{|x-a|^n} [f^{(n)}(\xi_x) - f^{(n)}(a)] = 0,$$

prin urmare din (1) deducem relaţia

$$f(x) = T_n(x\,;\,a) + o(|x-a|^n),\ x \to a.$$

Observaţie. Cor. 2 poate fi reformulat astfel : $(\exists)\, \alpha : I \to \mathbf{R}$ *continuă şi nulă în a* a.î.

$$f(x) = T_n(x\,;\,a) + |x-a|^n\, \alpha(x)\ (\forall)\, x \in I.$$

Observația 2. Cor. 2 poate fi demonstrat direct, calculînd $\lim_{x \to a} \frac{f(x) - T_n(x; a)}{(x-a)^n}$ cu ajutorul regulii lui L'Hospital (T. 6.4 3. Cor. 1).

6.5.4. Teoremă. *Fie* $I \subseteq \mathbf{R}$ *un interval,* $a \in \overset{\circ}{I}$ *un punct și* $f : I \to \mathbf{R}$ *o funcție de n ori derivabilă pe* I *cu* $f^{(n)}$ *continuă în* a; *presupunem că numerele* $f^{(k)}(0)$, $k = \overline{1, n}$, *nu sînt toate nule. Atunci* a *este punct de maxim (resp. minim) local strict pentru* $f \Leftrightarrow (\exists)\, 1 \leqslant k \leqslant n$, k *par, a.î.* $f^{(i)}(a) = 0$, $(\forall)\, i = \overline{1, k-1}$ *și* $f^{(k)}(a) < 0$ *(resp.* $f^{(k)}(a) > 0$*).*

Dem. Din T. 6.5.3. Cor. 2 rezultă că există $\alpha : I \to \mathbf{R}$ care are limita 0 în punctul a și a.î.

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!} f'(a) + \ldots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \alpha(x) \cdot |x-a|^n, \quad (\forall)\, x \in I.$$

($\Leftarrow$) Fie $1 \leqslant k \leqslant n$, k par, a.î. $f^{(i)}(a) = 0$, $(\forall)\, i = \overline{1, k-1}$ și $f^{(k)}(a) \neq 0$. Atunci

$$f(x) - f(a) = \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \ldots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \alpha(x)|x-a|^n =$$

$$= \frac{(x-a)^k}{k!} [f^{(k)}(a) + \beta(x)], \quad (\forall)\, x \in I,$$

unde $\lim_{x \to a} \beta(x) = 0$. Evident $(\exists)\, \eta > 0$ cu $V = (a - \eta, a + \eta) \subseteq I$ și cu proprietatea că $|\beta(x)| \leqslant \left| \frac{1}{2} f^{(k)}(a) \right|$, $(\forall)\, x \in V$, deci $f^k(a) + \beta(x)$ are semnul lui $f^k(a)$ pentru orice x din V. Cum $(x-a)^k > 0$, $(\forall)\, x \in I \setminus \{a\}$, conchidem că $f(x) - f(a)$ are semnul lui $f^{(k)}(a)$, pentru orice $x \in V \setminus \{a\}$. Prin urmare, dacă $f^{(k)}(a) > 0$ (resp. < 0), atunci

$$f(x) > f(a), \ (\forall)\, x \in V \setminus \{a\} \ \text{(resp. } f(x) < f(a), \ (\forall)\, x \in V \setminus \{a\}),$$

ceea ce înseamnă că a este punct de minim (resp. maxim) local strict pentru f.

($\Rightarrow$) Fie $1 \leqslant k \leqslant n$ cel mai mare număr cu proprietatea că $f^{(i)}(a) = 0$, $(\forall)\, i = \overline{1, k-1}$ și $f^{(k)}(a) \neq 0$. Atunci ca mai sus avem :

$$f(x) - f(a) = \frac{(x-a)^k}{k!} [f^{(k)}(a) + \beta(x)], \quad (\forall)\, x \in I, \tag{1}$$

unde $\lim_{x \to a} \beta(x) = 0$. Să presupunem mai departe a punct de minim local strict, deci $(\exists)\, \eta_1 > 0$ cu $V_1 = (a - \eta_1, a + \eta_1) \subseteq I$ și cu proprietatea că $f(x) > f(a)$, $(\forall)\, x \in V_1 \setminus \{a\}$. De asemenea $(\exists)\, \eta_2 > 0$ cu $V_2 = (a - \eta_2, a + \eta_2) \subseteq I$ și cu proprietatea că

$$|\beta(x)| \leqslant \frac{1}{2} \left| f^{(k)}(a) \right| \ (\forall)\, x \in V_2,$$

deci $f^{(k)}(a) + \beta(x)$ are semnul lui $f^{(k)}(a)$, $(\forall)\, x \in V_2$ (3).

Din (1), (2) și (3) deducem că $\frac{(x-a)^k}{k!}$ are același semn pentru orice $x \in V_1 \cap V_2 \setminus \{a\}$, prin urmare k este par.

Corolar 1. *Fie $I \subseteq \mathbf{R}$ un interval, $a \in \mathring{I}$ un punct și $f : I \to \mathbf{R}$ o funcție de două ori derivabilă pe I cu f'' continuă în a. Dacă $f'(a) = 0$ și $f''(a) > 0$ (resp. $f''(a) < 0$), atunci a este punct de minim (resp. maxim) local strict pentru f.*

Observație. Condiția $(\exists)\, k = \overline{1, n}$ a.î. $f^{(k)}(a) \neq 0$, din T. 6.5.4., este esențială. Într-adevăr fie $f(x) = e^{-1/x^2}$, dacă $x \neq 0$ și $f(0) \neq 0$. Evident 0 este punct de minim local strict și totuși după cum am văzut mai sus $f^{(k)}(0) = 0\ (\forall)\ k \geqslant 1$.

6.6. Funcții diferențiabile de o variabilă reală

6.6.1. Definiție. Fie $U \subseteq \mathbf{R}$ o mulțime deschisă și $f : U \to \mathbf{R}$ o funcție. Vom spune că f este *diferențiabilă în punctul* $a \in U$, dacă $(\exists)\, c \in \mathbf{R}$ a.î.

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) + c(x - a)}{|x - a|} = 0$$

Aplicația $\mathbf{R} \ni h \mapsto ch \in \mathbf{R}$ se numește *diferențiala lui f în a* și se notează cu $\mathrm{d}_a f$, $\mathrm{d}f_a$, $\mathrm{d}f(a)$. Vom spune că f este *diferențiabilă pe U*, dacă f este diferențiabilă în fiecare punct $a \in U$. Diferențiala lui f pe U se notează cu $\mathrm{d}f$ i.e. $(\mathrm{d}f)(a) = \mathrm{d}_a f\ (\forall)\ a \in U$.

Se vede imediat că diferențiala lui f într-un punct a este *unică* determinată de f și a.

Să notăm cu $L(\mathbf{R})$ mulțimea tuturor funcțiilor liniare (deci și continue) $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Să observăm că $(\forall)\, g \in L(\mathbf{R})$ avem (1) $g(x) = cx\ (\forall)\ x \in \mathbf{R}$, unde $c = g(1)$. Reciproc, $(\forall)\ c \in \mathbf{R}$ fixat, relația (1) definește un element $g \in L(\mathbf{R})$. Așadar putem scrie $L(\mathbf{R}) \approx \mathbf{R}$, deoarece aplicația $L(\mathbf{R}) \ni g \mapsto g(1) \in \mathbf{R}$ este bijectivă și păstrează operațiile de *adunare*, *înmulțire cu scalari* și *compunere* a două aplicații, definite pe $L(\mathbf{R})$.

6.6.2. Propoziție. *Fie $U \subseteq \mathbf{R}$ o mulțime deschisă și $f : U \to \mathbf{R}$ o funcție. Atunci condițiile $1°$—$4°$ sînt echivalente :*

$1°$ *f este diferențiabilă în a ;*

$2°$ $(\exists)\, c \in \mathbf{R}$ *a.î.* $f(a + h) - f(a) = ch + o(|h|),\ h \to 0$;

$3°$ $(\exists)\, g \in L(\mathbf{R})$ *a.î.* $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a) - g(x - a)}{|x - a|} = 0$;

$4°$ *f este derivabilă în a.*

Dem. $1° \Rightarrow 2°$. Presupunem f diferențiabilă în a, deci $(\exists)\, c \in \mathbf{R}$ a.î. $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a + h) - f(a) - ch}{|h|} = 0$ și fie

$$\alpha(h) = \begin{cases} \dfrac{f(a + h) - f(a) - ch}{|h|}, & h \in V \setminus \{0\}, \\ 0, & h = 0, \end{cases}$$

unde $V := U - a$ este o vecinătate a lui 0. Atunci

$$f(a + h) - f(a) = ch + \alpha(h)\,|h|,\ (\forall)\ h \in V, \text{ deci}$$

$$f(a + h) - f(a) = ch + o(|h|),\ h \to 0.$$

$2° \Rightarrow 3°$. Fie $c \in \mathbf{R}$ a.î. $f(a + h) - f(a) = ch + o(|h|),\ h \to 0$, deci

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a) - ch}{|h|} = 0$$

Punem $g(h) = ch$ $(\forall)\ h \in \mathbf{R}$; atunci $g \in L(\mathbf{R})$ și avem

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a) - g(h)}{|h|} = 0$$

$3° \Rightarrow 4°$. Fie $g \in L(\mathbf{R})$ dat de $3°$. Atunci

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{f(a+h) - f(a) - g(h)}{|h|} \cdot \frac{|h|}{h} + \frac{g(h)}{h},\ (\forall)\ h \in V \setminus \{0\}.$$

Cum $\frac{|h|}{h} = \pm 1$ și $\frac{g(h)}{h} = g(1)$, $(\forall)\ h \in V \setminus \{0\}$, prin trecere la limită obținem:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = g(1),$$

deci f este derivabilă în a și avem $f'(a) = g(1)$.

$4° \Rightarrow 1°$. Fie $c = f'(a)$. Atunci

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h}{|h|} \left(\frac{f(a+h) - f(a)}{h} - f'(a) \right) = 0,$$

deci f este diferențiabilă în a.

Corolar 1. *Fie $U \subseteq \mathbf{R}$ o mulțime deschisă și $f : U \to \mathbf{R}$ o funcție. Atunci* $1°$ *f derivabilă în $a \in U \Leftrightarrow f$ diferențiabilă în a; în acest caz avem relația $(\mathrm{d}_a f)\ (h) = f'(a).h$ $(\forall)\ h \in \mathbf{R}$;* $2°$ *Dacă f este diferențiabilă pe U, avem $\mathrm{d}f : U \to L(\mathbf{R})$.*

Să observăm că dacă $f : U \to \mathbf{R}$ este derivabilă în $a \in U$, atunci $f'(a)$ definește un element $c \in \mathbf{R}$, în timp ce $\mathrm{d}_a f$ definește un element $g \in L(\mathbf{R})$ și că g este corespondentul lui c relativ la izomorfismul $\mathbf{R} \approx L(\mathbf{R})$.

Din Prop. 6.6.2. rezultă că studiul funcțiilor diferențiabile de o variabilă reală se reduce la studiul funcțiilor derivabile de o variabilă reală care a fost, în linii generale, prezentat mai înainte. Spre exemplu, dacă $f, g : U \to \mathbf{R}$ sînt două funcții diferențiabile în $a \in U$, atunci $f + g$ este diferențiabil în a și avem:

$$\mathrm{d}_a (f + g) = \mathrm{d}_a f + \mathrm{d}_a g.$$

Într-adevăr, $(\forall)\ h \in \mathbf{R}$ avem:

$$(\mathrm{d}_a (f+g))\ (h) = (f+g)'(a).h = f'(a).h + g'(a).h =$$
$$= (\mathrm{d}_a f)\ (h) + (\mathrm{d}_a y)\ (h) = (\mathrm{d}_a f + \mathrm{d}_a g).h,$$

deci

$$\mathrm{d}_a (f + g) = \mathrm{d}_a f + \mathrm{d}_a g.$$

De aceea ne oprim aici cu considerațiile asupra diferențiabilității funcțiilor de o variabilă reală.

Să facem o ultimă remarcă. Fie $\mathbf{1}_U : U \to U$ funcția identitate pe U i.e $\mathbf{1}_U(x) = x$, $(\forall)\ x \in U$; funcția $\mathbf{1}_U$ se notează impropriu cu x. Cum $\mathbf{1}_U$ este derivabilă, ea este diferențiabilă pe U și diferențiala sa, notată cu d_x, este egală, în fiecare punct $a \in U$, cu funcția identitate pe $\mathbf{R}$ i.e. $\mathbf{1}_{\mathbf{R}}$. Așadar avem:

$$(\mathrm{d}x)\ (a) = \mathbf{1}_{\mathbf{R}},\ (\forall)\ a \in \mathbf{R}.$$

Atunci relația

$$(\mathrm{d}_a f)\ (h) = f'(a).h,\ (\forall)\ h \in \mathbf{R}$$

se transcrie

$$\mathrm{d}_a f = f'(a).\mathrm{d}x.$$

Dacă a este un punct curent din U, notat cu x, avem $\mathrm{d}_x f = f'(x)\mathrm{d}x$, sau notată altfel $\mathrm{d}f(x) = f'(x)\,\mathrm{d}x$.

CAPITOLUL 7

APLICAȚII ALE CALCULULUI DIFERENȚIAL

7.1. Funcții convexe

Reamintim că o mulțime $A \subseteq \mathbf{R}$, $\mathbf{R}^2, \mathbf{R}^3, \ldots$, se numește *convexă* dacă orice segment care unește două puncte din A este complet inclus în A. Am văzut (P.2.2.13.) că $A \subseteq \mathbf{R}$ este convexă $\Leftrightarrow A$ este interval $\Leftrightarrow (\forall)\ x_1, x_2 \in A\ \ (\forall)\ \lambda \in (0,1)$, rezultă că $(1-\lambda)x_1 + \lambda x_2 \in A \Leftrightarrow (\forall)\ x_1, x_2, \ldots, x_n \in A$, $(\forall)\ \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbf{R}_+$, cu $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n = 1$, rezultă că $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n \in A$.

7.1.1. Definiție. Fie $I \subseteq \mathbf{R}$ un interval și $f : I \to \mathbf{R}$ o funcție. Vom spune că f este *convexă* dacă $(\forall)\ x_1, x_2 \in I$ și $\lambda \in (0,1)$ avem inegalitatea

$$f((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2) \leqslant (1-\lambda) f(x_1) + \lambda f(x_2)$$

Dacă inegalitatea $\leqslant$ este strictă, $<$, funcția f se numește *strict convexă*, iar dacă inegalitatea $\leqslant$ (resp. $<$) se înlocuiește prin inegalitatea $\geqslant$ (resp. $>$), funcția f se numește *concavă* (resp. *strict concavă*). O funcție concavă și convexă se numește *afină*.

Evident f concavă (resp. strict concavă) $\Leftrightarrow -f$ este convexă (resp. strict convexă). Așadar, este suficient să ne mărginim la studiul funcțiilor convexe și strict conve e.

Semnificația geometrică. Fie $f : I \to \mathbf{R}$ o funcție; fixăm $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$. Evident orice punct $x_0 \in (x_1, x_2)$ se scrie sub forma $x_0 = (1-\lambda)x_1 + \lambda x_2$ cu $0 < \lambda < 1$. Punctul $P_0(x_0, f(x_0))$ se află pe graficul lui f, iar punctul $Q_0(x_0, (1-\lambda) f(x_1) + \lambda f(x_2))$ se află pe coarda care unește punctele $P_1(x_1, f(x_1))$ și $P_2(x_2, f(x_2))$ (fig. 10). Așadar f este convexă $\Leftrightarrow (\forall)\ x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$, graficul funcției $f|_{[x_1, x_2]}$ se află sub coarda care trece prin punctele P_1 și P_2.

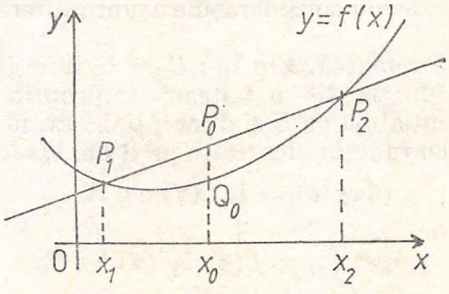


Fig. 16

Exemple

1) Fie funcția : $f(x) = ax^2 + bx + c$, $x \in \mathbf{R}$, unde $a, b, c \in \mathbf{R}$ și $a \neq 0$. Atunci f strict convexă (resp. strict concavă) $\Leftrightarrow a > 0$ (resp. $a < 0$).

2) Fie funcția $f(x) = x^3$, $x \in \mathbf{R}$. Atunci f este strict convexă pe $\mathbf{R}_+$ și strict concavă pe $\mathbf{R}_-$.

3) Fie $I \subseteq \mathbf{R}$ un interval și $f : I \to \mathbf{R}$ o aplicație afină. Atunci f este simultan convexă și concavă.

4) Funcția caracteristică a unei mulțimi proprii $A \subseteq \mathbf{R}$, nu este nici convexă, nici concavă.

7.1.2. Propoziție. *Fie $I \subseteq \mathbf{R}$ un interval și $f : I \to \mathbf{R}$ o funcție. Atunci f convexă $\Leftrightarrow$ $(\forall)\ x_1, \ldots, x_n \in I$; $(\forall)\ \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbf{R}_+$; $\lambda_1 + \ldots + \lambda_n = 1$, avem inegalitatea*

$$f(\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n) \leqslant \lambda_1 f(x_1) + \ldots + \lambda_n f(x_n) \qquad (1)$$

Dem. ($\Rightarrow$) Fie P inegalitatea (1); ea depinde de n. Să o demonstrăm prin inducție.

$P(2)$ este evident adevărată.

Fie $n \geqslant 2$ cu $P(n-1)$ adevărată și $x_1, \ldots x_n \in I$; $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbf{R}$, $\lambda_1 + \ldots + \lambda_n = 1$, fixați. Renumerotînd putem presupune că $\lambda_n < 1$. Atunci

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\lambda_i}{1-\lambda_n} = 1, \quad \text{deci}$$

$$f\left(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\lambda_i}{1-\lambda_n} x_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\lambda_i}{1-\lambda_n} f(x_i)$$

și deci

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) = f((1-\lambda_n) \cdot \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\lambda_i}{1-\lambda_n} \cdot x_i + \lambda_n x_n) \leqslant$$

$$\leqslant (1-\lambda_n) f\left(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\lambda_i}{1-\lambda_n} x_i\right) + \lambda_n f(x_n) \leqslant$$

$$\leqslant (1-\lambda_n) \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\lambda_i}{1-\lambda_n} f(x_i) + \lambda_n f(x_n) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$$

Așadar $P(n)$ este adevărată.

Corolar 1. *Fie $I \subseteq \mathbf{R}$ un interval și $f : I \to \mathbf{R}$ o funcție convexă. Atunci $(\forall)\ x_1, \ldots, x_n \in I$; $(\forall)\ \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbf{R}_+$, avem inegalitatea:*

$$f\left(\frac{\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n}{\lambda_1 + \ldots + \lambda_n}\right) \leqslant \frac{\lambda_1 f(x_1) + \ldots + \lambda_n f(x_n)}{\lambda_1 + \ldots + \lambda_n}$$

În particular, avem inegalitatea:

$$f\left(\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}\right) \leqslant \frac{1}{n}(f(x_1) + \ldots + f(x_n))$$

7.1.3. Propoziție. *Fie $I \subseteq \mathbf{R}$ un interval și $f : I \to \mathbf{R}$ o funcție. Punem*

$$p_a(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}, \quad x \in I \setminus \{a\}, \quad (a \in I \text{ fixat});$$

$$r(x_1, x_2, x_3) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ f(x_1) & f(x_2) & f(x_3) \end{vmatrix} \Big/ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{vmatrix} \quad x_1, x_2, x_3 \in I,\ x_i \neq x_j\ (i \neq j)$$

Atunci condițiile 1°—3° *sînt echivalente* :

1° f *este convexă (resp. strict convexă)*;

2° $(\forall)\ a \in I$, *funcția* p_a *este monoton (resp. strict) crescătoare*;

3° $r \geqslant 0$ (resp. $r > 0$) *i.e.* $r(x_1, x_2, x_3) \geqslant 0$ *(resp.* > 0*),* $(\forall)\ x_1, x_2, x_3 \in I$, $x_i \neq x_j\ (i \neq j)$

Dem. Să stabilim în prealabil relația :

$$r(x_1, x_2, x_3) = \frac{p_{x_2}(x_3) - p_{x_2}(x_1)}{x_3 - x_1},\quad (\forall)\ x_1, x_2, x_3 \in I,\ x_i \neq x_j\ \ (i \neq j) \tag{1}$$

Într-adevăr, numitorul funcției r este un determinant Vandermonde, deci

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{vmatrix} = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant 3} (x_j - x_i) = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)$$

Să calculăm valoarea numărătorului lui r :

$$-\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ f(x_1) & f(x_2) & f(x_3) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ x_1 - x_2 & x_2 & x_3 - x_1 \\ f(x_1) - f(x_2) & f(x_2) & f(x_3) - f(x_1) \end{vmatrix} =$$

$$= (x_1 - x_2)(f(x_3) - f(x_2)) - (x_3 - x_2)(f(x_1) - f(x_2)),$$

deci

$$r(x_1, x_2, x_3) = \frac{(x_1 - x_2)(f(x_3) - f(x_2)) - (x_3 - x_2)(f(x_1) - f(x_2))}{(x_1 - x_2)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} =$$

$$= \frac{p_{x_2}(x_3) - p_{x_2}(x_1)}{x_3 - x_1}.$$

Relația (1) este arătată.

Să observăm, mai departe, că funcția r este simetrică i.e. $(\forall)\ \pi$ o permutare a mulțimii $\{1, 2, 3\}$ avem :

$$r(x_1, x_2, x_3) = r(x_{\pi(1)}, x_{\pi(2)}, x_{\pi(3)}),\quad (\forall)\ x_1, x_2, x_3 \in I,\ x_i \neq x_j\ \ (i \neq j) \tag{2}$$

$2° \Leftrightarrow 3°$ Într-adevăr avem :

$2° \Leftrightarrow (\forall)\ a \in I$ funcția p_a este monoton crescătoare $\Leftrightarrow (\forall)\ a \in I$, $(\forall)\ x_1, x_2 \in I \setminus \{a\}$, $x_1 < x_3$, avem $p_a(x_1) \leqslant p_a(x_3) \overset{(1)}{\Leftrightarrow} (\forall)\ x_1, a, x_3 \in I$, $x_1 < a < x_3$, avem $r(x_1, a, x_3) \geqslant 0 \overset{(2)}{\Leftrightarrow} r \geqslant 0 \Leftrightarrow 3°$

$1° \Leftrightarrow 2°$ Fie $x_1, x_3 \in I$, $x_1 < x_3$, fixați. Evident $x_2 \in (x_1, x_3) \Leftrightarrow (\exists)\ \lambda \in (0, 1)$ a.î. $x_2 = (1 - \lambda)x_1 + \lambda x_3$. În acest caz din (1) rezultă

$$r(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{x_3 - x_1}\left[\frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} - \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}\right] =$$

$$= \frac{1}{x_3 - x_1}\left[\frac{f(x_3) - f(x_2)}{(1 - \lambda)(x_3 - x_1)} - \frac{f(x_1) - f(x_2)}{\lambda(x_1 - x_3)}\right] =$$

$$= \frac{1}{x_3 - x_1} \cdot \frac{\lambda(f(x_3) - f(x_2)) + (1 - \lambda)(f(x_1) - f(x_2))}{\lambda(1 - \lambda)(x_3 - x_1)^2},$$

deci

$$r(x_1, x_2, x_3) = \frac{(1-\lambda) f(x_1) + \lambda f(x_3) - f((1-\lambda) x_1 + \lambda x_3)}{\lambda(1-\lambda)(x_3 - x_1)^2} \tag{3}$$

Aşadar avem :

$$r \geqslant 0 \overset{(2)}{\Leftrightarrow} r(x_1, x_2, x_3) \geqslant 0, \quad (\forall)\, x_1, x_2, x_3 \in I,\ x_1 < x < x_3 \overset{(3)}{\Leftrightarrow} (1-\lambda) f(x_1) +$$
$$+ \lambda f(x_3) \geqslant f((1-\lambda) x_1 + \lambda x_3), \quad (\forall)\, x_1, x_3 \in I,\ x_1 < x_2, \quad (\forall)\, \lambda \in (0, 1),$$

deci $r \geqslant 0 \Leftrightarrow f$ convexă.

Corolar 1. *Fie $I \subseteq \mathbf{R}$ un interval şi $f : I \to \mathbf{R}$ o funcţie. Atunci f este convexă (resp. strict convexă) $\Leftrightarrow$ $(\forall)\, x_1, a, x_2 \in I$, $x_1 < a < x_2$; avem $p_a(x_1) \leqslant$ $\leqslant$ (resp. $<$) $p_a(x_2)$.*

Dem. Aplicăm P.7.1.3. ţinînd seama că funcţia r este simetrică.

Corolar 2. *Fie $I \subseteq \mathbf{R}$ un interval şi $f : I \to \mathbf{R}$ o funcţie. Atunci f convexă $\Leftrightarrow$ $(\forall)$ $a, b, c, d \in I$, $a < c < b < d$, avem :* $\dfrac{f(a) - f(b)}{a - b} \leqslant \dfrac{f(c) - f(d)}{c - d}$.

Dem. ($\Rightarrow$) Funcţia $p_c(x) = \dfrac{f(x) - f(c)}{x - c}$, $x \in I \setminus \{c\}$ este monoton crescătoare (P.7.1.3.(2°) , deci

$$\frac{f(b) - f(c)}{b - c} \leqslant \frac{f(d) - f(c)}{d - c} \tag{1}$$

Analog funcţia $p_b(x) = \dfrac{f(x) - f(b)}{x - b}$, $x \in I \setminus \{b\}$ este monoton crescătoare, deci

$$\frac{f(a) - f(b)}{a - b} \leqslant \frac{f(c) - f(b)}{c - b} \tag{2}$$

Din (1) şi (2) rezultă inegalitatea din enunţ.

($\Leftarrow$) Fie $x, a, y \in I$, $x < a < y$, fixaţi. Atunci $(\forall)\, \alpha \in (x, a)$ şi $\beta \in (a, y)$, avem :

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leqslant \frac{f(\alpha) - f(\beta)}{\alpha - \beta} \leqslant \frac{f(a) - f(y)}{a - y} \leqslant \frac{f(y) - f(a)}{y - a},$$

deci $p_a(x) \leqslant p_a(y)$ şi deci (Cor. 1) f este convexă.

Corolar 3. *Fie $I \subseteq \mathbf{R}$ un interval şi $f : I \to \mathbf{R}$ o funcţie. Atunci f este concavă (resp. strict convexă)* $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ f(x_1) & f(x_2) & f(x_3) \end{vmatrix} \geqslant 0$ (resp. > 0), $(\forall)\, x_1, x_2, x_3 \in I$, $x_1 < x_2 < x_3$.

Dem. Să observăm că $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{vmatrix} \geqslant 0$, $(\forall)\, x_1 < x_2 < x_3$, deci

$$r \geqslant 0 \Leftrightarrow r(x_1, x_2, x_3) \geqslant 0, \quad (\forall)\, x_1, x_2, x_3 \in I, \quad x_1 < x_2 < x_3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ f(x_1) & f(x_2) & f(x_3) \end{vmatrix} \geqslant 0, \ (\forall)\, x_1, x_2, x_3 \in I, \ x_1 < x_2 < x_3.$$

Ținem seama mai departe că f convexă $\Leftrightarrow r \geqslant 0$.

7.1.4. Propoziție. *Fie $I \subseteq \mathbf{R}$ un interval și $f : I \to \mathbf{R}$ o funcție convexă. Atunci*

1° *f are derivate laterale (finite) în fiecare punct $x_0 \in \overset{\circ}{I}$ și avem :*

$$f'_s(x_1) \leqslant f'_d(x_1) \leqslant f'_s(x_2) \leqslant f'_d(x_2), \quad (\forall)\, x_1, x_2 \in \overset{\circ}{I},\ x_1 < x_2,$$

deci funcțiile f'_s și f'_d sînt monoton crescătoare.

2° *Dacă $a := \inf I \in I$ (resp. $b := \sup I \in I$), rezultă că f admite derivată la dreapta în a (resp. la stînga în b) și avem :*

$$f'_d(a) \leqslant f'_s(x) \quad (\text{resp. } f'_d(x) \leqslant f'_s(b)), \quad (\forall)\, x \in \overset{\circ}{I}$$

3° *f este derivabilă pe I exceptînd cel mult o mulțime numerabilă.*

4° *f este continuă pe $\overset{\circ}{I}$ și nu este numaidecît continuă în $a := \inf I$ (resp. $b := \sup$), dacă a (resp. b) aparține lui I.*

Dem. 1° Fie $x_1, x_2 \in \overset{\circ}{I}$, $x_1 < x_2$ fixați. Atunci $(\forall)\, x, y, z \in I$, $x < x_1 < y < x_2 < z$, avem (P.7.1.3.(2°)) :

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \leqslant \frac{f(y)-f(x_1)}{y-x_1} = \frac{f(x_1)-f(y)}{x_1-y} \leqslant \frac{f(x_2)-f(y)}{x_2-y} \leqslant \frac{f(x_2)-f(z)}{x_2-z}$$

Rapoartele fiind funcții monotone de x, y, z respectiv, au limită, deci avem :

$$\lim_{x \nearrow x_1} \frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \leqslant \lim_{y \searrow x_1} \frac{f(y)-f(x_1)}{y-x_1} \leqslant \lim_{y \nearrow x_2} \frac{f(x_2)-f(y)}{x_2-y} \leqslant \lim_{z \searrow x_2} \frac{f(x_2)-f(z)}{x_2-z}$$

prin urmare

$$f'_s(x_1) \leqslant f'_d(x_1) \leqslant f'_s(x_2) \leqslant f'_d(x_2)$$

2° Dacă $a \in I$ (resp. $b \in I$), se refăce raționamentul din 1°, plecînd de la tripletul $a < x_1 < x$ (resp. $x < x_2 < b$).

3° Fie A mulțimea punctelor $x \in \overset{\circ}{I}$ în care f este discontinuă ; $(\forall)\, x \in A$, fie $J_x := (f'_s(x), f'_d(x))$. Din 1° rezultă că $J_{x_1} \cap J_{x_2} = \emptyset$, $(\forall)\, x_1, x_2 \in A$, $x_1 < x_2$, deci $(J_x)_{x \in A}$ este o familie de intervale deschise, disjuncte două cîte două. Dacă $x \in A$, fie $r_x \in J_x \cap \mathbf{Q}$ fixat. Evident aplicația $A \ni x \mapsto r_x \in \mathbf{Q}$ este injectivă, deci A este echipotentă cu o parte a lui $\mathbf{Q}$ și cum $\mathbf{Q}$ este numerabilă, rezultă că A este cel mult numerabilă. În fine mai adăugăm eventual, mulțimii A cele două capete a și b,

4° Din 1° rezultă că $(\forall)\, x_0 \in \overset{\circ}{I}$, f este continuă la stînga și la dreapta în x_0, deci f este continuă în x_0.

În fine, dacă $a \in I$ și $f(a) = 1$ iar $f(x) = 0$, $(\forall)\, x \in I \setminus \{a\}$, atunci f este convexă și totuși f este discontinuă în a.

Corolar 1. *Fie $I \subseteq \mathbf{R}$ un interval și $f : I \to \mathbf{R}$ o funcție convexă (resp. strict convexă) și derivabilă. Atunci f' este monoton (resp. strict) crescătoare.*

Dem. Aplicăm P.7.1.4. Dacă f este strict convexă, inegalitățile $\leqslant$ în 1° sînt stricte, deci $f'_s = f'_d = f'$ este strict crescătoare.

7.1.5. Propoziție. *Fie $I \subseteq \mathbf{R}$ un interval și $f : I \to \mathbf{R}$ o funcție derivabilă. Atunci cond. 1°–3° sînt echivalente :*

1° *f este convexă (resp. strict convexă) ;*

2° *Funcția $f' : I \to \mathbf{R}$ este monoton (resp. strict) crescătoare :*

3° $f(x) \geqslant (\text{resp. } >)\ f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0)$, $(\forall)\, x, x_0 \in I$, $x \neq x_0$.

Dem. 1° ⇒ 2°. Aplicăm P.7.1.4.Cor.1.

2° ⇒ 1°. Fie $x_1, a, x_2 \in I$, $x_1 < a < x_2$, fixaţi. Atunci din T.6.3.2. avem:

$$p_a(x_1) = \frac{f(x_1) - f(a)}{x_1 - a} = f'(\xi); \quad p_a(x_2) = \frac{f(x_2) - f(a)}{x_2 - a} = f'(\eta),$$

unde $\xi \in (x_1, a)$, $\eta \in (a, x_2)$. Cum f' este monoton crescătoare, avem $f'(\xi) \leqslant f'(\eta)$, deci $p_a(x_1) \leqslant p_a(x_2)$ şi p_a este monoton crescătoare, prin urmare (P.7.1.3.(2°)) f este convexă.

3° ⇒ 1°. Fie $x_1, x_2 \in I$ şi $\lambda \in (0, 1)$ fixaţi; notăm $x_0 = (1 - \lambda)x_1 \dotplus \lambda x_2$. Din 3° rezultă

$$f(x) \geqslant f(x_0) \dotplus (x - x_0) f'(x_0), \quad (\forall)\, x \in I \tag{1}$$

Înlocuim în (1) pe x cu x_1 (resp. x_2) şi amplificăm cu $1 - \lambda$ (resp. λ); adunînd inegalităţile rezultate, obţinem:

$$(1 - \lambda) f(x_1) \dotplus \lambda f(x_2) \geqslant f(x_0) \dotplus (1 - \lambda)(x_1 - x_0) f'(x_0) \dotplus \lambda(x_2 - x_0) f'(x_0) =$$
$$= f(x_0) \dotplus ((1 - \lambda) x_1 \dotplus \lambda(x_2 - x_0) f'(x_0) = f((1 - \lambda) x_1 \dotplus \lambda x_2),$$

deci f este convexă.

1° ⇒ 3°. Fie $x, x_0 \in I$, $x \neq x_0$, fixaţi; presupunem $x < x_0$. Atunci (P.7.1.3.(2°))

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = p_{x_0}(x) \leqslant p_{x_0}(t) = \frac{f(t) - f(x_0)}{t - x_0}, \quad (\forall)\, t \in (x, x_0),$$

deci

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leqslant \lim_{t \nearrow x_0} \frac{f(t) - f(x_0)}{t - x_0} = f'(x_0)$$

şi deci

$$f(x) \geqslant f(x_0) \dotplus (x - x_0) f'(x_0)$$

Raţionament analog dacă $x \rhd x_0$.

7.1.6. Propoziţie. *Fie $I \subseteq \mathbf{R}$ un interval şi $f : I \to \mathbf{R}$ o funcţie de două ori derivabilă. Atunci au loc afirmaţiile:*

1° *f convexă $\Leftrightarrow f'' \geqslant 0$*

2° *f strict convexă $\Leftrightarrow f'' \geqslant 0$ şi mulţimea $A = \{x \in I;\ f''(x) > 0\}$ este densă în I.*

Dem. 1° Din T.6.3.2.Cor.1 avem $f'' \geqslant 0 \Leftrightarrow f'$ monoton crescătoare. Aplicăm mai departe P.7.1.5.

2° ($\Rightarrow$) f fiind strict convexă, este convexă, deci din 1° avem $f'' \geqslant 0$. Presupunem că A nu este densă în I, deci $(\exists)\, J \subseteq I$ un interval nedegenerat a.î. $A \cap J = \emptyset$, deci $f'' = 0$ pe J şi deci f' este constantă pe J. Or din P.7.1.2.(2°) avem că f' este strict crescătoare pe I, deci şi pe J. Am obţinut o contradicţie. Rămîne că A este densă în I.

($\Leftarrow$) Dacă $f'' \geqslant 0$, rămîne că f' este monoton crescătoare. Presupunem că f' nu este strict crescătoare pe I, deci $(\exists)\, J \subseteq I$ un interval nedegenerat a.î. f' este constantă pe J, deci $f'' = 0$ pe J şi deci $J \cap A = \emptyset$, în contradicţie cu faptul că A este densă în I. Rămîne că f' este strict crescătoare, deci (P.7.1.5.) f este strict convexă.

Corolar 1. (Ineg. mediilor generalizate) *Fie $a_1, a_2, \ldots, a_n$; $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbf{R}_+$. Atunci avem inegalitatea:*

$$(a_1^{\lambda_1} \cdot a_2^{\lambda_2} \ldots a_n^{\lambda_n})^{\frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n}} \leqslant \frac{\lambda_1 a_1 \dotplus \lambda_2 a_2 \dotplus \ldots \dotplus \lambda_n a_n}{\lambda_1 \dotplus \lambda_2 \dotplus \ldots \dotplus \lambda_n}$$

Dem. Fie $f : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$ funcţia ln. Deoarece $f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}_+$, funcţia f este concavă (P. 7.1.6. (1°)), deci (P.7.1.2. Cor. 1) avem :

$$\ln \frac{\lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_n a_n}{\lambda_1 + \ldots + \lambda_n} \geqslant \frac{\lambda_1 \ln a_1 + \ldots + \lambda_n \ln a_n}{\lambda_1 + \ldots + \lambda_n} =$$

$$= \frac{\ln a_1^{\lambda_1} + \ldots + \ln a_n^{\lambda_n}}{\lambda_1 + \ldots + \lambda_n} = \ln (a_1^{\lambda_1} \ldots a_n^{\lambda_n})^{\frac{1}{\lambda_1 + \ldots + \lambda_n}},$$

de unde rezultă inegalitatea căutată.

În particular, dacă $\lambda_i = 1$, $(\forall)\ i = \overline{1, n}$, obţinem *inegalitatea mediilor* :

$$(a_1 a_2 \ldots a_n)^{\frac{1}{n}} \leqslant \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}.$$

Corolar 2. *Fie $I \subseteq \mathbf{R}$ un interval şi $f : I \to \mathbf{R}$ o funcţie de două ori derivabilă. Atunci f este afină $\Leftrightarrow (\exists)\ \alpha, \beta \in \mathbf{R}$ a.î. $f(x) = \alpha x + \beta$, $(\forall)\ x \in I$.*

Dem. f afină $\Leftrightarrow f$ convexă şi concavă $\Leftrightarrow f'' \geqslant 0$ şi $f'' \leqslant 0 \Leftrightarrow f'' = 0 \Leftrightarrow (\exists)\ \alpha, \beta \in \mathbf{R}$ a.î. $f(x) = \alpha x + \beta$, $(\forall)\ x \in I$.

Exemple

1. Funcţia sin este concavă pe intervalul $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, deci

$$\sin\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \sin x_i, \quad (\forall)\ x_i \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \quad (\forall)\ \lambda_i \in \mathbf{R}_+,$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n = 1.$$

2. Funcţia $f(x) = x^p$, $x \in \mathbf{R}_+$, este convexă (resp. concavă) dacă $p \geqslant 2$ (resp. $0 < p < 2$), deci $\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right)^p \leqslant$ (resp. $\geqslant$) $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^p$, $(\forall)\ x_i \in \mathbf{R}_+$, $\lambda_i \in \mathbf{R}_+$ cu $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n = 1$.

3). Funcţia $|\cdot|$ este convexă. Următoarele funcţii nu sînt nici convexe nici concave; funcţia signum, funcţia parte întreagă şi funcţia lui Dirichlet

7.2. Reprezentarea grafică a funcţiilor.

Fie $A \subseteq \mathbf{R}$ o mulţme care se scrie ca o reuniune finită sau numerabilă de intervale nedegenerate, disjuncte două cîte două; vom spune atunci că A este o mulţime *standard*. Fie mai departe $f : A \to \mathbf{R}$ o funcţie.

A reprezenta f grafic înseamnă a desena graficul lui f i.e. mulţimea $G_f = \{(x, f(x)),\ x \in A\}$ într-un sistem de axe rectangulare $x0y$.

Să facem cîteva consideraţii privind reprezentarea grafică a funcţiei f. Evident este suficient să studiem comportarea lui f cînd A este o reuniune de două intervale.

Din teorema lui Fermat am dedus că *extremele locale ale lui f se află printre soluţiile* $f'(x) = 0$.

7.2.1. Propoziţie. *Fie $I_1, I_2 \subseteq \mathbf{R}$ două intervale a.î.* $\sup I_1 \leqslant \inf I_2$ *şi $f : I_1 \cup I_2 \to \mathbf{R}$ o funcţie; notăm $f_k = f|_{I_k}$ $(k = \overline{1, 2})$. Atunci :*

1° *Dacă $x_0 \in I_k$ şi* $\sup I_1 < \inf I_2$, *rezultă că f este derivabilă în $x_0 \Leftrightarrow f_k$ este derivabilă în x_0. În acest caz avem $f'(x_0) = f_k'(x_0)$.*

2° *Dacă* $x_0 = \sup I_1 = \inf I_2 \in I_1 \cup I_2$, *rezultă că*

$$(\exists)\ f_s'(x_0) \Leftrightarrow (\exists)\ \alpha_{x_0} = \lim_{x \nearrow x_0} \frac{f_1(x) - f(x_0)}{x - x_0};$$

resp.

$$(\exists)\ f_d'(x_0) \Leftrightarrow (\exists)\ \beta_{x_0} = \lim_{x \searrow x_0} \frac{f_2(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

In acest caz avem $f_s'(x_0) = \alpha_{x_0}$ *resp.* $f_d'(x_0) = \beta_{x_0}$, *prin urmare* f *este derivabilă în* $x_0 \Leftrightarrow \alpha_{x_0} = \beta_{x_0}$.

3° *Dacă* $x_0 = \sup I_1 = \inf I_2 \in I_1 \cup I_2$, f_k *este derivabilă pe* $\mathring{I}_k$ $(k = \overline{1,2})$ *și* $(\exists)\ \alpha_{x_0} = \lim_{x \nearrow x_0} f_1'(x)$ (*resp.* $(\exists)\ \beta_{x_0} = \lim_{x \searrow x_0} f_2'(x)$), *rezultă că* $f_s'(x_0) = \alpha_{x_0}$ (*resp.* $f_d'(x_0) = \beta_{x_0}$).

Dem. 1° rezultă din P.6.1.5.; 2° rezultă din P.6.1.8.; 3° rezultă din 2° și din T.6.1.7.

7.2.2. Propoziție. *Fie* $A \subseteq \mathbf{R}$ *o mulțime standard,* $x_0 \in \mathring{A}$ *și* $f : A \to \mathbf{R}$ *o funcție continuă pe* $V = (x_0 - \eta, x_0 + \eta) \subseteq A$ *și derivabilă pe* $V \setminus \{x_0\}$; *presupunem că* $f' > 0$ *pe* $(x_0 - \eta, x_0)$ *și* $f' < 0$ *pe* $(x_0, x_0 + \eta)$ *sau invers. Atunci* x_0 *este punct de extrem local strict pentru* f.

Dem. Dacă $f' > 0$ pe $(x_0 - \eta, x_0)$ și $f' < 0$ pe $(x_0, x_0 + \eta)$, atunci f este strict descrescătoare pe $(x_0 - \eta, x_0)$ și strict crescătoare pe $(x_0, x_0 + \eta)$, deci $f(x) > f(x_0)$, $(\forall)\ x \in V \setminus \{x_0\}$ și deci x_0 este punct de minim local strict pentru f.

Corolar 1. *Fie* $A \subseteq \mathbf{R}$ *o mulțime standard,* $x_0 \in \mathring{A}$ *și* $f : A \to \mathbf{R}$ *o funcție derivabilă pe* $V = (x_0 - \eta, x_0 + \eta) \subseteq A$; *presupunem că* $f' > 0$ *pe* $(x_0 - \eta, x_0)$ *și* $f' < 0$ *pe* $x_0, x_0 + \eta)$. *Atunci* $f'(x_0) = 0$ *și* x_0 *este punct de extrem local strict pentru* f.

Dem. f' având proprietatea lui Darboux (T.6.3.7.) și având semne diferite pe V, se anulează cel puțin într-un punct. Cum $f'(x) \neq 0$, $(\forall)\ x \in V \setminus \{x_0\}$, rezultă că $f'(x_0) = 0$.

7.2.3. Definiție. Fie $A \subseteq \mathbf{R}$ o mulțime standard și $f : I \to \mathbf{R}$ o funcție derivabilă. Vom spune că $x_0 \in \mathring{A}$ este punct de *inflexiune* pentru f, dacă $(\exists)\ \eta > 0$ cu $(x_0 - \eta, x_0 + \eta) \subseteq A$ a.î. f este strict concavă pe $(x_0 - \eta, x_0)$ și strict convexă pe $(x_0, x_0 + \eta)$ sau invers.

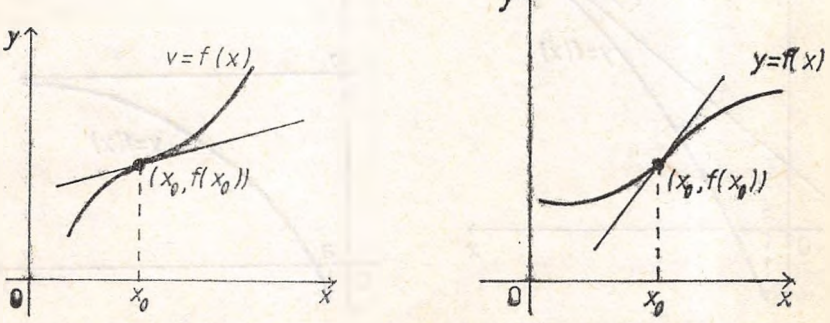


Fig. 17

Așadar x_0 este punct de inflexiune, dacă într-o vecinătate suficient de mică a punctului $(x_0, f(x_0))$ din plan, tangenta geometrică la graficul lui f în punctul $(x_0, f(x_0))$ traversează graficul o singură dată (fig. 17).

7.2.4. Propoziție. *Fie $A \subseteq \mathbf{R}$ o mulțime standard și $f : I \to \mathbf{R}$ o funcție de două ori derivabilă. Atunci $x_0 \in \mathring{A}$ este punct de inflexiune pentru f, dacă* $(\exists)\ \eta > 0$ *cu* $(x_0 - \eta, x_0 + \eta) \subseteq A$ *a.î.* $f'' > 0$ *pe* $(x_0 - \eta, x_0)$ *și* $f'' < 0$ *pe* $(x_0, x_0 + \eta)$ *sau invers.*

Dem. Aplicăm P.7.1.6.(2°).

7.2.5. Propoziție. *Fie $A \subseteq \mathbf{R}$ o mulțime standard și $f : A \to \mathbf{R}$ o funcție de două ori derivabilă. Dacă $x_0 \in \mathring{A}$ este punct de inflexiune pentru f, atunci $f''(x_0) = 0$.*

Dem. x_0 fiind punct de inflexiune pentru f, $(\exists)\ \eta > 0$ cu $(x_0 - \eta, x_0 + \eta) \subseteq A$ a.î. f este strict concavă pe $(x_0 - \eta, x_0)$ și strict convexă pe $(x_0, x_0 + \eta)$ sau invers; presupunem că sîntem în primul caz. Atunci f' este strict descrescătoare pe $(x_0 - \eta, x_0)$ și deci și pe $(x_0 - \eta, x_0]$ și deci $f'' \leqslant 0$ pe $(x_0 - \eta, x_0]$. Analog se arată că $f'' \geqslant 0$ pe $[x_0, x_0 + \eta)$, prin urmare $f''(x_0) = 0$.

În rezumat:

1° Se rezolvă ecuația $f'(x) = 0$. *Extremele locale ale lui f se află printre soluțiile ecuației* $f'(x) = 0$. Fie x_0 cu $f'(x_0) = 0$; studiind *semnul* lui f' într-o vecinătate a lui x_0, deducem dacă x_0 este sau nu extrem local; studiind *monotonia* lui f' într-o vecinătate a lui x_0 deducem dacă x_0 este sau nu punct de inflexiune.

2° Se rezolvă ecuația $f''(x) = 0$. *Punctele de inflexiune se află printre soluțiile ecuației* $f''(x) = 0$. Fie x_0 cu $f''(x_0) = 0$; studiind *semnul* lui f'' într-o vecinătate a lui x_0, deducem dacă x_0 este sau nu punct de inflexiune.

3° Dacă $f'(x_0) = 0$ și $f''(x_0) > 0$ (resp. < 0), atunci x_0 este minim local (resp. maxim local).

Să observăm că dacă $f'(x_0) = 0$, putem deduce dacă x_0 este extrem local, studiind *semnul* lui f'' într-o vecinătate a lui x_0, iar dacă $f''(x_0) = 0$, putem deduce dacă x_0 este punct de inflexiune, studiind *monotonia* lui f' într-o vecinătate a lui x_0.

7.2.6. Definiție. Fie $f : (a, \infty) \to \mathbf{R}$ o funcție. Vom spune că dreapta (Δ) de ecuație $y = mx + n$ este *asimptotă* la $+\infty$ la graficul lui f, dacă $\lim\limits_{x \to \infty} (f(x) - (mx + n)) = 0$. Asimptota se numește *oblică* (fig. 18) (resp. *orizontală* (fig. 19)) dacă $m \neq 0$ (resp. $m = 0$). Analog se definește *asimptota* la $-\infty$.

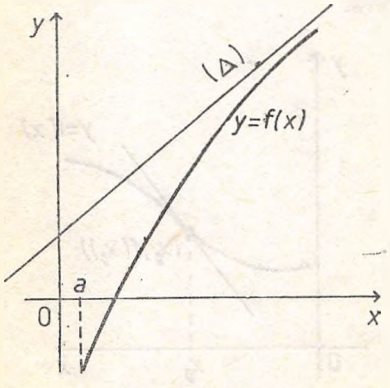


Fig. 18

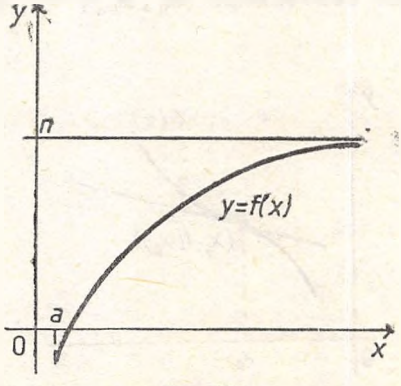


Fig. 19

7.2.7. Propoziție. *Dreapta (Δ) de ecuație $y = mx + n$ este asimptotă la $+\infty$ la graficul funcției $f : (a, \infty) \to \mathbf{R} \Leftrightarrow m = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x}$ și $n = \lim\limits_{x \to \infty} (f(x) - mx)$.*

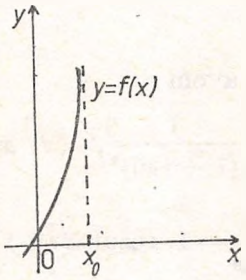
Dem. Dacă $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-mx-n)=0$, atunci

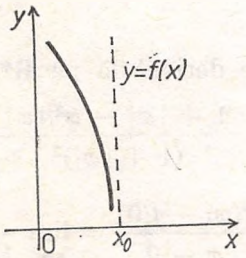
$$0=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-mx-n}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}-m,$$

deci $m=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$ etc.

7.2.8. Definiţie. Fie $I\subseteq\mathbf{R}$ un interval, $x_0\in\bar{I}$ un punct şi $f:I\setminus\{x_0\}\to\mathbf{R}$ o funcţie. Vom spune că dreapta (Δ) de ecuaţie $x=x_0$ este *asimptotă verticală* (fig. 20) la graficul lui f, dacă $\lim\limits_{x\nearrow x_0}f(x)=\pm\infty$, $\lim\limits_{x\searrow x_0}f(x)=\pm\infty$ sau $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\pm\infty$.

$f(x_0-)=+\infty$

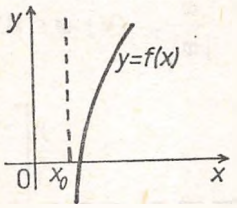


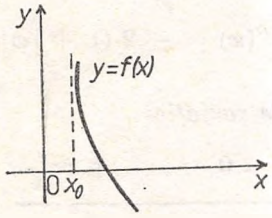


$f(x_0-)=-\infty$

Fig. 20

$f(x_0+)=-\infty$





$f(x_0+)=+\infty$

Exemplul 1. *Să se reprezinte grafic funcţia* $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ *definită astfel:* $f(x)=\{x^2\}$.

Evident $f(x)=f(-x)$, $(\forall)\ x\in\mathbf{R}$, deci f este pară. Deoarece funcţia $x\mapsto x^2$, $x\in\mathbf{R}$, este continuă şi derivabilă pe $\mathbf{R}$, iar funcţia $x\mapsto\{x\}$, $x\in\mathbf{R}$, este continuă pe $\mathbf{R}$ şi derivabilă pe $\mathbf{R}\setminus\left\{\frac{n+1}{2}\,\middle|\,n\in\mathbf{Z}\right\}$, rezultă că f este continuă pe $\mathbf{R}$ şi derivabilă pe $\mathbf{R}\setminus\left\{\frac{n+1}{2};\ n\in\mathbf{Z}\right\}$. Fie $t\geqslant 0$ fixat. Atunci

$\{t\}=t-n$, $(\forall)\ t\in\left[n,\ n+\frac{1}{2}\right]$ şi $\{t\}=n+1-t$, $(\forall)\ t\in\left(n+\frac{1}{2},\ n+1\right]$

deci

$$f(x)=\begin{cases}x^2-n, & x\in\left[\sqrt{n},\ \sqrt{n+\frac{1}{2}}\right];\\ n+1-x^2, & x\in\left(\sqrt{n+\frac{1}{2}},\ \sqrt{n+1}\right].\end{cases}$$

Graficul lui $f|_{[0,\infty)}$ este reprezentat în fig. 21

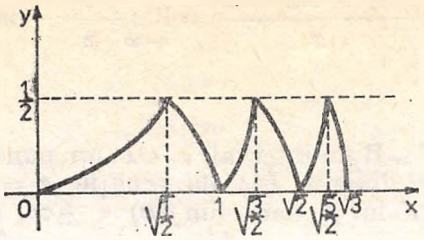


Fig. 21

Exemplul 2. *Să se reprezinte grafic funcția* $f : \mathbf{R} \to (-1, 1)$ *definită astfel* $f(x) = \dfrac{x}{1 + |x|}$.

Evident f este derivabilă pe $\mathbf{R}^*$ și avem:

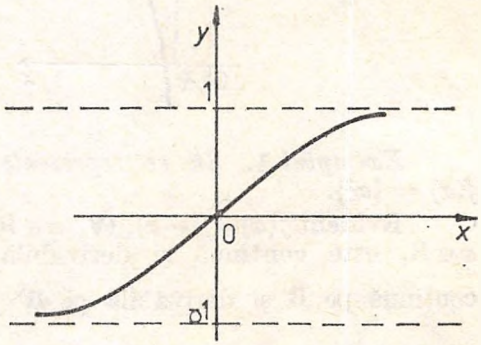
$$f'(x) = \frac{1 + |x| - x^2/|x|}{(1 + |x|)^2} = \frac{1}{(1 + |x|)^2}, \quad (\forall)\ x \in \mathbf{R}^*$$

Deoarece $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{1 + x} = 1$, rezultă că f este derivabilă în 0 și $f'(0) = 1$. De asemenea avem:

$$f''(x) = -2\,(1 + |x|)^{-3} \cdot \frac{x}{|x|}, \quad (\forall)\ x \in \mathbf{R}^*$$

Tablou de variație

x	$-\infty$			0			$+\infty$
f'		$+$	$+$	1	$+$	$+$	
f''		$+$	$+$	0	$-$	$-$	
f	-1	$\smile\nearrow$		0	$\nearrow\frown$		1



Graficul lui f este reprezentat în (fig. 22)

Fig. 22

Exemplul 3. *Să se reprezinte grafic funcțiile* $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + \lambda}$, λ-*parametru.*

Distingem următoarele cazuri:

a) $\lambda > 0$, atunci $\lambda = a^2$, deci $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + a^2}$; $D_f = \mathbf{R}$.

b) $\lambda < 0$, atunci $\lambda = -a^2$, deci $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - a^2}$; $D_f = \mathbf{R} \setminus \{\pm a\}$.

c) $\lambda = 0$, atunci $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$; $D_f = \mathbf{R}^*$.

Grafic situația poate fi reprezentată astfel (fig. 23) :

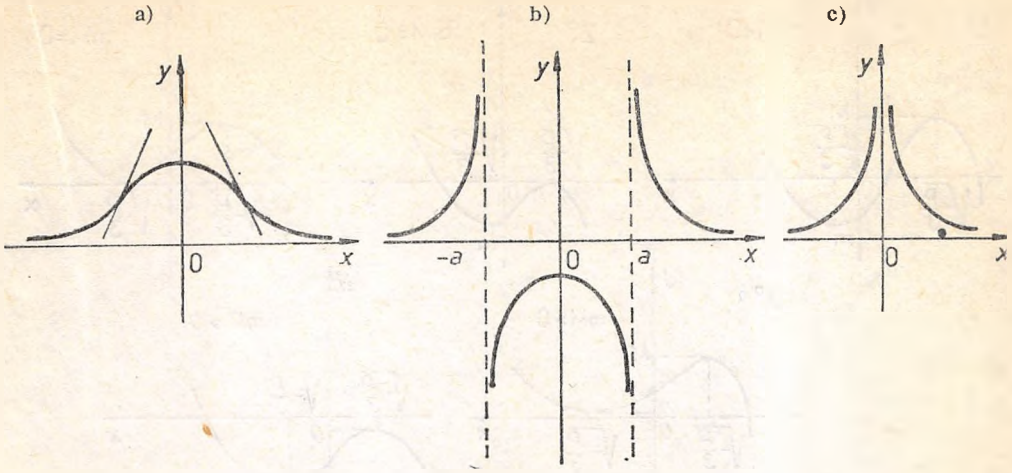


Fig. 23

Exemplul 4. Să se studieze cu ajutorul derivatelor ecuația $x^3+px+q=0$ (1)
Fie funcția polinomială $f(x) = x^3 + px + q$, $x \in \mathbb{R}$.

(i) $\boxed{p = 0}$ și $\boxed{q \neq 0}$ (resp. $\boxed{q = 0}$) $\Rightarrow$ ecuația (1) admite o singură rădăcină reală (resp. o rădăcină triplă : $x = 0$).

(ii) $\boxed{p > 0} \Rightarrow f' > 0 \Rightarrow f$ strict crescătoare $\Rightarrow$ ecuația (1) admite o singură rădăcină reală.

(iii) $\boxed{p < 0}$ ecuația $f'(x) = 0$ are 2 rădăcini distincte : $\pm\sqrt{-\frac{p}{3}}$

x	$-\infty$		$-\sqrt{-p/3}$		$+\sqrt{-p/3}$		$+\infty$
f'	|	$+\ +$	0	$-\ -$	0	$+\ +$	|
f	$-\infty$	$\nearrow$	$M = f(-\sqrt{-p/3})$	$\searrow$	$m = f(+\sqrt{-p/3})$	$\nearrow$	$+\infty$

Atunci ecuația (1) admite rădăcini reale distincte (resp. rădăcini reale două dintre ele confundate, resp. o singură rădăcină reală) $\Leftrightarrow mM < 0$ (resp. $= 0$, resp. > 0). Cum

$$\boxed{M = -\frac{2p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}} + q} \quad \text{și} \quad \boxed{m = \frac{2p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}} + q}$$

avem :

$$mM = \frac{4p^3 + 27q^2}{27} < 0 \quad (\text{resp.} = 0, \text{ resp.} > 0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{4p^3 + 27q} < 0 \quad (\text{resp.} = 0, \text{ resp.} > 0).$$

Grafic situaţia poate fi reprezentată astfel (fig. 24)

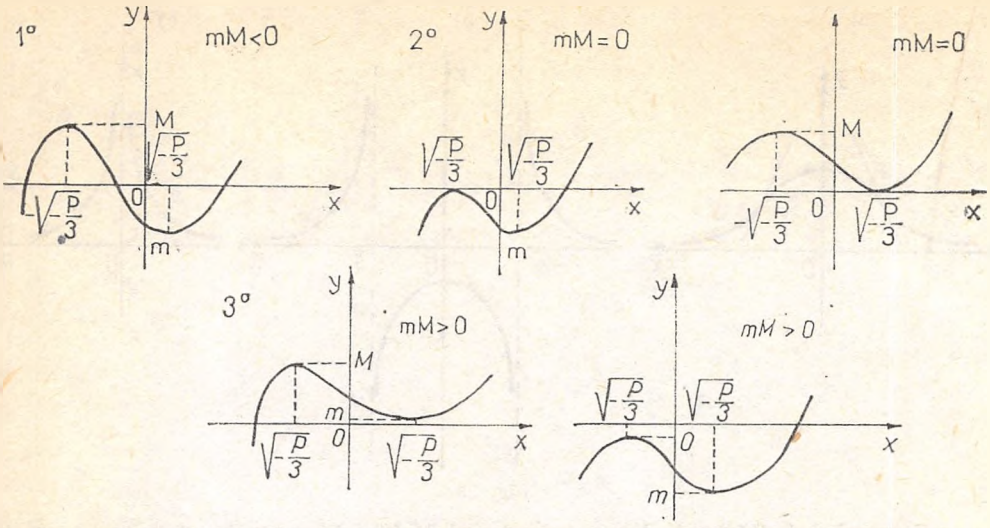


Fig. 24

Exemplul 5. *Să se reprezinte grafic funcţia* $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *definită astfel* $f(x) = e^{-x^2}$.

Evident f este indefinit derivabilă şi avem :

$$f'(x) = -2x\,e^{-x^2}; \quad f''(x) = 2(2x^2 - 1)\,e^{-x^2}, \quad (\forall)\ x \in \mathbf{R}.$$

Atunci

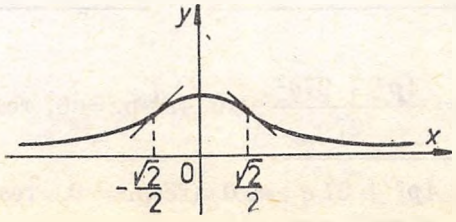
$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0; \quad f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Deoarece $f(-x) = f(x)$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$, funcţia este pară. Cum $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$, obţinem următorul tablou de variaţie :

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		0		$+\frac{\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
f'	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	$-$
f''	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
f	0	↗ ⌒	$e^{-\frac{1}{2}}$	↗ ⌓	1	↘ ⌓	$e^{-\frac{1}{2}}$	↘ ⌒	0

Graficul lui f este reprezentat în fig. 25.

Fig. 25



Exemplul 6. *Fie* $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *o funcție definită astfel* : $f(x) = \sqrt[3]{x^2 + \lambda x + 1}$, *unde* λ *este parametru real.*

1° *Pentru ce valori ale lui* λ *funcția* f *este derivabilă peste tot? Să se arate că în acest caz funcția* f *admite două puncte de inflexiune.*

2° *Să se reprezinte* f *grafic în cazul cînd* $\lambda = \dfrac{5}{2}$.

1° Evident funcția f este derivabilă pe $\mathbf{R} \Leftrightarrow x^2 + \lambda x + 1 \neq 0, (\forall)\, x \in \mathbf{R} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \lambda^2 - 4 < 0 \Leftrightarrow |\lambda| < 2$. Atunci :

$$f'(x) = \frac{2x + \lambda}{3\sqrt[3]{(x^2 + \lambda x + 1)^2}}; \quad f''(x) = \frac{-2(x^2 + \lambda x + \lambda^2 - 3)}{9(x^2 + \lambda x + 1)^{5/3}}, \quad (\forall)\, x \in \mathbf{R} \qquad (1)$$

Ecuația $x^2 + \lambda x + \lambda^2 - 3 = 0$, admite două rădăcini reale și distincte, deoarece discriminantul său este $\lambda^2 - 4(\lambda^2 - 3) = 3(4 - \lambda^2) > 0$.
Așadar f'' se anulează în două puncte $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$, cu $x_1 < x_2$ și își schimbă alternativ semnul pe intervalele $(-\infty, x_1)$, (x_1, x_2) și (x_2, ∞), deci x_1 și x_2 sînt puncte de inflexiune.

2° Dacă $\lambda = \dfrac{5}{2}$, atunci $\lambda > 2$, deci f nu este derivabilă pe tot $\mathbf{R}$. Cum ecuația $x^2 + \dfrac{5}{2}x - 1 = 0$, are rădăcinile -2 și $-\dfrac{1}{2}$, conchidem că f este derivabilă pe $\mathbf{R} \setminus \left\{-2, \dfrac{1}{2}\right\}$ și nederivabilă în -2 și $-\dfrac{1}{2}$. Din (1) pentru $\lambda = \dfrac{5}{2}$, se obțin limitele :

$\lim\limits_{x \to -2} f'(x) = -\infty$ și $\lim\limits_{x \to -\frac{1}{2}} f'(x) = +\infty$, deci tangentele la graficul lui f în punctele $(-2, f(-2))$ și $\left(-\dfrac{1}{2}, f\left(-\dfrac{1}{2}\right)\right)$ sînt paralele cu axa (fig. 26).

Tablou de variație

x	$-\infty$		-2		$-\frac{5}{4}$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
f'	|	$-$	$-\infty$	$-$	0	$+$	$+\infty$	$+$	|
f''	|	$-$	|	$+$	$+$	$+$	|	$-$	|
f	∞	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\sqrt[3]{\frac{9}{16}}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	∞
		$\smile$		$\smile$		$\frown$		$\frown$	

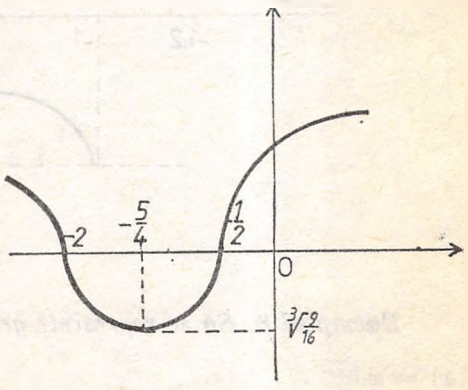


Fig. 26

Exemplul 7. *Să se reprezinte grafic funcția* $f : \mathbf{R} \setminus \{-1, 1\} \to \mathbf{R}$ *definită astfel* $f(x) = \operatorname{arc\,tg} \dfrac{1}{x^2 - 1}$.

Deoarece $f(-x) = f(x)$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}\setminus\{-1, 1\}$ graficul lui f este simetric faţă de axa $0y$.

Evident f este indefinit derivabilă şi avem :

$$f'(x) = -\frac{2x}{x^4 - 2x^2 + 2}, \quad f''(x) = \frac{2(3x^4 - 2x^2 + 2)}{(x^4 - 2x^2 + 2)^2}, \quad (\forall)\ x \in \mathbf{R}\setminus\{-1, 1\}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0\,; \quad f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{1+\sqrt{7}}{3}} \approx \pm 1{,}2$$

Tablou de variaţie

x	$-\infty$		$1{,}2$		-1		0		$+1$		$1{,}2$		$+\infty$
f'		$+$		$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	
f''		$+$	0	$-$	$-$	$-$		$-$	$-$	0	$+$	$+$	
f	0	$\nearrow$	$f(-1{,}2)$	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$	$-\frac{\pi}{2}$	$\searrow$	$\frac{\pi}{2}$	$\searrow$	$f(1{,}2)$	$\searrow$	0

Graficul lui f este reprezentat în fig. 27

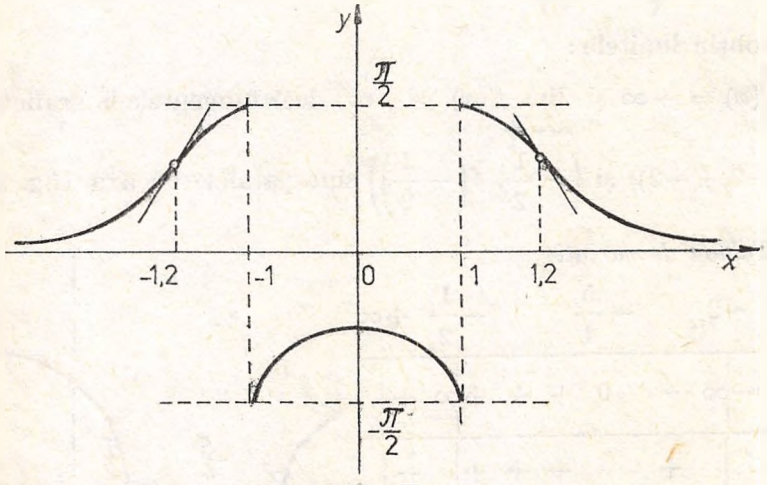


Fig. 27

Exemplul 8. *Să se reprezinte grafic funcţia* $f : \mathbf{R}\setminus\{1\} \to \mathbf{R}$ *definită astfel* $f(x) = x\,e^{\frac{1}{x-1}}$.

Evident f este continuă pe $\mathbf{R}\setminus\{1\}$ şi derivabilă pe $\mathbf{R}\setminus\{0,1\}$. Deoarece

$$f'_s(0) = \lim_{x \nearrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \nearrow 0} \frac{-x\,e^{\frac{1}{x-1}}}{x} = -e^{-1}$$

și

$$f'_d(0) = \lim_{x \searrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \searrow 0} \frac{x e^{\frac{1}{x-1}}}{x} = e^{-1},$$

rezultă că f nu este derivabilă în 0.

$$(\forall)\ x \in \mathbf{R} \setminus \{0,1\} \Rightarrow f'(x) = \frac{|x|}{x} e^{\frac{1}{x-1}} - \frac{|x|}{(x-1)^2} e^{\frac{1}{x-1}} =$$

$$= \frac{x^2 - 3x + 1}{x(x-1)^2} \cdot |x| e^{\frac{1}{x-1}} = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{x(x-1)^2} |x| e^{\frac{1}{x-1}},$$

unde

$$x_1 = \frac{1}{3}(3 - \sqrt{5}) \cong 0,5\,; \quad x_2 = \frac{1}{3}(3 + \sqrt{5}) \cong 2,5$$

Dacă punem $t = -\frac{1}{x-1}$, $x \in \mathbf{R} \setminus \{1\}$, atunci deducem:

$$\lim_{x \nearrow 1} f(x) = \lim_{t \to \infty} \left| 1 - \frac{1}{t} \right| e^{-t} = 0 \text{ și analog } \lim_{x \searrow 1} f(x) = +\infty.$$

Deoarece $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} f(x) = 1$, prima bisectoare este asimptotă la $+\infty$ (fig. 28)

Tablou de variație

x	$-\infty$		0		x_1		1		x_2		$+\infty$
f'	$-$	$-$	$-e^{-1}$	e^{-1}	$+0-$		$-$	0	$+$	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow f(x_1)$	$\searrow 0$	∞	$\searrow f(x_2)$		$\nearrow$		$+\infty$

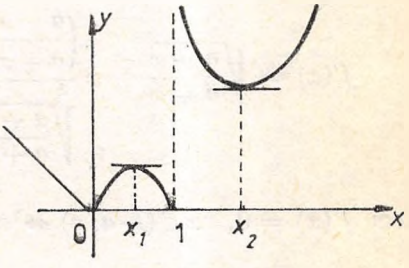


Fig. 28

Exemplul 9. *Fie* $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *o funcție definită astfel*:

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{(x-1)^2} + \lambda \quad (\lambda \text{ parametru real}).$$

Să se reprezinte grafic f *și să se determine* λ *a.î. dreapta* $y = 1$ *să fie asimptotă la graficul lui* f.

Deoarece $\lim_{|x| \to \infty} f(x) = 1$, rezultă că dreapta $y = 1$ este asimptotă la graficul lui $f \Leftrightarrow \lambda = 1$. Funcția f este continuă pe $\mathbf{R}$, indefinit derivabilă pe $\mathbf{R} \setminus \{0,1\}$ și avem:

$$f'(x) = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}} - \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}\right), \quad f''(x) = \frac{2}{9}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^4}} + \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^4}}\right) (\forall)\ x \in \mathbf{R} \setminus \{0,1\}.$$

Tablou de variaţie

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
f'	$-\ -\ -$	$-\infty$	∞	$+\ +$	$+\infty$	$-\infty$	$-\ -$		
f''	$-\ -\ -$		$-\ -\ 0$	$+\ +$			$+\ +$		
f	1	$\searrow$	1	$\nearrow$	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	1

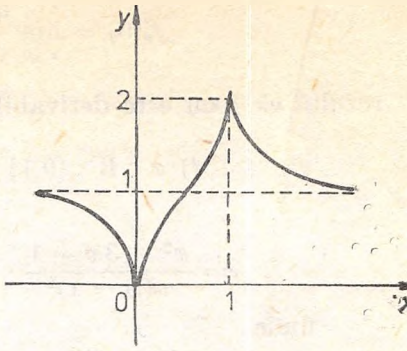


Fig. 2

Graficul lui f este reprezentat în fig. 29

Exemplul 10.

Să se reprezinte grafic funcţiile $f(x) = \pm\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$, $x \in (-a, a]$ *şi* $g(x) = \pm x\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$ $(a>0)$ (*strofoide*).

Să reprezentăm grafic $f(x) = +x\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$, $x \in (-a, a]$. Funcţia f este derivabilă pe $(-a, a)$ şi avem :

$$f'(x) = \sqrt{\frac{a-x}{a+x}} + x\,\frac{\left(\frac{a-x}{a+x}\right)'}{2\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}} = -\frac{x^2+ax-a^2}{\sqrt{(a-x)(a+x)^3}}, \quad (\forall)\ |x| < a,$$

deci $f'(x) = 0$, $x \in (-a, a) \Leftrightarrow x = \frac{-a+a\sqrt{5}}{2} \cong 0{,}6\ a$

Tablou de variaţie

x	$-a$		0		$0{,}6a$		a
f'	$+\ +$		1	$+\ +$	0	$-\ -$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$0{,}3\,a$	$\searrow$	0

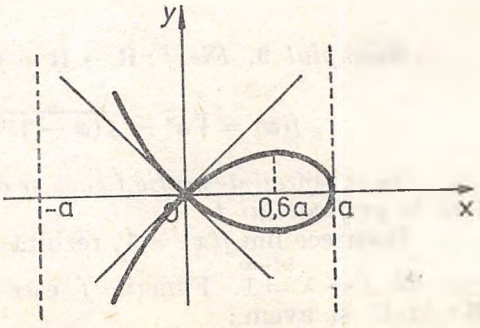


Fig. 30

Graficul lui f este reprezentat în fig. 30

Exemplul 11. *Să se reprezinte grafic funcţia* $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *definită astfel* $f(x) = e^{-x} \sin x$.

Evident f este derivabilă pe $\mathbf{R}$ şi avem :

$$f'(x) = e^{-x}(\cos x - \sin x), \quad (\forall)\ x \in \mathbf{R}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos x - \sin x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, \quad k \in \mathbf{Z}$$

şi deoarece funcţia $x \mapsto \cos x - \sin x$, $x \in \mathbf{R}$ îşi schimbă semnul trecînd prin 0, rezultă că f' îşi schimbă semnul trecînd prin 0, deci f are o infinitate de puncte de extrem de forma : $\frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

Cum $|f(x)| \leqslant e^{-x}$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$, rezultă $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$.

Evident $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x} \sin x = \lim\limits_{t \to \infty} (-e^t \sin t)$ şi $\lim\limits_{t \to \infty} e^t \sin t$ nu există.

$$f(x) = e^{-x} \Leftrightarrow \sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbf{Z},$$

deci f are comun cu funcţia $x \mapsto e^{-x}$, $x \in \mathbf{R}$, o infinitate de puncte de forma $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

$$f(x) = -e^{-x} \Leftrightarrow \sin x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbf{Z},$$

deci f are comun cu funcţia $x \mapsto -e^{-x}$, $x \in \mathbf{R}$, o infinitate de puncte de forma $\frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

Graficul lui f este reprezentat în fig. 31

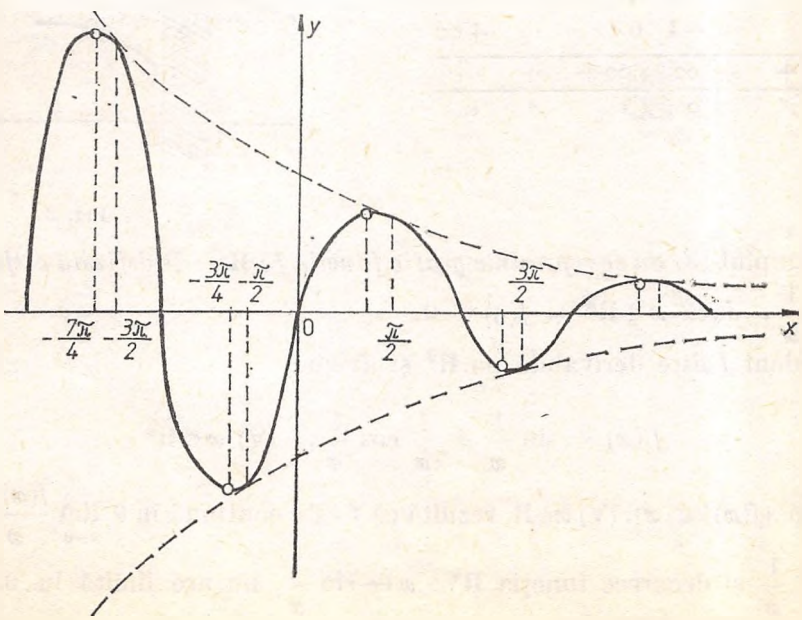


Fig. 31

Exemplul. 12. *Să se reprezinte grafic funcția elementară* $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$.

Evident $D_f = (-\infty, -1) \cup (0, \infty)$ și f este derivabilă de D_f. Avem $\ln f(x) = x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$, deci

$$f'(x) = f(x)\left[\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}\right], \quad (\forall)\, x \in D_f$$

Cum $f > 0$, rezultă că semnul lui f este același cu semnul funcției $\varphi(x) = n\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}$, $x \in D_f$. Deoarece $\lim\limits_{|x|\to\infty} \varphi(x) = 0$ și $\varphi'(x) = -\frac{1}{x(x+1)^2}$, $(\forall)\, x \in D_f$, obținem tabelul :

x	$-\infty$				-1	0			$+\infty$
φ'	$+$	$+$	$+$		‖		$-$	$-$	
φ	0	↗		∞	‖	∞	↘		0

Așadar, $\varphi > 0$, deci $f' > 0$ și deci f este strict crescătoare pe intervalele $(-\infty, -1)$ și $(0, \infty)$.

Cum $\lim\limits_{x\searrow 0} \ln f(x) = \lim\limits_{x\searrow 0} x\,[\ln(x+1) - \ln x] = 0$ și $\lim\limits_{x\nearrow -1} \ln f(x) = \infty$, avem $\lim\limits_{x\searrow 0} f(x) = 1$ și $\lim\limits_{x\nearrow -1} f(x) = \infty$ (fig. 32)

Tablou de variație

x	$-\infty$			-1	0		$+\infty$
f'	0	$+$	$+$	∞ ‖ ∞	$+$	$+$	|
f	e	↗		∞ ‖ 1	↗		e

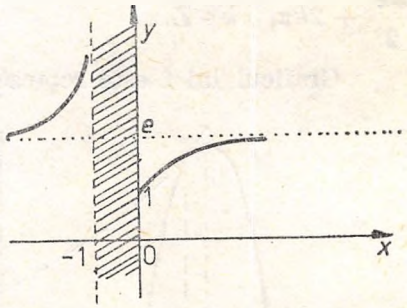


Fig. 3

Exemplul 13. *Să se reprezinte grafic funcția* $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *definită astfel* $f(x) = x \sin\frac{1}{x}$, *dacă* $x \in \mathbf{R}^*$ *și* $f(0) = 0$.

Evident f este derivabilă pe $\mathbf{R}^*$ și avem :

$$f'(x) = \sin\frac{1}{x} - \frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}, \quad (\forall)\, x \in \mathbf{R}^*$$

Cum $|f(x)| \leqslant |x|$, $(\forall)\, x \in \mathbf{R}$, rezultă că f este continuă în 0 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$ și deoarece funcția $\mathbf{R}^* \ni x \mapsto \sin\frac{1}{x}$, nu are limită în 0, rezultă că f nu este derivabilă în 0.

Funcția f fiind simetrică i.e. $f(x) = f(-x)$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$, este suficient să o studiem pe $\mathbf{R}_+^*$.

Să determinăm rădăcinile pozitive ale ecuației $f'(x) = 0$. Dacă $\cos \frac{1}{x} = 0$, avem $\sin \frac{1}{x} = \pm 1$, deci $f'(x) \neq 0$. Rămîne că $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg} \frac{1}{x} - \frac{1}{x} = 0$. Evident soluțiile ecuației $\operatorname{tg} t - t = 0$ sînt punctele de intersecție ale graficului funcției tangentă cu prima bisectoare (fig. 33).

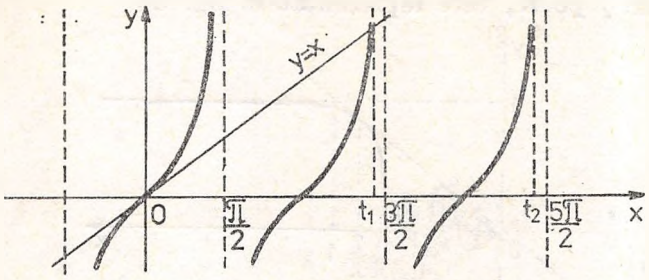


Fig. 33

Dacă $(t_k)_{k\geq 1}$ sînt toate rădăcinle pozitive, scrise în ordine crescătoare, ale ecuației $\operatorname{tg} t - t = 0$ și $x_k = \frac{1}{t_k}$, atunci $(x_k)_{k\geq 1}$ sînt toate rădăcinile pozitive, scrise în ordine descrescătoare ale ecuației $f'(x) = 0$.

Tabloul de variație pentru f și f'.

x	$0 \ldots x_4$	$\frac{2}{7\pi}$	x_3	$\frac{2}{5\pi}$	x_2	$\frac{2}{3\pi}$	x_1	$\frac{2}{\pi}$	∞
$\cos \frac{1}{x}$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$\operatorname{tg} \frac{1}{x} - \frac{1}{x}$	$+\ 0\ -$		$+\ 0\ -$		$+\ 0\ -$		$+\ 0\ -$		$+$
$f'(x)$	$+\ 0$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$0 \nearrow f(x_4)$	$\searrow$	$f(x_3)$	$\nearrow$	$f(x_2)$	$\searrow$	$f(x_1)$	$\nearrow$	1

Așadar $x_1, x_3, \ldots, x_{2k-1}, \ldots$ sînt puncte de minim, în timp ce $x_2, x_4, \ldots$ $\ldots\ x_{2k}, \ldots$ sînt puncte de maxim pentru f.

Dacă $x > 0$ avem :

$$f(x) = x \Leftrightarrow \sin \frac{1}{x} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad (\forall)\ k \in \mathbf{N}_0$$

$$f(x) = -x \Leftrightarrow \sin \frac{1}{x} = -1 \Leftrightarrow \frac{1}{x} = \frac{3x}{2} + 2k\pi, (\forall)\ k \in \mathbf{N}_0$$

Prin urmare graficul lui f pe $(0, \infty)$ are comun cu prima bisectoare (resp. a doua bisectoare) o infinitate de puncte de forma $x = \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)^{-1}$, $k \in \mathbf{N}_0$ $\left(\text{resp. } x = \left(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right)^{-1}, \quad k \in \mathbf{N}_0\right)$.

Deoarece $\lim\limits_{x \to \infty} x \sin \frac{1}{x} = 1$, rezultă că dreapta $y = 1$ este asimptotă la $+\infty$.

Graficul lui f pe $\mathbf{R}_+$ este reprezentat în fig. 34

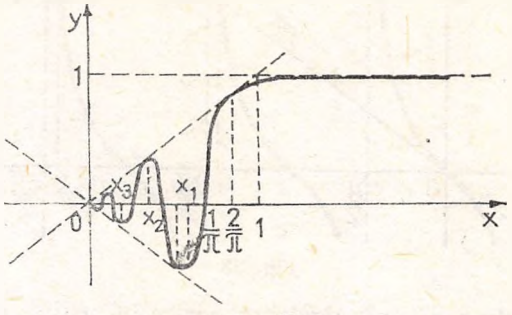


Fig. 34

7.3. Inegalităţi remarcabile. Complemente

7.3.1. Propoziţie. *Pentru orice* $-1 < x \neq 0$, *avem inegalitatea*:

$$(1 + x)^\alpha < (\text{resp.} >)\ 1 + \alpha x, \text{ dacă } \alpha \in (0, 1) \ (\text{resp. } \alpha \notin [0, 1]).$$

Inegalităţile devin egalităţi, dacă $x = 0$ *sau* $\alpha = 1$.

Dem. Fie $I := (-1, \infty)$ şi $f : I \to \mathbf{R}$ o funcţie definită astfel $f(x) = (1 + x)^\alpha - 1 - \alpha x$, unde $\alpha \in \mathbf{R} \setminus \{0, 1\}$ este fixat. Atunci (P. 6.1.3. (6°)) f este derivabilă şi avem:

$$f'(x) = \alpha (1 + x)^{\alpha - 1} - \alpha, \ (\forall)\ x \in I,$$

deci $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

1° Dacă $0 < \alpha < 1$, avem $f'(x) < 0$, $(\forall)\ x \in (0, \infty)$ şi $f'(x) > 0$, $(\forall)\ x \in (-1, 0)$, deci (T 6.3.4. Cor. 4), 0 este punct de maxim global (strict) pentru f. Aşadar $f(x) < f(0)$, $(\forall)\ x \in I \setminus \{0\} \Leftrightarrow (1 + x)^\alpha < 1 + \alpha x$, $(\forall)\ x \in I \setminus \{0\}$

2° Dacă $\alpha \notin [0, 1]$, avem $f'(x) > 0$, $(\forall)\ x \in (0, \infty)$ şi $f'(x) < 0$, $(\forall)\ x \in (-1, 0)$, deci 0 este punct de minim global (strict) pentru f. Aşadar $f(x) > f(0)$, $(\forall)\ x \in I \setminus \{0\} \Leftrightarrow (1 + x)^\alpha > 1 + \alpha x$, $(\forall) x \in I \setminus \{0\}$.

Corolar 1. *Pentru orice* $0 < x \neq 1$, *avem inegalitatea*

$$x^\alpha - \alpha x + \alpha - 1 < 0 \ (\text{resp.} > 0), \text{ dacă } \alpha \in (0, 1) \ (\text{resp. } \alpha \notin [0, 1]).$$

Inegalităţile devin egalităţi, dacă $x = 1$ *sau* $\alpha = 1$

Corolar 2 (Inegalitatea lui Young). *Fie* $a, b \in \mathbf{R}_+^*$ *două numere. Atunci avem inegalitatea*:

$$ab \leqslant (\text{resp. } \geqslant) \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}, \text{ dacă } p > 1 \ (\text{resp. } 0 \neq p < 1) \text{ şi } q = \frac{p}{p - 1}.$$

Dem. Să punem $\alpha := \frac{1}{p}$ și $w = \frac{a^p}{b^q}$.

1° Dacă $p > 1$, avem $0 < \alpha = \frac{1}{p} < 1$, deci (P. 7.3.1. Cor. 1)

$\frac{(a^p)^{1/p}}{(b^q)^{1/q}} - \frac{1}{p} w + \frac{1}{p} - 1 < 0$ și deci amplificînd cu b^q obținem $ab^{q-\frac{q}{p}} < \frac{1}{p} a^p + \left(1 - \frac{1}{p}\right) b^q$. Deoarece $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, rezultă $1 - \frac{1}{p} = \frac{1}{q}$ și $q - \frac{q}{p} = 1$, prin urmare $ab < \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q$.

2° Dacă $0 \neq p < 1$, atunci $\alpha \notin [0, 1]$ și deci (P. 7.3.1. Cor. 1) obținem inegalitatea contrarie.

7.3.2. Propoziție (Inegalitatea lui Hölder). *Fie* a_i, $b_i \in \mathbf{R}$, $1 \leqslant i \leqslant n$; $0 < p \neq 1$ *și* $q = \frac{P}{p-1}$. *Atunci avem*:

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i b_i| \leqslant (resp. \geqslant) \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|_p\right)^{1/p} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} |b_i| q\right)^{1/q},$$

dacă $1 < p < +\infty$ (*resp.* $0 < p < 1$).

Dem. 1) Fie $1 < p < \infty$. Cazul cînd $\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p = 0$ sau $\sum_{i=1}^{n} |b_i|^q = 0$ fiind evident, presupunem contrariul. Atunci din P. 7.3.1. Cor. 2 pentru

$$a = \frac{|a_j|}{\left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p\right)^{1/p}} \text{ și } b = \frac{|b_j|}{\left(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^q\right)^{1/q}} \text{ obținem:}$$

$$\frac{|a_j b_j|}{\left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^q\right)^{1/q}} \leqslant \frac{|a_j|^p}{p \sum_{i=1}^{n} |a_i|^p} + \frac{|b_j|^q}{q \sum_{i=1}^{n} |b_i|^q},$$

de unde sumînd după j, $j = \overline{1, n}$, avem:

$$\frac{\sum_{j=1}^{n} |a_j| \cdot |b_j|}{\left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^q\right)^{1/q}} \leqslant \frac{\sum_{i=1}^{n} |a_j|^p}{p \sum_{i=1}^{n} |a_i|^p} + \frac{\sum_{j=1}^{n} |b_j|^q}{q \sum_{i=1}^{n} |b_i|^q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Prin înmulțire cu numitorul, dăm peste inegalitatea căutată.

2) Raționăm analog cînd $0 < p < 1$|

Corolar 1 (Inegalitatea lui Cauchy).

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i b_i| \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)^{1/2}, \ (\forall)\ a_i, b_i \in \mathbf{R}.$$

Dem. In inegalitatea lui Hölder punem $p = q = 2$.

Corolar 2

$$(|x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n|)\left(\frac{1}{|x_1|} + \frac{1}{|x_2|} + \ldots + \frac{1}{|x_n|}\right) \geqslant n^2, \ (\forall)\, x_i \in \mathbf{R}^*$$

Dem. Se aplică P. 7.3.2. sau P. 2.1.31.

Corolar 3

Fie $a_i, b_i \in \mathbf{R}$, $1 \leqslant i \leqslant n$; $p > 1$ *şi* $q = \dfrac{p}{p-1}$. *Atunci avem*:

$$-\left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p\right)^{1/p} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^q\right)^{1/q} \leqslant \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p\right)^{1/p} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^q\right)^{1/q}$$

7.3.3. Propoziţie (Inegalitatea lui Minkowski). *Fie* $a_i, b_i \in \mathbf{R}$, $1 \leqslant i \leqslant n$ *şi* $p > 0$. *Atunci avem*:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |a_i + b_i|^p\right)^{1/p} \leqslant (\text{resp } \geqslant) \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^p\right)^{1/p}$$

dacă $1 \leqslant p \leqslant \infty$ (*resp.* $0 < p < 1$ *şi* $a_i, b_i > 0$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$).

Dem. 1) Fie $1 \leqslant p < \infty$. Cazul cînd $p = 1$ sau $\sum_{i=1}^{n} |a_i + b_i|^p = 0$ fiind evident, să presupunem $p > 1$ şi $\sum_{i=1}^{n} |a_i + b_i|^p \neq 0$. Evident avem:

$$|a_i + b_i|^p \leqslant |a_i| \cdot |a_i + b_i|^{p-1} + |b_i| \cdot |a_i + b_i|^{p-1} \tag{1}$$

Sumînd după i şi folosind P. 7.3.2. pentru $q = \dfrac{p}{p-1}$, obţinem succesiv

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i + b_i|^p \leqslant \sum_{i=1}^{n} |a_i|\, |a_i + b_i|^{p-1} + \sum_{i=1}^{n} |b_i| \cdot |a_i + b_i|^{p-1} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p\right)^{1/p} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i + b_i|^{(p-1)q}\right)^{1/q} + \left(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^p\right)^{1/p} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i + b_i|^{(p-1)q}\right)^{1/q}$$

Dacă simplificăm prin $\left(\sum_{i=1}^{n} |a_i + b_i|^{(p-1)q}\right)^{1/q}$ şi ţinem seama că $(p-1)q = p$, rezultă:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |a_i + b_i|^p\right)^{1-\frac{1}{q}} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p\right)^{1/p} + \sum_{i=1}^{n} |b_i|^q\Big)^{1/q}$$

Înlocuind $1 - \dfrac{1}{q}$ prin $\dfrac{1}{p}$, obţinem inegalitatea căutată.

2) Fie $0 < p < 1$. Deoarece $a_i > 0$, $b_i > 0$, $(\forall)\ i = \overline{1, n}$, inegalitatea (1) devine egalitate şi raţionamentul continuă ca mai sus.

7.3.4. Propoziție. *Fie* $a_i \in \mathbf{R}$, $1 \leqslant i \leqslant n$ *și* $p > 0$. *Atunci avem :*

1° $\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i| \right)^p \leqslant n^{p-1} \sum_{i=1}^{n} |a_i|^p$, *dacă* $1 \leqslant p < \infty$;

2° $\left(\sum_{i=1}^{n} |a_i| \right)^p \leqslant \sum_{i=1}^{n} |a_i|^p \leqslant n^{1-p} \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i| \right)^p$, *dacă* $0 < p < 1$.

Soluție. 1° Cazul $p = 1$ fiind evident, presupunem $p > 1$.

Dacă punem în P. 7.3.2. $b_i = 1$, $1 \leqslant i \leqslant n$ și $q := \dfrac{p}{p-1}$, avem :

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i| = \sum_{i=1}^{n} |a_i b_i| \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p \right)^{1/p} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^q \right)^{1/q} = \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p \right)^{1/p} \cdot n^{1/q}$$

Ridicăm la puterea p și înlocuim p/q prin $p-1$; obținem :

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |a_i| \right)^p \leqslant n^{p-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} |a_i|^p$$

Pe de altă parte (P. 7.3.1.) $(1 + x)^p \geqslant 1 + px$, $(\forall)\ x > -1$, deci $(1 + x)^p \geqslant 1 + x^p$, $(\forall)\ x \in [0, 1]$. Dacă presupunem $|a_1| \leqslant |a_2| \neq 0$, atunci :

$$\left(1 + \frac{|a_1|}{|a_2|} \right)^p \geqslant 1 + \left(\frac{|a_1|}{|a_2|} \right)^p,$$

deci

$$(|a_1| + |a_2|)^p \geqslant |a_1|^p + |a_2|^p \tag{1}$$

Prin inducție din (1) deducem că $(\forall)\ n \in \mathbf{N}$ și $a_i \in \mathbf{R}$, avem :

$$(|a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n|)^p \geqslant |a_1|^p + |a_2|^p \ldots + |a_n|^p$$

2° Dacă $0 < p < 1$, atunci $\alpha = \dfrac{1}{p} > 1$, deci cf. 1° avem :

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i|^\alpha \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i| \right)^\alpha \leqslant n^{\alpha-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} |a_i|^\alpha$$

Înlocuind a_i cu $|a_i|^{1/\alpha}$, rezultă

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i| \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^{1/\alpha} \right)^\alpha \leqslant n^{\alpha-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} |a_i|$$

Ridicăm la puterea $1/\alpha$ și înlocuim $1/\alpha$ cu p, obținem :

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |a_i| \right)^p \leqslant \sum_{i=1}^{n} |a_i|^p \leqslant n^{1-p} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i| \right)^p$$

Corolar 1. *Fie* $a_i \in \mathbf{R}$, $1 \leqslant i \leqslant n$ *a.î.* $\sum_{i=1}^{n} |a_i| = 1$. *Atunci avem :*

1° $\dfrac{1}{n^{p-1}} \leqslant \sum_{i=1}^{n} |a_i|^p \leqslant 1$, *dacă* $1 \leqslant p < \infty$;

2° $1 \leqslant \sum_{i=1}^{n} |a_i|^p \leqslant n^{1-p}$, *dacă* $0 < p < 1$.

7.3.5. Propoziție.. *Fie* $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbf{R}_+^*$ *și* $f : \mathbf{R}^* \to \mathbf{R}$ *o funcție definită astfel* $f(x) = (a_1^x + a_2^x + \ldots + a_n^x)^{1/x}$. *Atunci* f *are proprietățile :*

1° f *este strict descrescătoare pe* $\mathbf{R}_-^*$ *și* $\mathbf{R}_+^*$;

2° $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \max\limits_{i=\overline{1,n}} a_i$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \min\limits_{i=\overline{1,n}} a_i$;

3° $f(0-) = 0$, $f(0+) = +\infty$.

Dem. 1° Evident (P. 6.1.3. (3°)) f este derivabilă pe $\mathbf{R}^*$. Deoarece $\ln (fx) = \frac{1}{x} \ln (a_1^x + \ldots + a_n^x)$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}^*$, rezultă

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = -\frac{1}{x^2} \ln (a_1^x + \ldots + a_n^x) + \frac{1}{x} \frac{a_1^x \ln a_1 + \ldots + a_n^x \ln a_n}{a_1^x + \ldots + a_n^x} =$$

$$= -\frac{1}{x} \ln f(x) + \frac{1}{x} (f(x))^{-x} (a_1^x \ln a_1 + \ldots + a_n^x \ln a_n) =$$

$$= \frac{1}{x} (f(x))^{-x} \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^x \ln a_i + (f(x))^x \ln f(x) \right) =$$

$$= \frac{1}{x} (f(x))^{-x} \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^x \ln a_i + \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^x \right) \ln f(x) \right) =$$

$$= \frac{1}{x} (f(x))^{-x} \sum_{i=1}^{n} a_i^x \ln \frac{a_i}{f(x)} = (f(x))^{-x} \sum_{i=1}^{n} a_i^x \ln \left(\frac{a_i}{f(x)} \right)^n$$

Cum evident $f(x) > 0$ și $0 < \left(\frac{a_i}{f(x)} \right)^x = \frac{a_i^x}{a_1^x + \ldots + a_n^x} < 1$, avem $\ln \left(\frac{a_i}{f(x)} \right)^x < 0$, deci $f'(x) < 0$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}^*$ și deci f este strict descrescătoare pe $\mathbf{R}_-^*$ și $\mathbf{R}_+^*$.

2° Punem $M := \max\limits_{i=\overline{1,n}} a_i$, deci $(\exists)\ i_0 \in \overline{1, n}$ cu $M = a_{i_0}$. Fixăm $1 \leqslant x < +\infty$ și $i = \overline{1, n}$; atunci $0 < \frac{a_i}{M} \leqslant 1$, deci $\left(\frac{a_i}{M} \right)^x \leqslant \frac{a_i}{M} \leqslant 1$ și deci

$$1 = \left(\frac{a_{i_0}}{M} \right)^x \leqslant \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{a_i}{M} \right)^x \leqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{M}$$

Așadar avem :

$$M \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^x \right)^{1/x} \leqslant M \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{M} \right)^{1/x}, \quad (\forall)\ x \geqslant 1,$$

de unde prin trecere la limită, $x \to \infty$ deducem : $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^x \right)^{1/x} = M$ etc.

Deoarece avem $f(-x) = \left(\left(\sum \left(\frac{1}{a_i} \right)^x \right)^{\frac{1}{x}} \right)^{-1}$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}^*$ rezultă

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(-x) = \left(\max_{i=\overline{1,n}} \left(\frac{1}{a_i} \right) \right)^{-1} = \min_{i=\overline{1,n}} a_i$$

3° Evident avem :

$$\lim_{x\searrow 0}\frac{1}{x}\ln(a_1^x+\ldots a_n^x)=+\infty,\ \lim_{x\nearrow 0}\frac{1}{x}\ln(a_1^x+\ldots+a_n^x)=-\infty,$$

deci

$$\lim_{x\searrow 0}f(x)=\lim_{x\searrow 0}e^{\frac{1}{x}\ln(a_1^x+\ldots+a_n^x)}=-\infty,\ \lim_{x\nearrow 0}f(x)=0$$

Corolar 1. *Fie* $a_1, a_2, \ldots a_n \in \mathbf{R}$ *şi* $0<p<p'<+\infty$. *Atunci avem :*

$$\left(\sum_{i=1}^{n}|a_i|^p\right)^{1/p}\geqslant\left(\sum_{i=1}^{n}|a_i|^{p'}\right)^{1/p'}$$

Dem. Dăm la o parte termenii nenuli şi aplicăm P.7.3.5.

7.3.6. Propoziţie. *Fie* $I\subseteq\mathbf{R}$ *un interval şi* $f: I\to\mathbf{R}$ *o funcţie continuă pe* I *şi derivabilă pe* $I\setminus A$ *cu* A *finită a.î.* $|f'(x)|\leqslant\lambda<\infty$, $(\forall)\ x\in I\setminus A$. *Atunci* f *este* λ*-lipschitziană.*

Dem. Fie $x, y\in I$, $x<y$ fixaţi. Să notăm cu $x_1, x_2, \ldots, x_n$ mulţimea tuturor punctelor din A care sînt cuprinse între x şi y, scrise în ordine crescătoare. Evident avem :

$$|f(x)-f(y)|\leqslant|f(x)-f(x_1)|+|f(x_1)-f(x_2)|+\ldots+|f(x_n)-f(y)|=$$

$$=(x_1-x)\cdot|f'(\xi)|+(x_2-x_1)|f'(\xi)|+\ldots+(y-x_n)|f'(\xi_n)|\leqslant$$

$$\leqslant\lambda[(x_1-x)+(x_2-x_1)+\ldots+(x_n-x_{n-1})(+y-x_n)]=\lambda(y-x).$$

Aşadar $|f(x)-f(y)|\leqslant\lambda|x-y|$, deci f este λ-lipschitziană.

Corolar 1. *Fie* $I\subseteq\mathbf{R}$ *un interval mărginit şi* $f: I\to\mathbf{R}$ *o funcţie derivabilă cu derivata mărginită. Atunci* f *este mărginită.*

Dem. Din P. 7.3.6. rezultă f liptschtizană, deci I fiind mărginit, deducem că f este mărginită.

Corolar 2. *Fie* $a, b\in\mathbf{R}$, $a<b$ *şi* $f: (a, b)\to\mathbf{R}$ *o funcţie derivabilă. Dacă* $\lim_{x\searrow a}f(x)=\infty$ (*resp.* $\lim_{x\nearrow b}f(x)=\infty$), *atunci* $\lim_{x\searrow a}f'(x)$ (*resp.* $\lim_{x\nearrow b}f'(x)$) *nu există sau există şi este infinită.*

Dem. Dacă $\lim_{x\searrow a}f(x)=\infty$, atunci f nu este mărginită, deci cf Cor. 1. nici f' nu este mărginită.

Corolar 3. *Fie* $I\subseteq\mathbf{R}$ *un interval şi* $f: I\to\mathbf{R}$ *o funcţie derivabilă cu derivata mărginită. Atunci* $(\forall)\ \varepsilon\in\mathbf{R}$, *ou* $|\varepsilon|$ *suficient de mic, funcţia* $g(x)=x+\varepsilon f(x)$, $x\in I$ *este contracţie.*

Dem. f' fiind mărginită, există $\alpha>0$ a.î. $|f'(x)|\leqslant\alpha$, $(\forall)\ x\in I$, de unde deducem :

$$|\varepsilon f(x_1)-\varepsilon(fx_2)|\leqslant|\varepsilon|\alpha|x_1-x_2|,\ (\forall)\ x_1, x_2\in I$$

Dacă $|\varepsilon|\alpha<1\Leftrightarrow 0<|\varepsilon|<\frac{1}{\alpha}$, atunci εf este λ-lipschitziană cu $0<\lambda<1$, deci g este o contracţie.

7.3.7. Propoziţie. *Fie* $f: [a, b]\to\mathbf{R}$ *o funcţie şi* $g=|f|$. *Dacă* f *este derivabilă la dreapta în* $x_0\in[a,b]$ *atunci* g *este derivabilă la dreapta în* x_0 *şi* $|g'_+(x_0)|\leqslant$
$\leqslant$

Dem. (i) $f(x_0) > 0$. Deoarece f este derivabilă la dreapta în x_0, rezultă că f este continuă la dreapta în x_0, deci există $0 < \eta < b - x_0$ a.î. $f(x) > 0$, $(\forall)$ $x \in V^+ = (x_0, x_0 + \eta)$ și deci $f|_{V^+} = g|_{V^+}$ Cum f este derivabilă la dreapta în x_0, rezultă că $f|_{V^+}$, deci $g|_{V^+}$ și deci g este derivabilă la dreapta în x_0.

(ii) $f(x_0) < 0$. Raționament analog.

(iii) $f(x_0) = 0$. Deoarece f este derivabilă la dreapta în x_0, rezultă că $\lim\limits_{x \searrow x_0} \frac{f(x)}{x - x_0}$ există și este finită, deci $\lim\limits_{x \searrow x_0} \frac{|f(x)|}{x - x_0}$ există și este finită și deci g este derivabilă la dreapta în x_0.

Prin urmare din condiția $f'_d(x_0)$ există și este finită rezultă $g'_d(x_0)$ există și este finită. Din inegalitatea evidentă

$$\left| \frac{g(x) - g(x)_0}{x - x_0} \right| \leqslant \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right|, \quad (\forall) x \in (x_0, b),$$

prin trecerea la limită cu x către x_0, obținem : $|g'_d(x_0)| \leqslant |f'_d(x_0)|$

Corolar 1. *Fie $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ $(a, b \in \mathbf{R})$ o funcție derivabilă pe (a, b) și $g = |f|$. Atunci g admite derivate laterale în fiecare punct $x \in (a, b)$ și avem relația :*

$$|g'_s(x)| \leqslant |f'(x)| \text{ și } |g'_d(x)| \leqslant f'(x)|$$

7.3.8. Propoziție (Reciproca teoremei lui Rolle). *Fie $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ o funcție derivabilă și strict convexă (resp. strict concavă). Atunci* $(\forall) c \in (a, b)$ cu $f'(c) = 0$, $(\exists)$ $x_1, x_2 \in [a, b]$, $x_1 < c < x_2$, *a.î.* $f(x_1) = f(x_2)$.

Dem. Funcția f fiind strict convexă, rezultă (P. 7.1.5.) că f' este strict crescătoare, deci $f'(x) < f'(c) = 0$, dacă $x \in [a, c)$ și $0 = f'(c) < f'(x)$, dacă $x \in (c, b]$, de unde deducem (T. 6.3.4. Cor. 4) că c este minim absolut (strict pentru f, i.e. $f(c) < f(x)$, $(\forall)$ $x \in I \setminus \{c\}$, unde $I := [a, b]$.

1° Dacă $f(a) < f(b)$, considerăm funcția $g := f - f(a)$. Evident avem :

$$g(c) \cdot g(b) = (f(c) - f(a))\,(g(b) - g(a)) < 0 \tag{1}$$

Funcția g fiind evident continuă, are proprietatea Darboux (T. 5.5.16. Cor. 1), deci din (1) rezultă că $(\exists)$ $x_2 \in (c, b)$ a.î. $g(x_2) = 0$, i.e. $f(x_2) - f(a) = 0$. Punem $x_1 = a$ și obținem $x_1 < c < x_2$ și $f(x_1) = f(x_2)$.

2° Dacă $f(a) > f(b)$, considerăm funcția $g := f - f(b)$ și deducem că $(\exists)$ $x_1 \in (a, c)$ cu $f(x_1) = f(b)$ etc.

Corolar 1. *Fie $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ o funcție de două ori derivabilă a.î. $f''(x) \neq 0$, $(\forall)$ $x \in [a, b]$. Atunci $(\forall)$ $c \in (a, b)$ cu $f'(c) = 0$, $(\exists) x_1, x_2 \in [a, b]$, $x_1 < c < x_2$, a.î. $f(x_1) = f(x_2)$.*

Dem. Din T. 6.3.7. Cor. 2 rezultă că $f'' > 0$ sau $f'' < 0$ deci (P. 7.1.6. (2°)) f este strict convexă sau strict concavă. Aplicăm mai departe P. 7.3.8.

Corolar 2. *Fie $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ o funcție derivabilă și strict convexă (resp. strict concavă). Atunci $(\forall)$ $c \in (a, b)$, $(\exists)$ $x_1, x_2 \in [a, b]$, $x_1 < c < x_2$ a.î. $f(x_1) - f(x_2) = (x_1 - x_2) f'(c)$.*

Dem. Se reia demonstrația dată P. 7.3.8. observînd că peste tot inegalitățile sînt stricte.

Observație. Dacă în P. 7.3.8 (resp. P. 7.3.8. Cor. 2) funcția f este convexă, atunci concluzia poate fi falsă.

Contraexemplu Fie $f : [-1, 1] \to \mathbf{R}$ o funcție definită astfel $f(x) = 0$, dacă $x \in [-1, 0)$ și $f(x) = x^2$, dacă $x \in [0, 1)$. Atunci f este convexă, $f'(0) = 0$ și $f(x_1) \neq f(x_2)$, $(\forall)\ -1 \leqslant x_1 < 0 < x_2 \leqslant 1$.

7.3.9. Propoziție (Reciproca teoremei lui Lagrange). *Fie $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ o funcție derivabilă și convexă (resp. concavă). Atunci* $(\forall)\ c \in (a, b)$, $(\exists)\ x_1, x_2 \in [a, b]$, $x_1 \neq x_2$ *a.î.* $f(x_1) - f(x_2) = (x_1 - x_2) f'(c)$.

Dem. Fie $c \in I := [a, b]$ fixat și să considerăm funcția

$$g(x) := f(x) - ((f(c) + (x - c)f'(c))),\ x \in I \tag{1}$$

Funcția f fiind convexă, avem (P. 7.1.5. (3°)) :

$$f(x) \geqslant f(c) + (x - c) f'(c),\ (\forall)\ x \in I \tag{2}$$

Din (1) și (2) rezultă $g(x) \geqslant 0$, $(\forall)\ x \in I$. Să arătăm că $(\exists)\ x_1, x_2 \in I$, $x_1 \neq x_2$, cu $g(x_1) = g(x_2)$.

1° $g(a) = g(b)$. Luăm $x_1 = a$ și $x_2 = b$.

2° $g(a) < g(b)$. Atunci avem $g(c) = 0 \leqslant g(a) < g(b)$.

Funcția g fiind evident continuă, are proprietatea Darboux (T. 5.5.16. Cor. 1), deci $(\exists)\ x_2 \in [c, b]$ cu $g(x_2) = g(a)$. Punem $x_1 = a$ și obținem $g(x_1) = g(x_2)$, iar $x_1, x_2 \in [a, b]$ sînt diferite între ele.

3° Dacă $g(a) > g(b)$ se raționează ca în cazul 2°.

Așadar $(\exists)\ x_1, x_2 \in [a, b]$, $x_1 \neq x_2$, cu $g(x_1) = g(x_2)$. Atunci din (1) rezultă

$$f(x_1) - (f(c) + (x_1 - c)f'(c)) = f(x_2) - (f(c) + (x_2 - c)f'(c)),$$

prin urmare

$$f(x_1) - f(x_2) = (x_1 - c)f'(c) - (x_2 - c)f'(c) = (x_1 - x_2)f'(c)$$

Corolar 1. *Fie $I \subseteq \mathbf{R}$ un interval și $f : I \to \mathbf{R}$ o funcție de două ori derivabilă cu $f'' \geqslant 0$ (resp. $f'' \leqslant 0$). Atunci* $(\forall)\ c \in \mathring{I}$, $(\exists)\ x_1, x_2 \in I$, $x_1 \neq x_2$ *a.î.* $f(x_1) - f(x_2) = (x_1 - x_2) f'(c)$.

Dem. Dacă $f'' \geqslant 0$, avem (P. 7.1.6.(1°)) f convexă. Aplicăm P. 7.3.9.

7.3.10. Propoziție (Teorema lui Rolle generalizată). *Fie $I \subseteq \overline{\mathbf{R}}$ un interval de capete a, $b \in \overline{\mathbf{R}}$ și $f : I \to \mathbf{R}$ o funcție derivabilă pe $\mathring{I}$, cu proprietatea că $f(a+)$ și $f(b-)$ există, finite sau nu. Dacă* $(\exists)\ x_0 \in (a, b)$ cu $f(x_0) \leqslant \min\{f(a+), f(b-)\}$ *(resp.* $f(x_0) \geqslant \max\{f(a+), f(b-)\}$*), atunci* $(\exists)\ c \in (a, b)$ *a.î.* $f'(c) = 0$.

Dem. Presupunem, spre exemplu, că $f(a+) \leqslant f(b-)$ și fie $x_0 \in (a, b)$ cu $f(x_0) \leqslant f(a+)$. Distingem două cazuri

1° $f(x) \leqslant f(a+)$, $(\forall)\ x \in (a, b)$. Atunci $f(x_0) \leqslant f(x)$, $(\forall)\ x \in (a, b)$, deci x_0 este punct de minim global și deci (T. 6.3.1.) $f'(x_0) = 0$.

2° $(\exists)\ y \in (a, b)$ cu $f(y) < f(a+)$. În acest caz punem $m := \inf f((a,b))$, deci $(\exists)\ (x_n)_{n \geqslant 1} \subseteq (a, b)$ cu $f(x_n) \to m$. Șirul $(x_n)_{n \geqslant 1}$ posedă un subșir $(x_{n_k})_{k \geqslant 1}$ care are limită un punct $c \in [a, b]$ (T. 2.3.21. Cor. 4 ; P. 5.1.14. (1°)). Funcția f fiind continuă, avem :

$$f(c) = \lim_{k \to \infty} f(x_{n_k}) = m \leqslant f(y) < f(a+) \leqslant f(b-),$$

deci $c \neq a$ și $c \neq b$, încît $c \in (a, b)$. Cum avem

$$f(c) = m \leqslant f(x),\ (\forall)\ x \in (a, b),$$

rezultă că c este punct de minim global, deci (T. 6.3.1.) $f'(c) = 0$.

Corolar 1. *Fie* $I \subseteq \mathbf{R}$ *un interval de capete* $a, b \in \bar{\mathbf{R}}$ *şi* $f : I \to \mathbf{R}$ *o funcţie derivabilă pe* $\mathring{I}$ *cu proprietatea că* $f(a+)$ *şi* $f(b-)$ *există şi sînt egale. Atunci* $(\exists)$ $c \in (a, b)$ *cu* $f'(c) = 0$.

Dem. Evident $(\forall)$ $x \in (a, b)$, avem $f(x) \leqslant \min \{f(a+), f(b-)\}$ sau $f(x) \geqslant \max \{f(a+), f(b-)\}$. Aplicăm mai departe P. 7.3.10.

Corolar 2. *Fie* $I \subseteq \mathbf{R}$ *un interval de capete* $a, b \in \bar{\mathbf{R}}$ *şi* $f : I \to \mathbf{R}$ *o funcţie derivabilă pe* $\mathring{I}$, *cu proprietatea că* $f(a+)$ *şi* $f(b-)$ *există, finite sau nu. Dacă* $f(a+)$ *sau* $f(b-)$ *este punct interior intervalului* $f(I)$, *atunci* $(\exists)$ $c \in (a, b)$ *a.î.* $f'(c) = 0$.

Dem. Fie $J := f(I)$ şi să presupunem că $f(a+) \in \mathring{J}$, deci $(\exists)$ $\varepsilon > 0$ cu $[f(a+) - \varepsilon, f(a+) + \varepsilon] \subseteq J$ Dacă $f(b-) \leqslant f(a+)$, fie $x_0 \in (a, b)$ cu $f(x_0) \in (f(a+), f(a+) + \varepsilon)$. Atunci $f(x_0) > \max \{f(a+), f(b-)\}$ etc.

7.3.11. Teoremă (Teorema Cauchy-Taylor generalizată). *Fie* $I \subseteq \mathbf{R}$ *un interval şi* $f, g : I \to \mathbf{R}$ *două funcţii de* $(n+1)$ *ori derivabile a.î.* $g^{(n+1)}(x) \neq 0$, $(\forall)$ $x \in I$. *Atunci* $(\forall)$ $a, x \in I$, *există* c *cuprins între* a *şi* x a.î.

$$\frac{f(x) - \left(f(a) + \dfrac{x-a}{1!} f'(a) + \ldots + \dfrac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a)\right)}{g(x) - \left(g(a) + \dfrac{x-a}{1!} g'(a) + \ldots + \dfrac{(x-a)^n}{n!} g^{(n)}(a)\right)} = \frac{f^{(n+1)}(c)}{g^{(n+1)}(c)}$$

Dem. Fie $a, x \in I$, spre exemplu $a > x$, fixaţi. Să arătăm în prealabil că $g(a) \neq \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} g^{(k)}(a)$ (1). Presupunem contrariul, deci că în (1) avem egalitate. Din T. 6.5.3. rezultă că există x_0 cuprins între a şi x a.î.

$$g(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} g^{(k)}(a) + \frac{1}{(n+1)!} g^{(n+1)}(x_0) \tag{2}$$

Din presupunerea făcută şi din (2), deducem că $g^{(n+1)}(x_0) = 0$, absurd.

Rămîne că (1) este adevărat.

Considerăm mai departe o funcţie $\varphi : I \to \mathbf{R}$ definită astfel:

$$\varphi(t) = \left(f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-t)^k}{k!} f^k(t)\right) - \lambda \left(g(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-t)^k}{k!} g^{(k)}(t)\right), \tag{3}$$

unde λ este un număr real unic determinat prin condiţia ca $\varphi(a) = 0$, lucru posibil datorită lui (1). Evident φ este derivabilă şi $\varphi(x) = 0$, deci (T. 6.3.2.) $(\exists)$ $c \in (x, a)$ cu $\varphi'(c) = 0$. Din (3), prin derivare, se obţine imediat relaţia:

$$\varphi'(t) = -\frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) + \lambda \frac{(x-t)^n}{n!} g^{(n+1)}(t), \quad t \in I,$$

deci

$$\frac{(x-c)^n}{n!} [-f^{(n+1)}(c) + \lambda g^{(n+1)}(c)] = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{f^{(n+1)}(c)}{g^{(n+1)}(c)}$$

Din condiția $\varphi(a) = 0$, rezultă pentru λ expresia

$$\lambda = \left(f(a) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)\right)\left(g(a) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} g^{(k)}(a)\right)^{-1},$$

Egalînd cele două expresii ale lui λ, deducem relația din enunț.

Observație. T. 7.3.11. a fost demonstrată utilizînd formula lui Taylor (T.6.5.3), deci nu putem obține formula lui Taylor din T 7.3.11.

7.3.12. Propoziție. *Fie $f, g : [a, b] \to \mathbf{R}$ două funcții continue pe $[a, b]$, derivabile pe (a, b) a.î. $|f'(x)| \leqslant g'(x)$, $(\forall)\ x \in (a, b)$. Atunci avem*

$$|f(b) - f(a)| \leqslant g(b) - g(a) \tag{1}$$

Dem. Evident $g'(x) \geqslant 0$, $(\forall)\ x \in (a, b)$, deci g este o funcție monoton crescătoare.

1° Dacă $g(b) = g(a)$, atunci g este constantă, deci $|f'(x)| \leqslant 0$, $(\forall)\ x \in (a, b)$ și deci f este constantă.

În acest caz inegalitatea (1) este trivială.

2° Dacă $g(b) > g(a)$, considerăm funcția

$$h(x) := g(x) - g(a) - f(x) + f(a), \qquad x \in [a, b]$$

Evident h este derivabilă și avem:

$$h'(x) = g'(x) - f'(x) \geqslant 0, \ (\forall)\ x \in (a, b),$$

deci h este monoton crescătoare și deci $h(b) \geqslant h(a) = 0$, adică

$$g(b) - g(a) \geqslant f(b) - f(a) \tag{2}$$

Considerînd acum funcția

$$h(x) = g(x) - g(a) + f(x) - f(a), \quad x \in [a, b]$$

se obține, în mod analog, relația:

$$g(b) - g(a) \geqslant f(b) + f(a) \tag{3}$$

Din (2) și (3) deducem

$$g(b) - g(a) \geqslant |f(b) - f(a)|$$

Observație. P. 7.3.1.2. este un caz particular al unui rezultat remarcabil: extensiunea teoremei lui Lagrange în cazul cînd funcția f ia valori într-un spațiu normat ([24]).

7.3.13. Propoziție. *Fie $I \subseteq \mathbf{R}$ un interval și $f : I \to \mathbf{R}$ o funcție neconstantă de clasă $\mathcal{C}^1$. Atunci există un interval $J \subseteq I$. a.î f este strict monotonă pe J.*

Dem. Dacă $f' = 0$, atunci f este constantă, absurd. Așadar $(\exists)\ x_0 \in I$ a.î. $f'(x_0) \neq 0$, spre exemplu $f'(x_0) > 0$. Atunci, f' fiind continuă în x_0, există $\delta > 0$ a.î.

$$f'(x) > 0, \quad (\forall)\ x \in I \cap (x_0 - \delta, \ x_0 + \delta)$$

Evident $J = I \cap (x_0 - \delta, \ x_0 + \delta)$ este un interval deschis inclus în I pe care f este strict crescătoare.

Observația 1. *Există funcții $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ continue și care nu sînt monotone pe nici un interval deschis $J \subseteq \mathbf{R}$.*

Într-adevăr, fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ o funcție continuă și care nu este derivabilă în nici un punct (P. 12.2.17.) Atunci în virtutea teoremei lui Lebesgue f nu este monotonă pe nici un interval deschis $J \subseteq \mathbf{R}$.

Th. Lebesgue : *o funcție monotonă* $f : I \to \mathbf{R}$ *este derivabilă* a.p.t. (vezi *F. Riesz et Bela Sz. Nagy*, Lecons d'analyse fonctionnelle, 6-iéme edition, Akadémiai Kiado, Budapest 1972, p. 12).

Observația 2. Există funcții $f : [0, 1] \to [0, 1]$ continue, monoton crescătoare, surjective și care nu sînt strict crescătoare pe nici un interval deschis $J \subseteq [0, 1]$ (Funcția lui Cantor) (v. [25]).

7.3.14. Propoziție. *Fie* $P \in \mathbf{R}[X]$ *un polinom definit astfel* $P(x) = (x - a)^n(x - b)^n$, *unde* $a, b \in \mathbf{R}$ *și* $a < b$. *Atunci polinomul* $\frac{\mathrm{d}^n P}{\mathrm{d}x^n}$ *are toate rădăcinile reale și acestea se află în intervalul* (a, b).

Dem. Deoarece a și b sînt rădăcini de ordinul n, rezultă că polinoamele $P', P'', \ldots P^{(n-1)}$ au pe a și b ca rădăcini de ordinul $n-1, n-2, \ldots, 1$, respectiv. Aplicînd T. 6.3.2. pentru funcția P și intervalul $[a, b]$, deducem că există $c_1 \in (a, b)$ a.î. $P'(c_1) = 0$. Aplicînd din nou T. 6.3.2 pentru funcția P' și intervalele $[a, c_1]$ și $[c_1, b]$, deducem că există $d_1 \in (a, c_1)$ și $d_2 \in (c_1, b)$ a.î. $P''(d_1) = 0$ și $P''(d_2) = 0$. Continuînd acest proces deducem că polinoamele $P', P'', \ldots$ $\ldots P^{(n-1)}$ admit respectiv $1,2, \ldots, n-1$ rădăcini distincte în intervalul (a, b).

Fie $x_1, x_2, \ldots x_{n-1}$ cele $n - 1$ rădăcini distincte, deduse mai sus ale polinomului $P^{(n-1)}$ din intervalul (a, b), scrise în ordine crescătoare. Aplicînd, în fine, T. 6.3.2. funcției $P^{(n-1)}$ și intervalelor $[a, x_1], [x_1, x_2], \ldots [x_{n-1}, b]$, deducem că $P^{(n)}$ admite n rădăcini distincte în (a, b). Cum $P^{(n)}$ este un polinom de grad n, conchidem că toate rădăcinile polinomului $P^{(n)}$ se află în intervalul (a, b).

Corolar 1. *Polinomul lui Legendre de gradul* n, *i.e. polinomul* $P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} (x^n - 1)^n$, *are toate rădăcinile reale și acestea se află în intervalul* $(-1,1)$.

7.3.15. Propoziție (F o r m u l a l u i L a g r a n g e). *Fie* $P, Q \in \mathbf{R}[X]$ *două polinoame a.î.* Q *are toate rădăcinile reale și distincte* : $x_1, x_2, \ldots, x_n$. *Atunci avem* :

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \sum_{i=1}^{n} \frac{c_i}{x - x_i}, \quad \text{unde } c_i = \frac{P(x_i)}{Q'(x_i)}$$

Dem. Evident $(\exists !)\ C, P_1 \in \mathbf{R}[X]$, cu grad $P_1 <$ grad Q a.î. avem reprezentarea $\frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{P_1(x)}{Q(x)}$. Atunci (T.4.9.9.) :

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \sum_{i=1}^{n} \frac{c_i}{x - x_i} \quad (c_i - \text{constante}),$$

deci

$$\frac{P(x)}{\dfrac{Q(x) - Q(x_j)}{x - x_j}} = (x - x_j)C(x) + c_j + \sum_{i \neq j} c_i \frac{x - x_j}{x - x_i} \quad (x \neq x_j),$$

de unde prin trecere la limită, $x \to x_j$, obținem $\frac{P(x_j)}{Q'(x_j)} = C_j$.

7.3.16. Propoziție. *Fie* $I \subseteq \mathbf{R}$ *un interval,* $f_{ij} : I \to \mathbf{R}$ $(i, j \in \overline{1, n})$, n^2 *funcții derivabile în* $x_0 \in I$. *Atunci avem relația :*

$$\left(\begin{vmatrix} f_{11} \dots f_{1n} \\ \dots\dots\dots \\ f_{n1} \dots f_{nn} \end{vmatrix}\right)'(x_0) = \sum_{i=1}^{n} \begin{vmatrix} f_{11}(x_0) \dots f_{1n}(x_0) \\ \dots\dots\dots\dots \\ f'_{i1}(x_0) \dots f'_{in}(x_0) \\ \dots\dots\dots\dots \\ f_{n1}(x_0) \dots f_{nn}(x_0) \end{vmatrix}$$

Dem. Considerăm funcția $g : I \to \mathbf{R}$ definită astfel :

$$g(x) = \begin{vmatrix} f_{11}(x) \dots f_{1n}(x) \\ \dots\dots\dots \\ f_{n1}(x) \dots f_{nn}(x) \end{vmatrix}, \quad x \in I$$

Fie Γ_n mulțimea permutărilor mulțimii $\{1, 2, \dots, n\}$. Dacă $\sigma \in \Gamma_n$, atunci să punem sign $\sigma = +1$ (resp. -1), după cum σ este pară (resp. impară). Din definiția unui determinant avem :

$$g(x) = \sum_{\sigma \in \Gamma_n} (\text{sign } \sigma) f_{1\sigma_1}(x) \dots f_{n\sigma_n}(x), \quad (\forall)\ x \in I,$$

deci

$$g'(x_0) = \sum_{\sigma \in \Gamma_n} (\text{sign } \sigma) f'_{1\sigma_1}(x_0) f_{2\sigma_2}(x_0) \dots f_{n\sigma_n}(x_0) + \dots +$$
$$+ \sum_{\sigma \in \Gamma_n} (\text{sign } \sigma) f_{1\sigma_1}(x_0) \dots f'_{n\sigma_n}(x_0)$$

Prin urmare

$$g'(x_0) = \sum_{i=1}^{n} \begin{vmatrix} f_{11}(x_0) \dots f_{1n}(x_0) \\ \dots\dots\dots\dots \\ f'_{i1}(x_0) \dots f'_{in}(x_0) \\ \dots\dots\dots\dots \\ f_{n1}(x_0) \dots f_{nn}(x_0) \end{vmatrix}$$

7.3.17. Definiție. Se numește *curbă plană* (drum) o mulțime $\Gamma \subseteq \mathbf{R}^2$ cu proprietatea că există $\varphi : [\alpha, \beta] \to \mathbf{R}$ o funcție cu proprietatea că $\varphi([\alpha, \beta]) = \Gamma$. Dacă notăm cu $\text{pr}_1(x, y) = x$ și $\text{pr}_2(x, y) = y$, $(\forall)\ (x, y) \in \mathbf{R}^2$, funcțiile proiecție ale lui $\mathbf{R}^2$ pe cele două axe de coordonate, atunci funcțiile $x \in \varphi_1(t)$, $y = \varphi_2(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, unde $\varphi_i = \text{pr}_i \circ \varphi$, constituie o *reprezentare parametrică* a lui Γ. (fig. 35, a). Funcția $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ constituie o *reprezentare carteziană* a lui Γ dacă $\Gamma = G_f$, unde G_f este graficul lui f (fig. 35, b). În fine, dacă există $\theta_1, \theta_2 \in \mathbf{R}$, $\theta_1 < \theta_2$, și $\rho : [\theta_1, \theta_2] \to \mathbf{R}$ o funcție a.î. $(\theta, \rho(\theta))$ sînt argumentul și modulul unui punct $(x, y) \in \Gamma$ și reciproc, atunci funcția $\rho = \rho(\theta)$, $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$, constituie o reprezentare a lui Γ în *coordonate polare* (fig. 35 c).

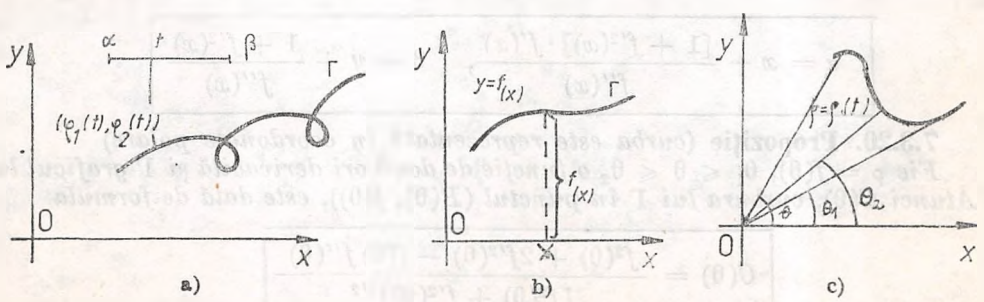


Fig. 35

Exemple.

1) $x = a \cos t$, $y = b \sin t$, $t \in [0, 2\pi]$, constituie o reprezentare parametrică a elipsei $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

2) $\rho = r$, $\theta \in [0, 2\pi]$, constituie reprezentarea cercului $x^2 + y^2 = r^2$ $(r > 0)$, în coordonate polare.

3) Funcția $f(x) = +\sqrt{r^2 - x^2}$, $x \in [-r, r]$, constituie reprezentarea carteziană a semicercului superior : $x^2 + y^2 = r^2$, $y \geqslant 0$.

7.3.18. Definiție. Fie Γ o curbă plană și $P \in \Gamma$ un punct. Se numește *curbura lui* Γ în punctul P derivata unghiului θ format de tangenta la curbă în punctul P cu axa Ox în raport cu lungimea arcului de curbă cu originea în P, adică $C_P = \lim\limits_{s \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta s}$ (fig. 36). Inversa curburei în P se numește *rază de curbură* în P adică $r_P = \frac{1}{C_P}$. Cercul tangent curbei Γ în punctul P și de rază

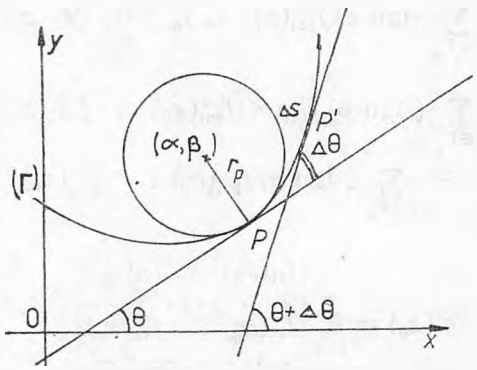


Fig. 36

r_P se numește *cercul osculator* al lui Γ în P. Locul geometric al centrului cercului osculator la curba Γ se numește *evoluta* curbei Γ.

7.3.19. Propoziție (*Curba este reprezentată în coordonate carteziene*). *Fie* $f : I \to \mathbf{R}$ *o funcție de două ori derivabilă și* Γ *graficul lui* f. *Atunci* $C(x)$, *curbura lui* Γ *în punctul* $P(x, f(x))$, *este dată de formula*

$$\boxed{C(x) = \frac{f''(x)}{[1 + f'^2(x)]^{3/2}}}$$

Coordonatele centrului cercului osculator în punctul $P(x, f(x))$ *sînt date de formulele :*

$$\boxed{\alpha = x - \frac{[1 + f'^2(x)] \cdot f'(x)}{f''(x)}, \quad \beta = y + \frac{1 + f'^2(x)}{f''(x)}}$$

7.3.20. Propoziție (*curba este reprezentată în coordonate polare*)

Fie $\rho = f(\theta)$, $\theta_1 \leqslant \theta \leqslant \theta_2$ *o funcție de două ori derivabilă și* Γ *graficul lui* f. *Atunci* $C(\theta)$, *curbura lui* Γ *în punctul* $(P(\theta), f(\theta))$, *este dată de formula*

$$\boxed{C(\theta) = \frac{f^2(\theta) + 2f'^2(\theta) - f(\theta) f''(\theta)}{[f^2(\theta) + f'^2(\theta)]^{3/2}}}$$

Exemplul 1. *Să se calculeze raza de curbură a parabolei* $x^2 = 2py$ *în vîrful ei.*

Avem $f(x) = \frac{1}{2p} x^2$, $x \in \mathbf{R}$. Atunci $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$, avem

$$C(x) = \frac{\frac{1}{p}}{\left[1 + \left(\frac{x}{p}\right)^2\right]^{3/2}}, \text{ deci } R(0) = \frac{1}{C(0)} = p$$

Exemplul 2. *Să se arate că dreapta are curbura nulă, iar cercul de rază* r, *are curbura egală cu* $\frac{1}{r}$.

Ecuația unei drepte fiind $f(x) = ax + b$, $x \in \mathbf{R}$, deci $f''(0)=0$ și deci (P. 7.3.19) $C(x) = 0$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$.

Ecuația cercului (cu centrul în O), în coordonate polare fiind $\rho = \rho(\theta) = r$, $\theta \in [0, 2\pi]$, rezultă (P. 7.3.20) :

$$C(\theta) = \frac{r^2}{(r^2)^{3/2}} = \frac{1}{r},\ (\forall)\ \theta \in [0, 2\pi]$$

Observație. Se poate arăta și afirmația reciprocă : *o curbă plană de curbură constantă este un cerc.*

CAPITOLUL 8

PRIMITIVE

Capitolul de primitive poate fi considerat că face parte fie din *Calculul diferențial*, fie din *Calculul integral*. Mai precis, el face legătura între cele două mari părți ale Analizei matematice. Conceptul de *primitivă* leagă între ele conceptele fundamentale ale Analizei, *derivata* și *integrala*, ceea ce justifică situarea acestui capitol aici, între capitolele *Derivabilitate* și *Integrabilitate*. Notația primitivei dintr-o funcție, cu același simbol grafic (mai puțin limitele de integrare) ca și integrala, conduce adesea la confuzia dintre cele două concepte, ca și la utilizarea aceleeași denumiri pentru fapte diferite (se spune „formula de integrare prin părți" etc., fie că e vorba de integrală, fie că e vorba de primitivă). Am încercat să evităm asemenea situații utilizînd, uneori, termenul de *antiderivată* pentru *primitivă* și *antiderivabilă* pentru *admite primitive*.

Vom prezenta în secțiunile 8.1.—8.2. din acest capitol, principalele rezultate teoretice legate de noțiunea de primitivă, urmînd ca în secțiunile 8.3.—8.6. să ne ocupăm de calcul cu primitive a unor clase importante de funcții elementare.

Teorema de existență a primitivei va fi demonstrată ulterior, în două moduri : primul, cu ajutorul noțiunii de integrală (Cap. 9) și al doilea, utilizînd exclusiv elemente de calcul diferențial (Cap. 12).

8.1. Primitive. Proprietăți generale

8.1.1. Definiție. Fie $I \subseteq \mathbf{R}$ un interval *) și $f : I \to \mathbf{R}$ o funcție. Vom spune că f *admite primitive* (este *antiderivabilă*) dacă $(\exists)\ F : I \to \mathbf{R}$ derivabilă a.î. $F' = f$ i.e. $F'(x) = f(x)$, $(\forall)\ x \in I$. Funcția F se numește o *primitivă* (antiderivată) a lui f și se notează cu $\int f, \int f\ \mathrm{d}x, \int f(x)\ \mathrm{d}x$ sau $\int f(x)\ \mathrm{d}x$, $x \in I$. În locul lui I se poate considera o reuniune arbitrară de intervale nedegenerate. Vom nota cu $\mathcal{A}(I)$ *mulțimea tuturor funcțiilor* $f : I \to \mathbf{R}$ *care admit primitive*.

Observația 1. Reținem încă de la început că primitiva este o funcție și integrala este un număr.

Observația 2. Fie $A \subseteq \mathbf{R}$ o mulțime, egală cu o reuniune de intervale nedegenerate și $f : A \to \mathbf{R}$ o funcție care admite o primitivă F. Notația curentă a lui F prin $\int f(x)\ \mathrm{d}x$ este ambiguă, deoarece nu precizează mulțimea de definiție

*) Peste tot în Cap. 8 vom considera intervale *nedegenerate*.

a lui f. Vom utiliza totuşi această notaţie, în cazul cînd f este o funcţie elementară şi *vom subînţelege că x aparţine mulţimii maximale $A \subseteq \mathbf{R}$ pentru care $f(x)$ are sens*. Spre exemplu, $\int \sin x\, dx$ înseamnă $\left(\int \sin\right)(x)$, $x \in \mathbf{R}$; $\int \ln x\, dx$ înseamnă $\left(\int \ln\right)(x)$, $x \in \mathbf{R}_+^*$; $\int \operatorname{tg} x\, dx$ înseamnă $\left(\int \operatorname{tg}\right)(x)$, unde $x \in \mathbf{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \pi \mathbf{Z}\right)$ etc.

8.1.2. Propoziţie. *Fie $I \subseteq \mathbf{R}$ un interval şi $f : I \to \mathbf{R}$ o funcţie care admite primitive. Atunci orice două primitive ale lui f diferă între ele printr-o constantă.*

Dem. Fie $F_1, F_2 : I \to \mathbf{R}$ două primitive ale lui f, i.e. $F_1' = F_2' = f$. Atunci $(F_1 - F_2)' = 0$, deci (T. 6.3.4. Cor. 2) $F_1 - F_2 = \mathbf{C}$.

Corolar 1. *Fie $I \subseteq \mathbf{R}$ un interval şi $f : I \to \mathbf{R}$ o funcţie care admite o primitivă F. Atunci $(\forall)\ C \in \mathbf{R}$, funcţia $F + C$ este o primitivă a lui f şi orice primitivă a lui f este de forma $F + C$ cu $C \in \mathbf{R}$.*

Observaţie 1. Din Cor. 1 rezultă că primitiva pe un interval I este *unic determinată pînă la o constantă aditivă*. Dacă I nu este interval, ci o reuniune de intervale, afirmaţia nu este numaidecît adevărată.

Contraexemplu. Fie $f, F_1, F_2 : \mathbf{R}^* \to \mathbf{R}$ trei funcţii definite astfel $f = 0$, $F_1(x) = 2$, şi $F_2(x) = \operatorname{sign} x$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}^*$. Atunci $F_1' = F_2' = f$ şi $F_1 \neq F_2$.

Observaţia 2. Fie $I \subseteq \mathbf{R}$ un interval şi $f : I \to \mathbf{R}$ o funcţie care admite o primitivă F. Atunci mulţimea $\{F + C;\ C \in \mathbf{R}\}$ se numeşte uneori *primitiva* lui f, deci primitiva apare nu ca o funcţie ci ca o mulţime de funcţii. Vom evita aici această terminologie, deoarece cele mai simple rezultate din teoria primitivelor se exprimă atunci într-un limbaj greoi, nenatural şi contrar tradiţiei. Vom considera de fiecare dată *o primitivă* a lui f în loc de *primitiva* lui f (prin analogie cu *o determinare* a funcţiei arc sinus etc.). Fie $\mathcal{D}(I) = \{g : I \to \mathbf{R};\ g \text{ derivabilă}\}$; $(\forall)\ g \in \mathcal{D}(I)$, punem $D(g) = g'$ i.e. D asociază lui g derivata sa. Evident avem $D : \mathcal{D}(I) \to \mathcal{A}(I)$. Fie $f \in \mathcal{A}(I)$ fixat; atunci *primitiva* lui f este mulţimea $D^{-1}(\{f\})$, în timp ce *o primitivă* a lui f este un element din mulţimea $D^{-1}(\{f\})$. Notaţia $\int f(x)\, dx$ înseamnă *o primitivă* a lui f, încît expresiile *„Să se calculeze o primitivă a lui f"*, *"Să se calculeze $\int f(x)\, dx$"*, *"Să se calculeze primitiva $\int f(x)dx$"*, sînt sinonime şi conforme cu terminologia clasică utilizată.

8.1.3. Propoziţia. *Fie $I \subseteq \mathbf{R}$ un interval şi $f : I \to \mathbf{R}$ o funcţie. Atunci f admite primitive $\Leftrightarrow (\forall)\ K \subseteq I$ un interval compact, rezultă că $f|_K$ admite primitive.*

Dem. ($\Rightarrow$) Fie F o primitivă a lui f şi $K \subseteq I$ un interval arbitrar fixat. Atunci $F|_K$ este o primitivă a lui $f|_K$ etc.

($\Leftarrow$) Fie $(I_n)_{n \geq 1}$ un şir de subintervale compacte din I a.î. $\bigcup_{n \geq 1} I_n = I$ şi $I_n \subseteq \overset{\circ}{I}_{n+1}$, $(\forall)\ n \geq 1$. Fie acum F_1 o primitivă a lui $f|_{I_1}$ şi F_2 o primitivă a lui $f|_{I_2}$. Cum F_1 şi $F_2|_{I_1}$ diferă între ele printr-o constantă (P. 8.1.2.), putem presupune adăugînd lui F_2 o constantă convenabilă că $F_2|_{I_1} = F_1$. Prin inducţie construim un şir $(F_n)_{n \geq 1}$ de funcţii cu proprietăţile: 1° F_n este o primitivă a lui $f|_{I_n}$, $(\forall)\ n \geq 1$; 2° $F_{n+1}|_{I_n} = F_n$, $(\forall)\ n \geq 1$. În fine, fie $F : I \to \mathbf{R}$ o funcţie a.î. $F|_{I_n} = F_n$, $(\forall)\ n \geq 1$; evident F este corect definită. Fie $n \geq 1$ fixat; cum $F|_{I_n}$ este derivabilă, fiind egală cu $F_n|_{I_n}$, rezultă (P. 6.1.5.) că F este derivabilă pe $\overset{\circ}{I}_n$, deci F este derivabilă pe $\bigcup_{k \geq 1} \overset{\circ}{I}_k = I$; evident $F' = f$. Prin urmare f admite primitive.

Corolar 1. *Fie $I \subseteq \mathbf{R}$ un interval și $f : I \to \mathbf{R}$ o funcție. Atunci f este antiderivabilă $\Leftrightarrow$ f local antiderivabilă i.e.* $(\forall)\ x \in I$, $(\exists)\ \varepsilon_x > 0$ *a.î.* $f|_{I_x}$ *este antiderivabilă, unde* $I_x := I \cap [x - \varepsilon_x, x + \varepsilon_x]$.

Corolar 2. *Fie $I \subseteq \mathbf{R}$ un interval și $f : I \to \mathbf{R}$ o funcție. Atunci f admite primitive $\Leftrightarrow$* $(\exists)\ c \in \overset{\circ}{I}$ *a.î. funcțiile* $f|_{(-\infty, c] \cap I}$ *și* $f|_{[c, \infty) \cap I}$ *admit primitive.*

Dem. ($\Leftarrow$) Fie F_1(resp. F_2) o primitivă a lui $f|_{(-\infty, c] \cap I}$ (resp. $f|_{[c, \infty) \cap I}$); înlocuind F_1 cu $F_1 + \lambda$, putem presupune că $F_1(c) = F_2(c)$. Fie mai departe $F : I \to \mathbf{R}$ o funcție definită astfel $F(x) = F_1(x)$, dacă $x \in (-\infty, c] \cap I$ și $F(x) = F_2(x)$, dacă $x \in [c, \infty) \cap I$, deci $F(c) = F_1(c) = F_2(c)$. Evident avem :

$$\lim_{x \nearrow c} \frac{F(x) - F(c)}{x - c} = \lim_{x \nearrow c} \frac{F_1(x) - F_1(c)}{x - c} = F_1'(c) = f(c),$$

$$\lim_{x \searrow c} \frac{F(x) - F(c)}{x - c} = \lim_{x \searrow c} \frac{F_2(x) - F_2(c)}{x - c} = F_2'(c) = f(c).$$

Așa dar F este derivabilă în c și $F'(c) = 0$, deci $F' = f$ și deci F este o primitivă a lui f.

8.1.4. Propoziție. *Fie $I \subseteq \mathbf{R}$ un interval și $f, g : I \to \mathbf{R}$ două funcții care admit primitive. Atunci $f = g \Leftrightarrow (\exists)\ A \subseteq I$ cel mult numerabilă a.î. $f(x) = g(x)$,* $(\forall)\ x \in I \setminus A$.

Dem. ($\Leftarrow$) Fie F (resp. G) $: I \to \mathbf{R}$ o primitivă a lui f (resp. g) i.e. $F' = f$ (resp. $G' = g$). Atunci $(F - G)'(x) = f(x) - g(x) = 0$, $(\forall)\ x \in I \setminus A$, deci $(F-G)'$ ia cel mult o mulțime numerabilă de valori și se anulează cel puțin într-un punct. Însă (T. 6.3.7.) $(F-G)'$ are proprietatea lui Darboux, deci (P. 4.3.4.) $(F-G)' = 0$ și deci $F' = G'$. Prin urmare $f = F' = G' = g$.

Corolar 1. *Fie $I \subseteq \mathbf{R}$ un interval și $f : I \to \mathbf{R}$ o funcție care admite primitive, în particular f continuă. Atunci orice funcție $g : I \to \mathbf{R}$ care diferă de f într-o mulțime finită nevidă de puncte, nu are primitive. Așadar modificînd f în n puncte, $n \geqslant 1$ fixat, funcția rezultată nu are primitive.*

8.1.5. Definiție. Fie $I \subseteq \mathbf{R}$ un interval de capete $a, b \in \overline{\mathbf{R}}$. O funcție $f : I \to \mathbf{R}$ se numește *poligonală*, dacă $(\exists)\ a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, o diviziune a lui I cu proprietatea că f este afină pe fiecare interval $J_i := I \cap [x_{i-1}, x_i]$ $(i = \overline{1, n})$, deci de forma $f(x) = \alpha_i x + \beta_i$, $(\forall)\ x \in J_i$, cu $\alpha_i, \beta_i \in \mathbf{R}$ fixați.

8.1.6. Propoziție. *Fie $I \subseteq \mathbf{R}$ un interval și $f : I \to \mathbf{R}$ o funcție poligonală. Atunci f admite primitive.*

Dem. Fie $a, b \in \overline{\mathbf{R}}$ capetele lui I și $a = x_0 < x_1 \ldots < x_n = b$, o diviziune a lui I cu proprietatea că $f(x) = \alpha_i x + \beta_i$, $(\forall)\ x \in J_i := I \cap [x_{i-1}, x_1]$, unde $\alpha_i, \beta_i \in \mathbf{R}$ sînt fixați pentru fiecare $i = \overline{1, n}$. Evident f este continuă. Fie $F : I \to \mathbf{R}$ o funcție definită astfel

$$F(x) = \alpha_i x^2 + \beta_i x + \gamma_i,\ (\forall)\ x \in J_i,$$

unde $n - 1$ dintre constantele reale $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ sînt determinate prin condiția ca F să fie continuă în fiecare $x_i (i = \overline{1, n-1})$, deci a.î. $F(x_i -) = F(x_i +)$. Evident F este derivabilă pe fiecare interval (x_{i-1}, x_i) $(i = \overline{1, n})$ și avem $\lim_{x \to x_i} F'(x) = \lim_{x \to x_i} f(x) = f(x_i)$, deci (T.6.3.8.) F este derivabilă în x_i și $F'(x_i) = f(x_i)$, $(\forall)\ i = \overline{1, n}$. Prin urmare F este o primitivă a lui f.

8.1.7. Teoremă. *Fie $I \subseteq \mathbf{R}$ un interval și $f : I \to \mathbf{R}$ o funcție continuă. Atunci f admite primitive.*

Vom da ulterior două demonstrații ale acestei teoreme fundamentale, prima în Cap. 9 (T.9.3.1.Cor.1) și a doua în Cap. 12 (T.12.1.12.Cor.1).

8.1.8. Propoziție. *Fie $I \subseteq \mathbf{R}$ un interval și $f : I \to \mathbf{R}$ o funcție care admite primitive. Atunci f are proprietatea Darboux, deci f nu are discontinuități de prima speță.*

Dem. Cf. ipotezei $(\exists)\ F : I \to \mathbf{R}$ derivabilă a.î. $F' = f$. Aplicăm mai departe T.6.3.7. și P.5.5.20.Cor.3.

Corolar 1. *Fie $I \subseteq \mathbf{R}$ un interval și $f : I \to \mathbf{R}$ o funcție care nu are proprietatea Darboux. Atunci f nu admite primitive.*

Corolar 2. *Fie $I \subseteq \mathbf{R}$ un interval și $f : I \to \mathbf{R}$ o funcție care ia cel puțin două valori și cel mult o infinitate numerabilă de valori. Atunci f nu are proprietatea Darboux.*

Observația 1. Din T.8.1.7. și P.8.1.8. rezultă că putem scrie : $\mathcal{C}(I) \subseteq \mathcal{A}(I) \subseteq \mathcal{D}_0(I)$. Vom vedea mai departe că incluziunile sînt stricte. De aici decurge următorul criteriu practic : pentru a arăta că o funcție f *are primitive* este *suficient* (și nu numaidecît necesar) să arătăm că f este continuă iar pentru a arăta că f *nu are primitive* este *suficient* (și nu numaidecît necesar) să arătăm că f nu are proprietatea Darboux sau că f are discontinuități de prima speță.

Exemplul 1. *Fie $f(x) = |x|$, $x \in \mathbf{R}$ funcția modul. Să se arate că f are primitive și să se calculeze o primitivă a sa.*

Funcția f este continuă, deci (T.8.1.7.) admite primitive. Fie $F : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ o funcție definită astfel $F(x) = \frac{1}{2} x^2$, dacă $x \geqslant 0$ și $F(x) = -\frac{1}{2} x^2$, dacă $x < 0$. Din P.6.1.5. rezultă că F este derivabilă pe $\mathbf{R}^*$ și avem $F'(x) = x$, dacă $x > 0$ și $F'(x) = -x$, dacă $x < 0$. Deoarece F este continuă în 0 și avem $\lim\limits_{x \searrow 0} F'(x) = \lim\limits_{x \nearrow 0} F'(x) = 0$, rezultă (T.6.3.8.) că F este derivabilă în 0 și $F'(0) = 0$.

Prin urmare $F' = f$, deci F este o primitivă a lui f.

Exemplul 2. *Fie $f(x) = |\sin x|$, $x \in \mathbf{R}$. Să se calculeze o primitivă a lui f.*

$$\text{Fie } F(x) = \begin{cases} -\cos x, & x \in \bigcup\limits_{n \in \mathbf{Z}} [2n\pi,\ (2n+1)\pi] \\ \cos x, & x \in \bigcup\limits_{n \in \mathbf{Z}} ((2n-1)\pi,\ 2n\pi) \end{cases}$$

Se vede imediat (cf.P.6.1.5.) că F este derivabilă pe $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$ și avem $F'(x) = f(x)$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$. Cum $\lim\limits_{x \to n\pi} F'(x) = 0$, rezultă (T.6.3.8.) că F este derivabilă în $n\pi$ și avem $F'(n\pi) = 0$, $(\forall)\ n \in \mathbf{Z}$, deci $F' = f$ etc.

Exemplul 3. *Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ o funcție definită astfel $f(x) = \sin \frac{1}{x}$, dacă $x \neq 0$ și $f(0) = \alpha$ cu $\alpha \in \mathbf{R}$ fixat. Atunci:* 1° *f are primitive* $\Leftrightarrow \alpha = 0$; 2° *$f$ are proprietatea Darboux* $\Leftrightarrow |\alpha| \leqslant 1$.

1° ($\Leftarrow$) Fie $F(x) = x^0 \cos \frac{1}{x}$, dacă $x \neq 0$ și $F(0) = 0$. Evident (P.6.1.5.) F este derivabilă pe $\mathbf{R}^*$ și avem :

$$F'(x) = 2x \cos \frac{1}{x} + \sin \frac{1}{x} \quad (\forall)\ x \in \mathbf{R}^*$$

Deoarece

$$\lim_{x \to 0} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} x \cos \frac{1}{x} = 0,$$

rezultă că F este derivabilă în 0 și $F'(0) = 0$.

Fie mai departe $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ o funcţie definită astfel $g(x) = 2x \cos \frac{1}{x}$, dacă $x \neq 0$ şi $g(0) = 0$. Evident g este continuă pe $\mathbf{R}^*$ şi deoarece $|g(x)| \leqslant 2|x|$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$, rezultă g continuă şi în 0, deci g continuă pe $\mathbf{R}$. Fie G o primitivă a lui g. Este clar că

$$(F - G)'(x) = F'(x) - g(x) = f(x),\ (\forall)\ x \in \mathbf{R},$$

prin urmare f admite primitive.

($\Rightarrow$) Pentru $\alpha \in \mathbf{R}$ notăm funcţia din enunţ cu f_α. Am văzut mai sus că f_0 admite primitive. Fie $\alpha \in \mathbf{R}$ cu proprietatea că f_α admite primitive. Evident f_α coincide cu f_0 pe $\mathbf{R}^*$, deci (P.8.1.4.) $f_\alpha = f_0$ şi deci $\alpha = 0$.

2° ($\Rightarrow$) Să presupunem, cu notaţiile de mai sus, că f_α are proprietatea Darboux. Atunci (P.4.3.3.) $f_\alpha(\mathbf{R})$ este un interval şi evident $f_\alpha(\mathbf{R}) = [-1, 1] \cup \cup \{\alpha\}$, deci $\alpha \in [-1, 1]$ şi deci $|\alpha| \leqslant 1$.

($\Leftarrow$) Fie $|\alpha| < 1$ şi $J \subseteq \mathbf{R}$ un interval, fixaţi. Dacă $J \subseteq \mathbf{R}_+^*$, atunci f_J este continuă, deci (P.4.3.3.) $f(J) = f|_J(J)$ este un interval; raţionament analog dacă $J \subseteq \mathbf{R}_-^*$. Dacă $J \ni 0$ şi $J \neq \{0\}$, spre exemplu $J \cap \mathbf{R}_+^* \neq \emptyset$, atunci $(\exists)\ n \in \mathbf{N}$ a.î. $J_0 := \left[\frac{1}{(n+2)\pi}, \frac{1}{n\pi}\right] \subseteq J$, deci $[n\pi, 2\pi + n\pi] = \left\{\frac{1}{x};\ x \in J_0\right\}$, şi deci

$$f(J) \supseteq f(J_0) = \sin([n\pi, 2\pi + n\pi]) = [-1, 1]$$

Cum $f(J) \subseteq [-1, 1]$, rezultă $f(J) = [-1, 1]$, prin urmare (P.4.3.3.) f are proprietatea Darboux.

Corolar 1. *Fie* $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *o funcţie definită astfel* $f(x) = \sin^2 \frac{1}{x}$, *dacă* $x \neq 0$ *şi* $f(0) = \alpha$. *Atunci:* 1° f *are primitive* $\Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{2}$; 2° f *are proprietatea Darboux* $\Leftrightarrow 0 \leqslant \alpha \leqslant 1$.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sin\frac{2}{x}, & x \neq 0 \\ \alpha, & x = 0 \end{cases} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\begin{cases} \sin\frac{2}{x}, & x \neq 0 \\ 1 - 2\alpha, & x = 0, \end{cases}$$

deci 1° f are primitive $\Leftrightarrow 1 - 2\alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{2}$; 2° f are proprietatea Darboux $\Leftrightarrow |1 - 2\alpha| \leqslant 1 \Leftrightarrow 0 \leqslant \alpha \leqslant 1$.

Observaţie. Putem înlocui mai sus pe sin cu cos. De asemenea scriind pe $\sin^n$ în funcţie de multiplii lui sin(resp. cos) dacă n este impar (resp. par), deducem din cele de mai sus că funcţia $f(x) = \sin^n \frac{1}{x}$, dacă $x \in \mathbf{R}^*$ şi $f(0) = 0$, are primitive, dacă şi numai dacă n este impar.

8.1.9. Propoziţie *Următoarele proprietăţi sînt adevărate:*

1° $\mathcal{A}(\mathbf{R}) \setminus \mathcal{C}(\mathbf{R}) \cdot \emptyset$, *deci există funcţii care admit primitive şi nu sînt continue (discontinuităţi de speţa a doua);*

2° $\mathcal{D}_a(\mathbf{R}) \setminus \mathcal{A}(\mathbf{R}) \neq \emptyset$, *deci există funcţii care au proprietatea Darboux şi nu au primitive;*

3° $\mathcal{C}(\mathbf{R}) \subset \mathcal{A}(\mathbf{R}) \subset \mathcal{D}_a(\mathbf{R})$;

4° *Există funcții care au primitive și al căror pătrat nu are primitive.*

Dem. Fie f_α funcția considerată în Exemplul 3. Atunci $f_0 \in \mathcal{A}(\mathbf{R})$ și cum f_0 nu are limită în 0, ea este discontinuă în 0, deci $f_0 \notin \mathcal{C}(\mathbf{R})$. Mai departe $f_1 \in \mathcal{D}_a(\mathbf{R})$ și $f_1 \notin \mathcal{A}(\mathbf{R})$. Evident proprietatea 3° rezultă din 1°, 2° și din incluziunea arătată anterior $\mathcal{C}(\mathbf{R}) \subseteq \mathcal{A}(\mathbf{R}) \subseteq \mathcal{D}_a(\mathbf{R})$. (T.8.1.7. și T.8.1.8.). În fine proprietatea 4° rezultă din faptul că $f_0 \in \mathcal{A}(\mathbf{R})$ și $f_0^2 \notin \mathcal{A}(\mathbf{R})$.

8.1.10. Propoziție. *Fie $f : (a, b) \to \mathbf{R}$ o funcție care are primitive și F o primitivă a sa. Dacă $f(a+)$ există și este finită, atunci $F(a+)$ există și este finită, mai precis funcția $\tilde{F} : [a, b) \to \mathbf{R}$ definită astfel $\tilde{F}(x) := F(x)$, dacă $x \in (a, b)$ și $\tilde{F}(a) := F(a+)$ este o primitivă a funcției $\tilde{f} : [a, b) \to \mathbf{R}$ definită astfel $\tilde{f}(x) := f(x)$, dacă $x \in (a, b)$ și $\tilde{f}(a) := f(a+)$. Afirmație analoagă, dacă $f(a+)$ și $f(b-)$ există și sînt finite.*

Dem. Aplicăm T.6.3.8.Cor.3 pentru funcția F, ținînd seama că $\lim\limits_{x \searrow a} F'(x) = f(a+) \in \mathbf{R}$.

Observația 1. Fie $f : (a, b) \to \mathbf{R}$ o funcție care are primitive. Dacă $(\exists)\, \tilde{f} : [a, b) \to \mathbf{R}$ o funcție care are primitive și care prelungește pe f, nu rezultă numaidecît că $f(a+)$ există.

Contraexemplu. Fie $f : (0, \infty) \to \mathbf{R}$ definită astfel $f(x) = \sin \frac{1}{x}$. Atunci f poate fi prelungită pe $[0, \infty)$ la o funcție care are primitive, punînd $\tilde{f}(0) = 0$ și totuși $f(0+)$ nu există.

Să vedem, în continuare, cum putem determina o primitivă a funcției $f : I \to \mathbf{R}$ cunoscînd primitivele lui f pe un număr finit de subintervale ale lui I care acoperă I.

8.1.11. Propoziție. *Fie $f : [a, b) \to \mathbf{R}$ o funcție care are primitive și fie H o primitivă a lui f pe (a, b). Atunci $H(a+)$ există și este finită iar aplicația $\tilde{H} : [a, b) \to \mathbf{R}$ definită astfel $\tilde{H}(a) = H(a+)$ și $\tilde{H}(x) = H(x)$, $(\forall)\, x \in (a, b)$, este o primitivă a lui f.*

Dem. Fie F o primitivă a lui f i.e. $F : [a, b) \to \mathbf{R}$ este derivabilă și $F' = f$. Evident avem $(F - H)'(x) = 0$, $(\forall)\, x \in (a, b)$, deci (T.6.3.4.Cor.2) $(\exists)\, C \in \mathbf{R}$ a.î. $F(x) = H(x) + C$, $(\forall)\, x \in (a, b)$. Funcția F fiind derivabilă în a, este continuă în a, deci (T.5.5.6.(2°)) avem $F(a+) = F(a) \in \mathbf{R}$ și deci

$$\lim_{x \searrow a} H(x) = \lim_{x \searrow a} (F(x) - C) = F(a) - C$$

Așadar $H(a+)$ există și $H(a+) = F(a) - C \in \mathbf{R}$. Am obținut că $\tilde{H}(x) = F(x) - C$, $(\forall)\, x \in [a, b)$, prin urmare $\tilde{H}$ este o primitivă a lui f.

Corolar 1. *Fie $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ o funcție care are primitive și fie H o primitivă a lui f pe (a, b). Atunci $H(a+)$ și $H(b-)$ există și sînt finite iar funcția $\tilde{H} : [a, b] \to \mathbf{R}$ definită astfel $\tilde{H}(a) = H(a+)$, $\tilde{H}(b) = H(b-)$ și $\tilde{H}(x) = H(x)$, $(\forall)\, x \in (a, b)$, este o primitivă a lui f.*

Corolar 2. *Fie $I \subseteq \mathbf{R}$ un interval și $f : I \to \mathbf{R}$ o funcție care are primitive; fie $(J_k)_{k=\overline{1,n}}$ o partiție finită a lui I formată cu intervale și F_k o primitivă a lui f pe $\overset{\circ}{J}_k$ $(k = \overline{1, n})$. Atunci fiecare $F_k (k = \overline{1, n})$ are limite finite în capetele lui J_k, dacă acestea aparțin lui I și $(\exists)\, C_1, C_2, \ldots C_n \in \mathbf{R}$ a.î. funcția $F : I \to \mathbf{R}$ definită astfel $F(x) := \tilde{F}_k(x) + C_k$, $(\forall)\, x \in J_k$, unde $\tilde{F}_k$ este prelungirea naturală a lui F_k la J_k $(k = \overline{1, n})$, este o primitivă a funcției f.*

Dem. Fie $F : I \to \mathbf{R}$ o primitivă a lui f. Evident funcția $F|_{J_k}$ este o primitivă a lui $f|_{J_k}$, deci (Cor.1) $(\exists)\ C_k \in \mathbf{R}$ a.î. $F|_{J_k} = \widetilde{F}_k + C_k$ $(k = \overline{1, n})$. Prin urmare există constantele C_k $(k = \overline{1, n})$ cu proprietățile din enunț.

Corolar 3. *Fie $I \subseteq \mathbf{R}$ un interval, $f : I \to \mathbf{R}$ o funcție care are primitive și $(J_k)_{k=\overline{1,n}}$ o partiție finită a lui I formată din intervale cu $\bar{J}_k \cap \bar{J}_{k+1} = \{a_k\}$, $(k = \overline{1, n-1})$. Atunci $(\exists)\ C_1, C_2, \ldots C_n \in \mathbf{R}$ a.î. funcția $F : I \to \mathbf{R}$ definită astfel $F|_{J_k} := \int (f|_{J_k}) + C_k (k = \overline{1, n})$, este o primitivă a lui f. Constantele C_k se determină prin condițiile $F(a_k -) + C_k = F(a_k +) + C_{k+1}$ $(k = \overline{1, n-1})$, în funcție de C_1.*

Exemplul 1. *Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ o funcție definită astfel $f(x) = e^x$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}_+$ și $f(x) = 1 + x$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}_-^*$. Atunci f are primitive; să se calculeze o primitivă a lui f.*

Evident f este continuă pe $\mathbf{R}^*$. Deoarece $f(0-) = f(0+) = f(0) = 0$, rezultă că f este continuă și în 0, deci pe $\mathbf{R}$. Atunci f are primitive (T.8.1.7.). Cf. P.8.1.11.Cor.2 $(\exists)\ C_1, C_2 \in \mathbf{R}$ a.î. funcția

$$F(x) = \begin{cases} e^x + C_1, & x \in \mathbf{R}_+^* \\ x + \dfrac{1}{2}x^2 + C_2, & x \in \mathbf{R}_-^* \end{cases}$$

este o primitivă a lui f. Evident avem: $F(0+) = \lim\limits_{x \searrow 0}(e^x + C_1) = 1 + C_1$ $F(0-) = \lim\limits_{x \nearrow 0}\left(x + \dfrac{1}{2}x^2 + C_2\right) = C_2$, deci $F(0+) = F(0-) \Leftrightarrow 1 + C_1 = C_2$, deci luăm C_1 arbitrar și $C_2 = 1 + C_1$.

Exemplul 2. *Să se calculeze* $\int \left|\dfrac{1}{2} - \sin x\right| dx$, $x \in [0, 2\pi]$.

Evident avem:

$$f(x) := \left|\frac{1}{2} - \sin x\right| = \begin{cases} \dfrac{1}{2} - \sin x, & x \in \left[0, \dfrac{\pi}{6}\right) \\ \sin x - \dfrac{1}{2}, & x \in \left[\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{5\pi}{6}\right] \\ \dfrac{1}{2} - \sin x, & x \in \left(\dfrac{5\pi}{6}, 2\pi\right] \end{cases}$$

Atunci (P.8.1.11.Cor.2) $(\exists)\ C_1, C_2, C_3 \in \mathbf{R}$ a.î. funcția

$$F(x) := \begin{cases} \dfrac{x}{2} + \cos x + C_1, & x \in \left[0, \dfrac{\pi}{6}\right) \\ -\cos x - \dfrac{x}{2} + C_2, & x \in \left[\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{5\pi}{6}\right] \\ \dfrac{x}{2} + \cos x + C_3, & x \in \left(\dfrac{5\pi}{6}, \dfrac{2}{\pi}\right] \end{cases}$$

este o primitivă a lui f. Evident avem $F\left(\frac{\pi}{6}-\right)=\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{2}+C_1, F\left(\frac{\pi}{6}+\right)=$
$=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{2}+C_2, F\left(\frac{5\pi}{6}-\right)=-\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\frac{5\pi}{12}+C_2, F\left(\frac{5\pi}{6}+\right)=$
$=\frac{5\pi}{12}-\frac{\sqrt{3}}{2}+C_3$. Atunci condițiile $F\left(\frac{\pi}{6}-\right)=F\left(\frac{\pi}{6}+\right), F\left(\frac{5\pi}{6}-\right)=\left(\frac{5\pi}{6}+\right)$ se transcriu :

$$\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{2}+C_1=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{2}+C_2$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{5\pi}{12}+C_2=\frac{5\pi}{12}-\frac{\sqrt{3}}{2}+C_3,$$

din care obținem $C_2=\frac{\pi}{12}+\sqrt{3}+C_1$ și $C_3=-\frac{\pi}{4}+2\sqrt{3}+C_1$.

Exemplul 3. *Să se calculeze* $\int\sqrt{|1-x^2|}\,dx$, $x\in\mathbf{R}$.

Fie $f(x):=\sqrt{|1-x^2|}$, $x\in\mathbf{R}$; evident f este continuă, deci admite primitive. Deoarece $f(x)=\sqrt{1-x^2}$, dacă $|x|\leqslant 1$ și $f(x)=\sqrt{x^2-1}$, dacă $|x|>1$, iar primitivele ultimelor funcții sînt cunoscute, rezultă (P.8.1.11. Cor.2) că $(\exists)$ $C_1, C_2, C_3\in\mathbf{R}$ a.î. funcția

$$F(x)=\begin{cases}\frac{x}{2}\sqrt{x^2-1}-\frac{1}{2}\ln|x+\sqrt{x^2-1}|+C_1, & x<-1\\ \frac{x}{2}\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{2}\arcsin x+C_2, & -1\leqslant x\leqslant 1\\ \frac{x}{2}\sqrt{x^2-1}-\frac{1}{2}\ln|x+\sqrt{x^2-1}|+C_3, & x>1,\end{cases}$$

este o primitivă a lui f. Determinăm două din constantele C_1, C_2, C_3 în funcție de a treia, din condițiile : $F(-1-)=F(-1+), F(1-)=F(1+)$. Cum avem : $F(-1-)=C_1, F(-1+)=\frac{1}{2}\left(-\frac{\pi}{2}\right)+C_2, F(1-)=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}+C_2$ și $F(1+)=$
$=C_3$, rezultă că $C_1=-\frac{\pi}{4}+C_2, \frac{\pi}{4}+C_2=C_3$, prin urmare $C_2=\frac{\pi}{4}+C_1$, $C_3=\frac{\pi}{2}+C_1$. Înlocuim mai departe în expresia lui F pe C_2, C_3 astfel obținuți.

8.2. Metode de calcul al primitivelor

Metodele cele mai frecvent utilizate pentru calculul primitivelor (antiderivatelor) sînt : *antiderivarea prin părți* și *schimbarea de variabilă*. Ambele metode sînt extrem de eficiente în practică, însă aplicarea lor, mai ales schimbarea de variabilă, este adeseori destul de dificilă.

8.2.1. Propoziție. *Fie $I \subseteq \mathbf{R}$ un interval, $\lambda \in \mathbf{R}$ un număr și $f, g : I \to \mathbf{R}$ două funcții care admit primitive. Atunci $f \pm g$ și λf admit primitive și avem :*

$$\int (f \pm g) = \int f \pm \int g + C, \quad \int (\lambda f) = \lambda \int f + C$$

Dem. Fie $F := \int f$ și $G := \int g$, deci $F, G : I \to \mathbf{R}$ sînt derivabile și avem $F' = f$, $G' = g$. Atunci $(F + G)' = f + g$, deci $f + g$ are primitive și $F + G$ este o primitivă a sa. Atunci (P.8.1.2.) $(\exists)\ C \in \mathbf{R}$ a.î. $\int (f + g) = F + G + C$, deci

$$\int (f + g) = \int f + \int g + C$$

Analog se arată și a doua relație.

Observație. Să subliniem sensul corect al relației demonstrate. Dacă H este o primitivă a lui $f + g$ și F (resp. G) o primitivă a lui f (resp. g), atunci $(\exists)\ C \in \mathbf{R}$ a.î. $H = F + G + C$. Cu alte cuvinte $\int (f + g)$ este egală cu $\int f + \int g$, abstracție făcînd de o constantă aditivă. Relația demonstrată poate fi enunțată mai simplu astfel : *Dacă F este o primitivă a lui f și G este o primitivă a lui g, atunci $F + G$ este o primitivă a lui $f + g$.* Comentarii similare pot fi făcute și în legătură cu P.8.2.2.

8.2.2. Propoziție (Formula de antiderivare prin părți). *Fie $I \subseteq \mathbf{R}$ un interval și $f, g : I \to \mathbf{R}$ două funcții de clasă $\mathcal{C}^1$. Atunci avem relația :* $\int fg' = fg - \int gf' + C$.

Dem. Funcțiile f și g fiind de clasă $\mathcal{C}^1$, rezultă că fg este de clasă $\mathcal{C}^1$ și avem $(fg)' = f'g + fg'$, deci $fg' = (fg)' - f'g$. Funcțiile $(fg)'$ și $f'g$ fiind continue, ele au primitive, deci (P.8.2.1.) $(\exists)\ C_1 \in \mathbf{R}$ a.î.

$$\int fg' = \int ((fg)' - f'g) = \int (fg)' - \int f'g + C_1$$

Cum fg este o primitivă a lui $(fg)'$, rezultă (P.8.1.2.) că $(\exists)\ C_2 \in \mathbf{R}$ a.î. $\int (fg)' = fg + C_2$, deci $\int fg' = fg - \int f'g + C$

Observația 1. Relația demonstrată, numită *Formula de antiderivare prin părți*, poate fi transcrisă astfel :

$$\int f(x)\, g'(x)\, \mathrm{d}x = (fg)(x) - \int g(x)\, f'(x)\, \mathrm{d}x + C,$$

subînțelegînd x din I. Notînd expresia formală $g'(x)\,\mathrm{d}x$ (resp. $f'(x)\,\mathrm{d}x$) prin $\mathrm{d}g(x)$ (resp. $\mathrm{d}f(x)$) i.e. diferențiala lui g (resp. f) în punctul curent x, putem scrie :

$$\int f(x)\, \mathrm{d}g(x) = (fg)(x) - \int g(x)\, \mathrm{d}f(x) + C$$

sau, dacă omitem variabila independentă x, obținem:

$$\int f\,dg = fg - \int g\,df + C.$$

Utilizînd notațiile curente, u în loc de f și v în loc g, avem:

$$\boxed{\int u\,dv = uv + \int v\,du + C}$$

Observația 2. În mod practic, formula de antiderivare prin părți se aplică astfel. Avem de calculat $\int f(x)\,dx$ i.e. o primitivă a lui f; se pune f sub forma $f(x) = u(x)\,v'(x)$, unde u, $v' : I \to \mathbb{R}$ *sînt cunoscute și se impun în mod natural din context*, analizînd atent expresia lui $f(x)$; se calculează apoi v prin antiderivare: $v(x) = \int v'(x)\,dx$, $x \in I$; în fine se calculează $u'(x)$, apoi se utilizează relația demonstrată:

$$\int f(x)\,dx = \int \underbrace{u(x)}_{u}\,\underbrace{v'(x)\,dx}_{dv} = u(x)\,v(x) - \int v(x)\,u'(x)\,dx + C.$$

Evident formula se aplică, în general, în cazul în care primitiva $\int v(x)\,u'(x)\,dx$ este mai ușor de calculat decît primitiva inițială $\int f(x)\,dx$, iar calculul primitivei $\int v'(x)\,dx$ și al derivatei $u'(x)$ este deasemenea simplu. Este clar, formula poate fi repetată, de data aceasta pentru calculul primitivei $\int v(x)u'(x)\,dx$ etc

8.2.3. Propoziție (Formula de antiderivare prin părți generalizată). *Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval și $f, g : I \to \mathbf{R}$ două funcții de clasă $\mathcal{C}^n$. Atunci are loc relația:*

$$\int fg^{(n)}\,dx = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k f^{(k)} g^{(n-k-1)} + (-1)^n \int gf^{(n)}\,dx + C$$

Dem. Utilizînd de n ori formula de antiderivare prin părți (8.2.2), obținem:

$$\int \underbrace{f}_{u}\underbrace{g^{(n)}\,dx}_{dv} = f \cdot g^{(n-1)} - \int g^{n-1} \cdot f'\,dx$$

$$\int \underbrace{f'}_{u} \cdot \underbrace{g^{(n-1)}\,dx}_{dv} = f' \cdot g^{(n-2)} - \int g^{(n-2)} f''\,dx$$

. . . . . .

$$\int \underbrace{f^{(n-1)}}_{u}\,\underbrace{g'\,dx}_{dv} = f^{(n-1)} \cdot g - \int g f^{(n)}\,dx.$$

Înmulțind prima relație cu 1, a doua cu -1, etc. și adunîndu-le apoi, se obține relația

$$\int fg^{(n)}\,dx = fg^{(n-1)} - f'g^{(n-2)} + \ldots + (-1)^{n-1} f^{(n-1)} g + (-1)^n \int gf^{(n)}\,dx$$

Exemplu 1. *Să se calculeze primitiva* $\int x \cos x\,dx$

$$\int \underbrace{x}_{u} \underbrace{\cos x\,dx}_{dv} = \underbrace{x}_{u} \underbrace{\sin x}_{v} - \int \underbrace{\sin x}_{v} \underbrace{dx}_{du} + C =$$

$$= x \sin x + \cos x + C,\ (\forall)\ x \in \mathbf{R}$$

Exemplul 2. *Să se calculeze primitiva* $\int x e^x\,dx$

$$\int \underbrace{x}_{u} \underbrace{e^x\,dx}_{dv} = \underbrace{x}_{u} \underbrace{e^x}_{v} - \int \underbrace{e^x}_{v} \underbrace{dx}_{du} + C = x e^x - e^x + C,\ (\forall)\ x \in \mathbf{R}.$$

Evident, putem aplica formula și altfel:

$$\int \underbrace{e^x}_{u} \underbrace{x\,dx}_{dv} = \underbrace{e^x}_{u} \cdot \underbrace{\frac{1}{2}x^2}_{v} - \int \underbrace{\frac{1}{2}x^2}_{v} \underbrace{e^x\,dx}_{du} + C,\ (\forall)\ x \in \mathbf{R},$$

dar de data aceasta primitiva a doua este mai complicată decît cea inițială.

Exemplul 3. *Să se calculeze primitiva* $\int \sqrt{x^2 + a^2}\,dx\ (a \neq 0)$

$$F(x) = \int \underbrace{\sqrt{x^2 + a^2}}_{u} \underbrace{dx}_{dv} = x\sqrt{x^2 + a^2} - \int x \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + a^2}}\,dx + C =$$

$$= x\sqrt{x^2 + a^2} - \left(\int \frac{x^2 + a^2}{\sqrt{x^2 + a^2}}\,dx - a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}}\right) + C =$$

$$= x\sqrt{x^2 + a^2} - \int \sqrt{x^2 + a^2}\,dx + a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} + C,$$

deci

$$F(x) = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} + C.$$

Prin calcul direct se verifică însă relația

$$(\ln (x + \sqrt{x^2 + a^2}))' = \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}},\ (\forall)\ x \in \mathbf{R},$$

prin urmare

$$F(x) = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{2} \ln\ (x + \sqrt{x^2 + a^2}) + C,\ (\forall)\ x \in \mathbf{R}.$$

8.2.4. Teoremă (Schimbarea de variabilă). *Fie* $I \subseteq \mathbf{R}$ *un interval şi* $f : I \to \mathbf{R}$ *o funcţie care admite primitive. Atunci* $(\forall)\ J \subseteq \mathbf{R}$ *un interval şi* $\varphi : J \to I$ *o funcţie derivabilă, rezultă că funcţia* $(f \circ \varphi) \cdot \varphi'$ *admite primitive şi avem relaţia :*

$$\left(\int (f \circ \varphi) \cdot \varphi'\right)(t) = \left(\int f\right)(\varphi(t)) + C,\ (\forall)\ t \in J$$

Dem. Fie $F := \int f$ i.e. $F : I \to \mathbf{R}$ este derivabilă şi $F' = f$. Funcţiile $\varphi : J \to I$ şi $F : I \to \mathbf{R}$ fiind derivabile, rezultă că funcţia $F \circ \varphi : J \to \mathbf{R}$ este derivabilă şi avem :

$$(F \circ \varphi)'(t) = F'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = (f \circ \varphi)(t) \cdot \varphi'(t),\ (\forall)\ t \in J,$$

deci $(F \circ \varphi)' = (f \circ \varphi) \cdot \varphi'$ şi deci $F \circ \varphi$ este o primitivă a funcţiei $(f \circ \varphi) \cdot \varphi'$, prin urmare (P.8.1.2.) $(\exists)\ c \in \mathbf{R}$ a.î.

$$\left(\int (f \circ \varphi) \cdot \varphi'\right)(t) = (F \circ \varphi)(t) + C = F(\varphi(t)) + C = \left(\int f\right)(\varphi(t)) + C$$

Observaţia 1. Relaţia demonstrată poate fi scrisă astfel

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \left(\int f\right)(\varphi(t)) + C,\ (\forall)\ t \in J$$

sau sub forma concentrată $\int (f \circ \varphi) \cdot \varphi' = \left(\int f\right) \circ \varphi + C.$

În practică ea se utilizează sub forma :

$$\boxed{\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int f(x)\,\mathrm{d}x|_{x=\varphi(t)} + C,\ (\forall) t \in J} \qquad (\mathrm{F}_1)$$

Ea poartă numele de *Prima formulă* (*Formula* 1) în schimbarea de variabilă în antiderivare.

Notînd ca şi în *Formula de antiderivare prin părţi* expresia formală $\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$ prin $\mathrm{d}\varphi(t)$, putem scrie :

$$\int f(\varphi(t))\,\mathrm{d}\varphi(t) = \left(\int f\right)(\varphi(t)) + C,\ (\forall)\ t \in J \text{ etc.}$$

Corolar 1. *Fie* $I \subseteq \mathbf{R}$ *un interval şi* $f : I \to \mathbf{R}$ *o funcţie care admite primitive. Atunci* $(\forall)\ J \subseteq \mathbf{R}$ *un interval şi* $\varphi : J \to I$ *o funcţie bijectivă şi derivabilă, rezultă că funcţia* $(f \circ \varphi) \cdot \varphi'$ *admite primitive şi avem relaţia :*

$$\left(\int (f \circ \varphi) \cdot \varphi'\right)(\varphi^{-1}(x)) = \left(\int f\right)(x) + C,\ (\forall)\ x \in I$$

Dem. Din T.8.2.4. rezultă că $(f \circ \varphi) \cdot \varphi'$ admite primitive şi avem :

$$\left(\int (f \circ \varphi)\varphi'\right)(t) = \left(\int f\right)(\varphi(t)) + C,\ (\forall)\ t \in J$$

Funcția φ fiind bijectivă, putem scrie $\varphi^{-1}(x)$ în loc de t cu $x \in I$; obținem

$$\left(\int (f \circ \varphi)\cdot\varphi'\right)(\varphi^{-1}(x)) = \left(\int f\right)(x) + C, \ (\forall)\ x \in I$$

Observația 1. Relația demonstrată poate fi scrisă astfel:

$$\int f(x)\,dx = \left(\int (f \circ \varphi)\cdot\varphi'\right)(\varphi^{-1}(x)) + C, \ (\forall)\ x \in J$$

sau sub formă concentrată $\int f = \left(\int (f \circ \varphi)\cdot\varphi'\right) \circ \varphi^{-1} + C$. În practică ea se utilizează sub forma:

$$\boxed{\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt|_{t=\varphi^{-1}(x)} + C, \ (\forall)\ x \in I} \quad (F_1')$$

Ea este o variantă a *Formulei* 1, cînd funcția φ este *bijectivă* și derivabilă.

Corolar 2. *Fie* $I \subseteq \mathbf{R}$ *un interval și* $f: I \to \mathbf{R}$ *o funcție continuă. Atunci* $(\forall)$ $J \subseteq \mathbf{R}$ *un interval și* $\varphi: J \to I$ *o funcție bijectivă cu inversa derivabilă, în particular* φ *difeomorfism, avem relația:*

$$\left(\int (f \circ \varphi)\right)(t) = \left(\int f\cdot(\varphi^{-1})'\right)(\varphi(t)), \ (\forall)\ t \in J$$

Dem. Funcția φ fiind bijectivă cu φ^{-1} derivabilă, rezultă φ^{-1} continuă, deci (T.5.5.19. Cor. 2) φ este omeomorfă. Atunci funcția $f \circ \varphi: J \to \mathbf{R}$ este continuă, deci (T.8.1.7.) admite primitive iar funcția $\varphi^{-1}: I \to J$ este derivabilă și deci (T.8.2.4.) avem:

$$\int ((f \circ \varphi) \circ \varphi^{-1})\cdot(\varphi^{-1})' = \left(\int f \circ \varphi\right) \circ \varphi^{-1} + C$$

sau

$$\left(\int f\cdot(\varphi^{-1})'\right)(x) = \left(\int f \circ \varphi\right)(\varphi^{-1}(x)) + C, \ (\forall)\ x \in I.$$

Punînd în locul lui x pe $\varphi(t)$ cu $t \in J$, obținem:

$$\left(\int f\cdot(\varphi^{-1})'\right)(\varphi(t)) = \left(\int f \circ \varphi\right)(t) + C, \ (\forall)\ t \in J$$

Observația 1. Relația demonstrată poate fi scrisă astfel:

$$\int f(\varphi(t))\,dt = \left(\int f\cdot(\varphi^{-1})'\right)(\varphi(t)) + C, \ (\forall)\ t \in J$$

sau sub forma concentrată $\int f \circ \varphi = \left(\int f\cdot(\varphi^{-1})'\right) \circ \varphi + C$.

În practică ea se utilizează sub forma:

$$\boxed{\int f(\varphi(t\ \ dt = \int f(x)(\varphi^{-1})'(x)\,dx|_{x=\varphi(t)} + C, \ (\forall)\ t \in I} \quad (F_2)$$

Ea poartă numele de *A doua formulă* (Formula 2) de *schimbare de variabilă în antiderivare.*

Cu convenţiile făcute mai sus, primitiva $\int f(\varphi^{-1})'$ i.e. primitiva

$\int f(x)\,(\varphi^{-1})'(x)\,dx$, poate fi scrisă astfel $\int f(x)\,d\varphi^{-1}(x)$.

Observaţia 2. Calculul antiderivatelor cu ajutorul schimbării de variabilă se realizează practic astfel:

Varianta 1. Avem de calculat $\boxed{\int g(t)\,dt,\ t\in J}$

Punem în evidenţă în expresia lui g o funcţie reală $\varphi(t)$ *definită* pe J, mai precis determinăm o funcţie *derivabilă* $\varphi: J\to\mathbf{R}$ a.î. $g(t)=f(\varphi(t))\varphi'(t)$, $(\forall)$ $t\in J$, unde $f:\varphi(J)\to\mathbf{R}$; punem $I:=\varphi(J)$. Aplicăm formula (F_1), deci facem înlocuirile formale: $\boxed{\varphi(t)}\leftrightarrow\boxed{x}$, $\boxed{\varphi'(t)\,dt}\leftrightarrow\boxed{dx}$ şi obţinem primitiva $\boxed{\int f(x)\,dx,\ x\in I}$. Calculăm ultima primitivă şi apoi revenim la vechea variabilă t, punînd $x=\varphi(t)$, $t\in J$.

Varianta 2. Avem de calculat $\boxed{\int f(x)\,dx,\ x\in I}$.

Considerăm o funcţie reală $\varphi(t)$ *cu valori* în I, mai precis, determinăm un interval $J\subseteq\mathbf{R}$ şi $\varphi: J\to I$ o funcţie *derivabilă bijectivă*. Aplicăm formula (F_1') deci facem înlocuirile formale $\boxed{x}\leftrightarrow\boxed{\varphi(t)}$, $\boxed{dx}\leftrightarrow\boxed{\varphi'(t)\,dt}$ şi obţinem primitiva $\boxed{\int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt,\ t\in J}$. Calculăm ultima primitivă şi apoi revenim la vechea variabilă x, punînd $t=\varphi^{-1}(x)$, $x\in I$.

Varianta 3. Avem de calculat $\int g(t)\,dt,\ t\in J$

Punem în evidenţă în expresia lui g o funcţie reală $\varphi(t)$ *definită* pe J, mai precis determinăm o funcţie *injectivă* $\varphi: J\to\mathbf{R}$ cu $\varphi^{-1}:\varphi(J)\to J$ derivabilă a.î. $g(t)=f(\varphi(t))$, $(\forall)$ $t\in J$, unde $f:\varphi(J)\to\mathbf{R}$; punem $I:=\varphi(J)$. Aplicăm formula (F_2), deci facem înlocuirile formale $\boxed{\varphi(t)}\leftrightarrow\boxed{x}$, $\boxed{dt}\leftrightarrow\boxed{(\varphi^{-1})'(x)\,dx}$ şi obţinem primitiva $\boxed{\int f(x)\,(\varphi^{-1})'(x)\,dx,\ x\in I}$. Calculăm ultima primitivă şi apoi revenim la vechea variabilă t, punînd $x=\varphi(t)$, $t\in J$.

În toate cele trei variante expresia lui $\boxed{\varphi}$ se impune din context, analizînd atent expresia funcţiei de antiderivat. A doua funcţie $\boxed{f}$ care apare în aplicarea formulei (F_1) şi formulei (F_2), nu se scrie practic *în formă explicită.*

Observația 3. Dacă funcția $\varphi : J \to I$ este un difeomorfism, atunci toate cele trei formule sînt aplicabile. Mai mult, deoarece funcția de antiderivat $(f \circ \varphi) \cdot \varphi'$ (resp. $f \cdot \varphi$) din formula (F_1) (resp. (F_2)) este în practică continuă, rezultă că și f este continuă, deoarece putem scrie $f = \frac{(f \circ \varphi) \cdot \varphi'}{\varphi'} \circ \varphi^{-1}$ (resp. $f = (f \circ \varphi) \circ \varphi^{-1}$). Așadar nu este necesar să ne preocupăm de proprietățile lui f.

Denumirile de *Prima formulă* și *A doua formulă* sînt pur convenționale. În realitate nu avem decît o *singură* formulă de schimbare de variabilă și mai multe variante de aplicare ale ei, care depind de expresia particulară a funcției de antiderivat și de experiența celui care aplică formula.

Exemplul 1. *Să se calculeze* $F(t) = \int \frac{t\,dt}{1 + t^2}$, $t \in \mathbf{R}$

Evident putem scrie $F(t) = \int \frac{(1 + t^2)'\,dt}{2(1 + t^2)}$, $(\forall)\ t \in \mathbf{R}$.

Facem substituția $x = \varphi(t) = 1 + t^2$, $t \in \mathbf{R}$; evident φ derivabilă și $I := \varphi(\mathbf{R}) = (1, \infty)$. Aplicînd formula (F_1) avem :

$$F(t) = \int \frac{dx}{2x}\Big|_{x=1+t^2} + C = \frac{1}{2} \ln x \Big|_{x=1+t^2} + C =$$

$$= \frac{1}{2} \ln (1 + t^2) + C,\ (\forall)\ t \in \mathbf{R}$$

Exemplul 2. *Să se calculeze* : $F(t) = \int \frac{dt}{\sin t}$, $t \in \mathbf{R} \setminus \pi\mathbf{Z}$.

Fie J un interval maximal inclus în mulțimea $\mathbf{R} \setminus \pi\ \mathbf{Z}$, spre exemplu $J = (0, \pi)$. Deoarece $\sin t = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{t}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{t}{2}}$, $(\forall)\ t \in \mathbf{R} \setminus \pi\mathbf{Z}$, putem scrie

$$\frac{1}{\sin t} = \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{t}{2}}{2 \operatorname{tg} \frac{t}{2}} = \frac{\left(\operatorname{tg} \frac{t}{2}\right)'}{\operatorname{tg} \frac{t}{2}},\ (\forall)\ t \in J$$

Facem substituția $x = \varphi(t) = \operatorname{tg} \frac{t}{2}$, $t \in J$; evident φ derivabilă și $I := \varphi(J) = \mathbf{R}_+^*$. Aplicînd formula (F_1) avem :

$$F(t) = \int \frac{dx}{x}\Big|_{x=\operatorname{tg} \frac{t}{2}} + C = \ln \operatorname{tg} \frac{t}{2} + C,\ (\forall)\ t \in (0, \pi)$$

Dacă luăm $J = (\pi, 2\pi)$, atunci $\varphi(J) = \mathbf{R}_-^*$, deci

$$F(t) = \int \frac{dx}{x}\Big|_{x=\operatorname{tg} \frac{t}{2}} + C = \ln (-x)\Big|_{x=\operatorname{tg} \frac{t}{2}} + C,\ (\forall)\ t \in (\pi, 2\pi)$$

Prin urmare rezultă :

$$\int \frac{\mathrm{d}t}{\sin t} = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{t}{2} \right| + C_k, \quad (\forall)\ t \in (k\pi,\ (k+1)\pi),$$

unde constanta C_k depinde de k din $\mathbf{Z}$.

Exemplul 3. *Să se calculeze* $\int \sqrt{a^2 - x^2}\, \mathrm{d}x,\ x \in (-a,\ a)\ (a > 0)$

Facem substituția $x = \varphi(t) = a \sin t,\ t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Evident φ este derivabilă și aplică bijectiv $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ pe $(a-,\ a)$. Atunci utilizînd formula (F'_1) avem :

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, \mathrm{d}x = a^2 \int \sqrt{1 - \sin^2 t} \cos \mathrm{d}t \Big|_{t = \arcsin \frac{x}{a}} + C =$$

$$= a^2 \int \cos^2 t\, \mathrm{d}t \Big|_{t = \arcsin \frac{x}{a}} + C = \frac{a^2}{2} \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_{t = \arcsin \frac{x}{a}} + C =$$

$$= \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{a^2}{2} \sin t \cos t \Big|_{t = \arcsin \frac{x}{a}} + C =$$

$$= \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + C.$$

Exemplul 4. *Să se calculeze* $F(x) = \int \sqrt{a^2 + x^2}\, \mathrm{d}x,\ x \in \mathbf{R}$.

Facem substituția $x = \varphi(t) = a \operatorname{sh} t,\ t \in \mathbf{R}$. Evident φ este bijectivă și derivabilă de la $\mathbf{R}$ la $\mathbf{R}$. Cum $\varphi'(t) = a \operatorname{ch} t,\ (\forall)\ t \in \mathbf{R}$, avem (cf. formulei (F'_1) :

$$F(x) = \int \sqrt{a^2 + a^2 \operatorname{sh}^2 t} \cdot a \operatorname{ch} t\, \mathrm{d}t \Big|_{t = \varphi^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)} + C =$$

$$= a^2 \int \operatorname{ch}^2 t \mathrm{d}t \Big|_{t = \varphi^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)} + C = a^2 \int \frac{\operatorname{ch} 2t + 1}{2}\, \mathrm{d}t \Big|_{t = \varphi^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)} + C =$$

$$= \frac{a^2}{2} \left(\frac{1}{2} \operatorname{sh} 2t + t \right) \Big|_{t = \varphi^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)} + C = \frac{a^2}{2} \left(\operatorname{sh} t \cdot \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 t} + t \right) \Big|_{t = \varphi^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)} + C$$

Ținînd seama că $\operatorname{sh}^{-1} x = \ln (x + \sqrt{x^2 + 1})$, $(\forall) x \in \mathbf{R}$, rezultă :

$$F(x) = \frac{a^2}{2} \cdot \frac{x}{a} \sqrt{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2} + \frac{a^2}{2} \ln \left(\frac{x}{a} + \sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 + 1} \right) + C =$$

$$= \frac{x}{2} \sqrt{a^2 + x^2} + \frac{a^2}{2} \ln (x + \sqrt{a^2 + x^2}) + C,\ (\forall)\ x \in \mathbf{R}.$$

Exemplul 5. *Să se calculeze* $F(t) = \int \frac{1 - \operatorname{tg} t}{1 + \operatorname{tg} t}\, \mathrm{d}t,\ t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Facem substituția $x = \varphi(t) = \operatorname{tg} t,\ t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Evident φ injectivă, $\mathrm{I} :=$

$= \varphi\left(\left(0, \frac{\pi}{2}\right)\right) = \mathbf{R}_+^*$ și $\varphi^{-1} : \mathbf{R}_+^* \to \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ este derivabilă. Cum

$$(\varphi^{-1})'(x) = (\operatorname{arc tg} x)' = \frac{1}{1 + x^2},\ (\forall)\ x \in \mathbf{R}_+,$$

aplicînd formula (F_2) obținem:

$$F(t) = \int \frac{1-x}{1+x}\frac{1}{1+x^2}\,dx\Big|_{x=\operatorname{tg} t} + C =$$

$$= \int \left(\frac{1}{1+x} - \frac{x}{1+x^2}\right) dx\Big|_{x=\operatorname{tg} t} + C = \ln(1+x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big|_{x=\operatorname{tg} t} + C =$$

$$= \ln(1+\operatorname{tg} t) - \frac{1}{2}\ln(1+\operatorname{tg}^2 t) + C = \ln\frac{1+\operatorname{tg} t}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 t}} + C$$

Observație. Fie $I \subseteq \mathbf{R}$ un interval și $f: I \to \mathbf{R}$ o funcție care admite primitive, spre exemplu f continuă. Pentru a calcula $\int f(x)\,dx$, $x \in I$, adeseori încercăm să punem f sub o formă adecvată utilizării unei schimbări de variabilă. În acest scop se folosesc unele identități cum ar fi $\sin x = \dfrac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$, $\dfrac{1+x^2}{1+x^4} = \dfrac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}$ etc., care nu sînt valabile pentru orice x real. Funcția f „transformată", să o notăm cu f_0, nu este definită în unul sau mai multe puncte din I, deci $\int f$ nu coincide cu $\int f_0$.

Dacă, spre exemplu, f_0 nu este definită într-un singur punct $x_0 \in I$ atunci (cf. P.8.1.11.Cor. 2) o primitivă F a lui f se obține astfel:

$$F(x) = \begin{cases} \int f_0(x)\,dx + C_1, & x \in I,\ x < x_0 \\ \int f_0(x)\,dx + C_2, & x \in I,\ x > x_0, \end{cases}$$

determinăm apoi C_1 în funcție de C_2 sau invers, prin condiția $F(x_0-) = F(x_0+)$ și punem $F(x_0) := F(x_0-) = F(x_0+)$.

Dacă f_0 nu este definită în exact n puncte $x_1, x_2, \ldots, x_n$ din I, atunci avem n constante $C_1, C_2, \ldots, C_n$ și determinăm în mod analog pe $n-1$ dintre ele în funcție de una etc.

Prin urmare, dacă nu putem face schimbarea de variabilă în calculul primitivei $\int f(x)\,dx$, $x \in I$, determinăm o partiție finită $(J_k)_{k=\overline{1,n}}$ (resp. numerabilă $(J_n)_{n\geq 1}$) a lui I, formată cu intervale a.î. pe fiecare J_k putem face schimbarea de variabilă; calculăm apoi primitiva lui f pe fiecare J_k și în fine „lipim" primitivele obținute în punctele de contact ale intervalelor partiției.

Exemplul 1. *Să se calculeze*: $\int \frac{1+t^2}{1+t^4}\,dt$, $t \in \mathbf{R}$.

Fie $f(t)=\dfrac{1+t^2}{1+t^4}$, $t\in\mathbf{R}$; deoarece f este continuă, ea admite primitive, fie F o primitivă a lui f. Evident putem scrie:

$$f(t)=\frac{1+\dfrac{1}{t^2}}{t^2+\dfrac{1}{t^2}}=\frac{\left(t-\dfrac{1}{t}\right)'}{\left(t-\dfrac{1}{t}\right)^2+2},\quad (\forall)\ t\in\mathbf{R}$$

Fie $f_0=f|_{\mathbf{R}_+^*}$ și $x=\varphi(t)=t-\dfrac{1}{t}$, $t\in\mathbf{R}_+^*$. Atunci $(\forall)\ t\in\mathbf{R}_+^*$ avem:

$$F(t)=\int f_0(t)\,\mathrm{d}t=\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+2}\bigg|_{x=\varphi(t)}+C_1=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{\sqrt{2}}\bigg|_{x=\varphi(t)}+C_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{t^2-1}{t\sqrt{2}}+C_1$$

Așadar am obținut expresia lui $F(t)$ pentru $t\in\mathbf{R}_+^*$. Un raționament analog arată că $F(t)$ pentru $t\in\mathbf{R}_-^*$ are aceeași expresie, în care C_1 este înlocuit cu C_2. Deoarece avem $F(0+)=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot\dfrac{\pi}{2}+C_1$ și $F(0-)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot\dfrac{\pi}{2}+C_2$, condiția $F(0-)=F(0+)$ se scrie $\dfrac{\pi}{2\sqrt{2}}+C_2=-\dfrac{\pi}{2\sqrt{2}}+C_1$, deci $C_2=-\dfrac{\pi}{\sqrt{2}}+C_1$.

Prin urmare o primitivă F a lui f are expresia

$$F(t)=C+\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}\dfrac{t^2-1}{t\sqrt{2}}, & t\in\mathbf{R}_+^*\\[2ex] -\dfrac{\pi}{2\sqrt{2}}, & t=0\\[2ex] \dfrac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}\dfrac{t^2-1}{t\sqrt{2}}-\dfrac{\pi}{\sqrt{2}}, & t\in\mathbf{R}_-^*\end{cases}$$

Exemplul 2. *Să se calculeze* $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}t}{3+\cos t}$, $t\in\mathbf{R}$.

Fie $f(t)=\dfrac{1}{2+\cos t}$, $t\in\mathbf{R}$; evident f este continuă, deci admite primitive, fie F o primitivă a lui f. Deoarece avem:

$$\cos t=\frac{1-\operatorname{tg}^2\dfrac{t}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\dfrac{t}{2}}\ \text{și}\ \left(\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right)'=\frac{1}{2}\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{t}{2}\right),\ (\forall)\ t\in\mathbf{R}\setminus\pi\mathbf{Z},$$

rezultă

$$f(t)=\frac{1+\operatorname{tg}^2\dfrac{t}{2}}{3+\operatorname{tg}^2\dfrac{t}{2}}=\frac{2\left(\operatorname{tg}\dfrac{t}{2}\right)'}{3+\operatorname{tg}^2\dfrac{t}{2}},\quad (\forall)\ t\in\mathbf{R}\setminus\pi\mathbf{Z}$$

Fie $f_0 = f|_{(-\pi,\pi)}$ și $x = \varphi(t) = \operatorname{tg}\frac{t}{2}$, $t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Atunci $(\forall)\ t \in (-\pi, \pi)$ avem :

$$F(t) = \int f_0(t)\,\mathrm{d}t = \int \frac{2\,\mathrm{d}x}{3 + x^2}\Big|_{x=\operatorname{tg}\frac{t}{2}} + C_0 =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{\sqrt{3}}\Big|_{x=\operatorname{tg}\frac{t}{2}} + C_0 = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{tg}\frac{t}{2}\right) + C_0$$

Așadar am obținut expresia lui $F(t)$ pentru $t \in (-\pi, \pi)$. Analog $F(t)$ pentru $t \in (\pi, 3\pi)$ are aceeași expresie în care se înlocuiește constanta C_0 cu o constantă C_1. Deoarece $F(\pi-) = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\pi}{2} + C_0$, $F(\pi+) = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(-\frac{\pi}{2}\right) + C_1$, condiția $F(\pi-) = F(\pi+)$ este echivalentă cu condiția $\frac{\pi}{\sqrt{3}} + C_0 = -\frac{\pi}{\sqrt{3}} + C_1$, deci $C_1 = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} + C_0$. Prin urmare o primitivă a lui f pe intervalul $(-\pi, 3\pi)$ are expresia :

$$F(t) = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{tg}\frac{t}{2}\right) + C_0, & t \in (-\pi, \pi) \\ \frac{\pi}{\sqrt{3}} + C_0, & t = \pi \\ \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{tg}\frac{t}{2}\right) + \frac{2\pi}{\sqrt{3}} + C_0, & t \in (\pi, 3\pi) \end{cases}$$

În mod analog se calculează expresia unei primitive a lui f pe intervalul $(-\pi, 5\pi)$ și se continuă mai departe prin inducție.

8.2.5. Tabel de primitive uzuale*)

1° $\int x^\alpha \mathrm{d}x = \begin{cases} \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1}, & (\forall)\alpha \in \mathbf{R}\setminus\{-1\} \\ \ln|x|, & \alpha = -1 \end{cases}$

2° $\begin{cases} \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| = \frac{1}{a} \operatorname{arc\,cth}\frac{x}{a}, & (a \neq 0) \\ \int \frac{\mathrm{d}x}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x+a}{a-x}\right| = \frac{1}{a} \operatorname{arg\,th}\frac{x}{a}, & (a \neq 0) \end{cases}$

3° $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a}, \quad (a \neq 0)$

*) În continuare, pentru a simplifica scrierea, vom omite în cazul primitivei, constanta additivă C. Primitiva dintr-o funcție elementară f, se calculează, de obicei, pe un interval maximal I inclus în mulțimea de definiție D_f a funcției.

4° $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln|x+\sqrt{x^2+a}|, \quad (a \neq 0)$

5° $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{|a|}, \quad (a \neq 0)$

6° $\int a^x dx = \frac{1}{\ln a} a^x, \quad a \in \mathbf{R}_+^* \setminus \{1\}; \int e^x dx = e^x$

7° $\int \sin x \, dx = -\cos x; \int \cos x \, dx = \sin x$

8° $\int \operatorname{tg} x dx = -\ln|\cos x|; \int \operatorname{ctg} x \, dx = \ln|\sin x|$

9° $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|; \int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right|$

10° $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x; \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x$

11° $\int (1+\operatorname{ctg}^2 x)dx = -\operatorname{ctg} x; \int (1+\operatorname{tg}^2 x)dx = \operatorname{tg} x$

12° $\int \sqrt{a^2-x^2}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{|a|}, \quad (a \neq 0)$

13° $\int \sqrt{x^2 \pm a^2}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2} \ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|, \quad (a \neq 0)$

14° $\int \operatorname{sh} x \, dx = \operatorname{ch} x; \int \operatorname{ch} x \, dx = \operatorname{sh} x$

15° $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x; \int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x$

8.3. Calculul primitivelor din funcții raționale

8.3.1. Definiție. Se numește funcție *rațională* de k variabile, cîtul a două polinoame de k variabile, unde $k \geq 1$. Un *polinom în două variabile* u și v, este o funcție $f: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ de forma $f(u, v) = \sum_{i,j} a_{ij} u^i v^j$, unde $a_{ij} \in \mathbf{R}$ și suma se face după toți indicii $i, j \in \mathbf{N}_0^2$, cu $i + j \leq n$ (n = *gradul polinomului*).

8.3.2. Teoremă. *Fie* $\frac{P}{Q}$ *o funcție rațională. Atunci calculul primitivei* $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$ *se reduce la calculul unor primitive de forma* :

1° $\int x^n dx$; 2° $\int \frac{dx}{(x-a)^n}$, $(a \in \mathbf{R}, \ n \in \mathbf{N})$;

3° $\int \frac{px+q}{(ax^2+bx+c)^n} dx$, $(a, b, c, p, q \in \mathbf{R}, \ n \in \mathbf{N}$ *și* $b^2 - 4ac < 0)$

Dem. Am văzut (T.4.9.9.) că $\frac{P}{Q}$ se descompune în mod unic într-un număr finit de fracții simple de forma cx^n; $\frac{c}{(x-a)^n}$, $(a,\ c \in \mathbf{R},\ n \in \mathbf{N})$; $\frac{px+q}{(ax^2+bc+c)^n}$ $(a,\ b,\ c,\ p,\ q \in \mathbf{R},\ n \in \mathbf{N}$ și $b^2-4ac<0)$.

Ținem mai departe seamă de proprietatea de „liniaritate" a primitivei (P.8.2.1.).

Observație. Calculul primitivei $\int \frac{px+q}{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x$, cînd $a \neq 0$ și $b^2-4ac>0$, se poate face și fără a se descompune funcția $\frac{px+q}{ax^2+bc+c}$ în fracții simple, operație relativ greoaie mai ales cînd rădăcinile ecuației $ax^2+bc+c=0$ sînt iraționale. Atunci putem proceda astfel:

$$\int \frac{(px+q)\mathrm{d}x}{ax^2+bc+c} = \frac{p}{2a}\int \frac{(2ax+b)\mathrm{d}x}{ax^2+bx+c} + \left(q-\frac{bp}{2a}\right)\int \frac{\mathrm{d}x}{ax^2+bx+c} =$$

$$= \frac{p}{2a}\ln|ax^2+bx+c| + \frac{1}{a}\left(q-\frac{bp}{2a}\right)\int \frac{\mathrm{d}x}{\left(x^2+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2} =$$

$$= \frac{p}{2a}\ln\ |ax^2+bx+c| + \frac{2aq-bp}{2a^2}\cdot\frac{1}{2\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)}\ln\frac{\left|x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right|}{\left|x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right|},$$

deci

$$\int \frac{(px+q)\,\mathrm{d}x}{ax^2+bx+c} = \frac{p}{2a}\ln|ax^2+bx+c| + \frac{2aq-bp}{2a\sqrt{b^2-4ac}}\ln\frac{|2ax+b-\sqrt{b^2-4ac}|}{|2ax+b+\sqrt{b^2-4ac}|}$$

8.3.3. *Calculul primitivelor de forma:*

$$1^\circ\ \int x^n\,\mathrm{d}x;\quad 2^\circ \int \frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^n}\ (a \in \mathbf{R},\ n \in \mathbf{N});\quad 3^\circ\ \int \frac{(px+q)\,\mathrm{d}x}{(ax^2+bx+c)^n}$$

$(a,\ b,\ c,\ p,\ q \in \mathbf{R},\ n \in \mathbf{N}$ și $b^2-4ac<0)$.

Evident avem:

$$1^\circ \int x^n\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}x^{n+1};\quad 2^\circ\ \int \frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^n} = \begin{cases} \ln\ |x-a|, & n=1 \\ \dfrac{-1}{(n-1)(x-a)^{n-1}}, & n \neq 1 \end{cases}$$

3° Dacă $\alpha \pm i\beta$ sînt rădăcinile ecuației $ax^2+bx+c=0$, atunci $ax^2+bx+c=a[(x-\alpha)^2+\beta^2]$ și evident $a \neq 0$, deoarece $b^2-4ac<0$. Cu substituția $x-\alpha=t$ obținem:

$$\int \frac{px+q}{(ax^2+bx+c)^n}\,\mathrm{d}x = \int \frac{p_1t+q_1}{(t^2+\beta^2)^n} = \frac{p_1}{2}\int \frac{2t\,\mathrm{d}t}{(t^2+\beta^2)^n} + q_1\int \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+\beta^2)^n}.$$

Prima primitivă este de forma $\int \frac{du}{u^n}$, cu $u = t^2 + \beta^2$.

A doua primitivă este de forma $\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n}$ și se calculează prin recurență astfel :

Notăm $F_n = \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n}$. Evident avem $F_1 = \frac{1}{a} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{a}$.

Plecînd de la F_{n-1} și antiderivînd prin părți, avem :

$$F_{n-1} = \int \underbrace{\frac{1}{(x^2 + a^2)^{n-1}}}_{u} \underbrace{dx}_{dv} = \frac{x}{(x^2 + a^2)^{n-1}} - \int x \frac{(1 - n)\, 2x}{(x^2 + a^2)^{n-1}}\, dx =$$

$$= \frac{x}{(x^2 + a^2)^{n-1}} + 2(n - 1) \int \frac{(x^2 + a^2) - a^2}{(x^2 + a^2)^n}\, dx,$$

deci

$$F_{n-1} = \frac{x}{(x^2 + a^2)^{n-1}} + 2(n - 1) F_{n-1} - 2a^2(n - 1) F_n$$

și deci

$$2a^2 (n - 1) F_n = \frac{x}{(x^2 + a^2)^{n-1}} + (2n - 3) F_{n-1}.$$

Prin urmare

$$\boxed{F_n = \frac{1}{a^2(2n - 2)} \cdot \frac{x}{(x^2 + a^2)^{n-1}} + \frac{1}{a^2} \cdot \frac{2n - 3}{2n - 2} F_{n-1}}$$

În particular obținem relațiile :

$$\int \frac{dx}{(x^2 + 1)^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{x^2 + 1} + \frac{1}{2} \operatorname{arc\,tg}\, x,$$

$$\int \frac{dx}{(x^2 + 1)^3} = \frac{1}{4} \frac{x}{(x^2 + 1)^2} + \frac{3}{8} \cdot \frac{x}{x^2 + 1} + \frac{3}{8} \operatorname{arc\,tg}\, x,$$

$$\int \frac{dx}{(x^2 + 1)^4} = \frac{1}{6} \frac{x}{(x^2 + 1)^3} + \frac{5}{24} \cdot \frac{x}{(x^2 + 1)^2} + \frac{15}{48} \frac{x}{x^2 + 1} + \frac{15}{48} \operatorname{arc\,tg}\, x.$$

Exemplul 1. *Să se calculeze primitiva* $F = \int \frac{dx}{x^4 + 1}$.

Deoarece $x^4 + 1 = (x^2 - x\sqrt{2} + 1)(x^2 + x\sqrt{2} + 1)$, avem

$$\frac{1}{x^4 + 1} = \frac{C_1 x + C_2}{x^2 - x\sqrt{2} + 1} + \frac{C_3 x + C_4}{x^2 + x\sqrt{2} + 1}$$

Prin identificare se deduce $C_1 = -C_3 = \frac{-1}{2\sqrt{2}}$, $C_2 = C_4 = \frac{1}{2}$, deci

$$\frac{1}{x^4+1} = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{x-\sqrt{2}}{x^2-x\sqrt{2}+1} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{x+\sqrt{2}}{x^2+x\sqrt{2}+1} =$$

$$= -\frac{1}{4\sqrt{2}} \left(\frac{2x-\sqrt{2}}{x^2-x\sqrt{2}+1} - \frac{\sqrt{2}}{x^2-x\sqrt{2}+1} \right) + \frac{1}{4\sqrt{2}} \left(\frac{2x+\sqrt{2}}{x^2+x\sqrt{2}+1} + \frac{\sqrt{2}}{x^2+x\sqrt{2}+1} \right).$$

De aici rezultă că

$$\int \frac{dx}{x^4+1} = \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1} + \frac{1}{4} \int \frac{dx}{x^2-x\sqrt{2}+1} + \frac{1}{4} \int \frac{dx}{x^2+x\sqrt{2}+1}.$$

Cum avem

$$\int \frac{dx}{x^2-x\sqrt{2}+1} = \int \frac{dx}{\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \operatorname{arc\,tg} \frac{x-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

și analog

$$\int \frac{dx}{x^2+x\sqrt{2}+1} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \operatorname{arc\,tg} \frac{x+\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}},$$

conchidem

$$F = \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arc\,tg} \frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}.$$

Exemplul 2. Să se calculeze primitiva $\int \frac{dx}{1+x^3}$.

Deoarece $1 + x^3 = (1 + x)(x^2 - x + 1)$, avem :

$$\frac{1}{1+x^3} = \frac{C_1}{x+1} + \frac{C_2 x + C_3}{x^2-x+1}.$$

Prin identificare deducem $C_1 = -C_2 = \frac{1}{3}$ și $C_3 = \frac{2}{3}$. Atunci

$$\frac{1}{1+x^3} = \frac{1}{3} \frac{1}{x+1} + \frac{1}{3} \cdot \frac{-x+2}{x^2-x+1},$$

deci

$$\int \frac{dx}{1+x^3} = \frac{1}{3} \ln(x+1) - \frac{1}{3} \int \frac{(x-2)\,dx}{x^2-x+1} = \frac{1}{3} \ln(x+1) - \frac{1}{6} \int \frac{(2x-1)-3}{x^2-x+1} dx =$$

$$= \frac{1}{3} \ln(x+1) - \frac{1}{6} \ln(x^2-x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arc\,tg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}}.$$

Analog se arată că

$$\int \frac{dx}{1-x^3} = \frac{1}{3} \ln \frac{\sqrt{1+x+x^2}}{1-x} + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arc\,tg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}}$$

8.3.4. *Calculul primitivelor de forma* $\int R(x)\,dx$, *unde* R *este o funcție rațională impară sau pară.*

1° R *impară.* Atunci (P.4.9.8.) există R_1 o funcție rațională a.î. $R(x) = xR_1(x^2)$, $(\forall)\ x \in D_R$.

Prin urmare $\int R(x)\,dx = \int xR_1(x^2)\,dx$. Cu substituția $x^2 = t$ avem $\int R(x)\,dx = \int \frac{1}{2} R_1(t)\,dt$.

Teoretic vorbind, primitiva $\int R_1(t)\,dt$ este mai simplă.

2° R *pară.* Atunci (P.4.9.8.) există R_1 o funcție rațională a.î. $R(x) = R_1(x^2)$. Se descompune mai departe funcția rațională R_1 în fracții simple de forma

$$t^n;\ \frac{1}{(t-\alpha)^n};\ \frac{pt+q}{(at^2+bt+c)^n},\ (b^2-4ac<0).$$

Primitiva dată $\int R(x)dx$ se reduce la calculul unor primitive de forma:

$$\int x^{2n}\,dx;\ \int \frac{dx}{(x^2-\alpha)^n};\ \int \frac{(px^2+q)\,dx}{(ax^4+bx^2+c)^n},\ (b^2-4ac<0) \tag{1}$$

Dacă $\alpha < 0$, atunci $\int \frac{dx}{(x^2-\alpha)^n} = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$, cu $\alpha = -a^2$, pe care am calculat-o mai sus (v. 8.3.3.).

Dacă $\alpha > 0$, punem $\alpha = a^2$ și calculăm prin recurență pe $F_n = \int \frac{dx}{(x^2-a^2)^n}$.

Plecăm de la F_{n-1} $(n \geqslant 2)$ și antiderivăm prin părți

$$F_{n-1} = \int \underbrace{\frac{1}{(x^2-a^2)^{n-1}}}_{u} \underbrace{dx}_{dv} = \frac{x}{(x^2-a^2)^{n-1}} + 2(n-1)\int \frac{x^2\,dx}{(x^2-a^2)^n},$$

$$F_{n-1} = \frac{x}{(x^2-a^2)^{n-1}} + 2(n-1)\int \frac{(x^2-a^2)+a^2}{(x^2-a^2)^n}\,dx,$$

$$F_{n-1} = \frac{x}{(x^2-a^2)^{n-1}} + 2(n-1)F_{n-1} + 2a^2(n-1)F_n,$$

deci

$$\boxed{F_n = -\frac{1}{a^2}\left[\frac{1}{2n-2}\cdot\frac{x}{(x^2-a^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-1}F_{n-1}\right]}$$

În particular, avem

$$F_1 = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right|,$$

$$F_2 = -\frac{1}{3a^2} \left(\frac{x}{x^2-a^2} + \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| \right),$$

$$F_3 = -\frac{1}{5a^2} \left(\frac{x}{(x^2-a^2)^2} - \frac{1}{a^2} \cdot \frac{1}{x^2-a^2} + \frac{1}{2a^3} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| \right).$$

Ultima primitivă din (1) se calculează descompunînd funcția de integrat în fracții simple sau prin recurență, dacă coeficienții a, b, c, p și q au o formă particulară.

Exemplul 1. *Să se calculeze primitiva* $F = \dfrac{x\,\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$ $(a^2 \neq b^2)$.

Cu substituția $x^2 = t$, avem $F = \dfrac{1}{2} \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}t}{(t+a^2)(t+b^2)}$.

Deoarece $\dfrac{1}{(t+a^2)(t+b^2)} = \dfrac{1}{b^2-a^2} \cdot \left(\dfrac{1}{t+a^2} - \dfrac{1}{t+b^2} \right)$, rezultă că

$$F = \frac{1}{2(b^2-a^2)} \left(\ln |t+a^2| - \ln |t+b^2| \right) = \frac{1}{2(b^2-a^2)} \ln \frac{x^2+a^2}{x^2+b^2}$$

Dacă $a = b$, atunci $F = \displaystyle\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^2} = -\frac{1}{2(x^2+a^2)}$.

Exemplul 2. *Să se calculeze primitiva* $F = \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$ $(a \neq b)$.

Punem $x^2 = t$ și obținem descompunerea

$$\frac{1}{(t+a^2)(t+b^2)} = \frac{1}{b^2-a^2} \left(\frac{1}{t+a^2} - \frac{1}{t+b^2} \right),$$

deci

$$F = \frac{1}{b^2-a^2} \left(\frac{1}{a} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{a} - \frac{1}{b} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{b} \right).$$

3.3.5. *Calculul primitivelor de forma* $\displaystyle\int R(x^{r_1}, x^{r_2}, \ldots, x^{r_k})\mathrm{d}x$, *unde* $r_i \in \mathbb{Q}$ *și* R *este o funcție rațională de* k *variabile.*

Fie $r_i = \dfrac{p_i}{q_i}$, cu p_i, $q_i \in \mathbb{Z}$, $q_i > 0$ și fie n cel mai mic multiplu comun al numerelor $q_1, q_2, \ldots, q_k$. Cu substituția $x = t^n$, obținem:

$$\int R(x^{r_1}, x^{r_2}, \ldots, x^{r_k})\mathrm{d}x = \int R(t^{nr_1}, t^{nr_2}, \ldots, t^{nr_k}) n t^{n-1}\,\mathrm{d}t = \int R_1(t)\mathrm{d}t,$$

unde R_1 este o funcție rațională de t, deoarece $nr_i \in \mathbb{Z}$, $(\forall)\ i \in \overline{1,\ k}$.

Exemplul 1. *Să se calculeze primitiva* $F = \int \frac{dx}{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}$.

Cu substituția $x = t^6$, avem $dx = 6t^5\,dt$, deci

$$F = \int \frac{6t^5 dt}{t^3 - t^2} = 6\int \frac{t^3 dt}{t-1} = 6\left(\frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} + t + \ln(t-1)\right).$$

Exemplul 2. *Să se calculeze primitiva* $F = \int \frac{dx}{x(\sqrt[3]{x} - \sqrt[4]{x})}$.

Cu substituția $x = t^{12}$, avem $dx = 12t^{11}dt$, deci

$$F = \int \frac{12t^{11}dt}{t^{12}(t^4 - t^3)} = 12\int \frac{dt}{t^4(t-1)}.$$

Cum $$\frac{1}{t^4(t-1)} = \frac{C_1}{t^4} + \frac{C_2}{t^3} + \frac{C_3}{t^2} + \frac{C_4}{t^1} + \frac{C_5}{t-1} \qquad (1)$$

obținem

$$F = -\frac{C_1}{3t^3} - \frac{C_2}{2t^2} - \frac{C_3}{t} + C_4 \ln t + C_5 \ln|t-1|,$$

unde constantele C_i se deduc din (1) prin identificare.

8.3.6. *Calculul primitivelor de forma* $\int R(e^{\lambda x})dx$, *unde* $\lambda \in \mathbb{R}^*$ *și* R *este o funcție rațională.*

Cu substituția $\boxed{e^{\lambda x} = t}$ primitiva dată devine $\int R(t) \cdot \frac{1}{\lambda t}\,dt = \int R_1(t)dt$, unde R_1 este o funcție rațională.

Exemplul 1. *Să se calculeze primitiva* $F = \int \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$.

Cu substituția $e^x = t \Leftrightarrow x = \ln t$, obținem:

$$F = \int \frac{1}{t + 1/t}\,\frac{dt}{t} = \int \frac{dt}{1+t^2} = \operatorname{arc\,tg}\, t = \operatorname{arc\,tg}\, e^x$$

8.4. Calculul primitivelor din funcții iraționale

8.4.1. *Calculul primitivelor de forma:*

$\int R(x, \sqrt[n_1]{ax+b}, \sqrt[n_2]{ax+b}, \ldots, \sqrt[n_k]{ax+b})\,dx$, *unde* R *este o funcție rațională de* $k+1$ *variabile.*

Fie n cel mai mic multiplu comun al numerelor $n_1, n_2, \ldots, n_k$. Atunci $(\forall)\ 1 \leqslant i \leqslant k$, există $m_i \in \mathbf{N}$ a.î. $n_i m_i = n$. Dacă facem substituția $\sqrt[n]{ax+b} = t$, atunci $\sqrt[n_i]{ax+b} = (\sqrt[n]{ax+b})^{m_i} = t^{m_i}$, $x = \frac{1}{a}(t^n - b)$ și $\mathrm{d}x = \frac{n}{a}\, t^{n-1}\,\mathrm{d}t$. Prin urmare primitiva dată devine:

$$F = \int R\left(\frac{t^n - b}{a}, t^{m_1}, \ldots, t^{m_k}\right)\frac{n}{a}\, t^{n-1}\mathrm{d}t = \int R_1(t)\mathrm{d}t,$$

unde R_1 este o funcție rațională în variabila t.

Exemplu 1. *Să se calculeze primitiva* $F = \int \frac{1 + \sqrt{x+1}}{1 - \sqrt[3]{x+1}}\,\mathrm{d}x$.

Cu substituția $\sqrt[6]{x+1} = t$, obținem $\mathrm{d}x = 6t^5\mathrm{d}t$, deci

$$F = \int \frac{1+t^3}{1-t^2}\, 6t^5\mathrm{d}t = 6\int \frac{1 - t + t^2}{1-t}\, t^5\mathrm{d}t = 6\int t^5\mathrm{d}t + 6\int \frac{t^7}{1-t}\,\mathrm{d}t =$$

$$= t^6 - 6\left[\frac{1}{7}t^7 + \frac{1}{6}t^6 + \frac{1}{5}t^5 + \frac{1}{4}t^4 + \frac{1}{3}\, t^3 + t + \ln(t-1)\right]$$

Înlocuim mai departe pe t cu $\sqrt[6]{x+1}$.

8.4.2. *Calculul primitivelor de forma* $\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)\mathrm{d}x$, *unde* R *este o funcție rațională de două variabile.*

Substituția $\boxed{\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}} = t}$ conduce evident la primitiva dintr-o funcție rațională de t.

Exemplul 1. *Să se calculeze primitiva* $F = \int (x-1)\sqrt{\frac{x}{x+1}}\,\mathrm{d}x$.

Cu substituția $\sqrt{\frac{x}{x+1}} = t \Leftrightarrow x = \frac{t^2}{1-t^2}$, avem:

$$F = \int\left(\frac{t^2}{1-t^2} - 1\right)\cdot t \cdot \frac{2t\ \mathrm{d}t}{(1-t^2)^2} = 2\int \frac{\mathrm{d}t}{(1-t^2)^2} - 2\int \frac{\mathrm{d}t}{(1-t^2)^3}$$ (v.8.3.4.).

8.4.3. *Calculul primitivelor de forma*

$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,\mathrm{d}x$ $(\alpha \in I)$ *cu* $ax^2 + bx + c \geqslant 0$, $(\forall)\ x \in I$, *unde* R *este o funcție rațională de două variabile.*

Substituțiile 1°—3° de mai jos, numite *substituțiile lui Euler*, reduc calculul primitivei date la calculul primitivei dintr-o funcție rațională:

1° $\boxed{\sqrt{ax^2+bx+c} = t + x\sqrt{a},\ \text{dacă}\ a \geqslant 0}$;

2° $\boxed{\sqrt{ax^2+bx+c}=tx\pm\sqrt{c},\ \text{dacă}\ c\geqslant 0}$;

3° $\boxed{\sqrt{ax^2+bx+c}=t(x-x_0),\ \text{dacă}\ b^2-4ac\geqslant 0}$,

unde am notat cu x_0 o rădăcină a ecuației $ax^2+bx+c=0$.

Într-adevăr, prin ridicare la pătrat, în toate cele trei cazuri 1°—3°, obținem $x=$ raț. (t), deci $\mathrm{d}x=$ raț. $(t)\mathrm{d}t$ și cum $\sqrt{ax^2+bx+c}=$ raț. (t), deducem $\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})\,\mathrm{d}x=\int R_1(t)\mathrm{d}t$, unde R_1 este o funcție rațională.

Observație. Cazurile considerate epuizează toate situațiile posibile.

Exemplul 1. *Să se calculeze primitiva* $F=\int\frac{2x^2+1}{x\sqrt{x^4+x^2+1}}\,\mathrm{d}x$.

Cu substituția $x^2=y$, avem $F=\int\frac{(2y+1)\,\mathrm{d}y}{2y\sqrt{y^2+y+1}}$. Dacă facem prima substituție a lui Euler $\sqrt{y^2+y+1}=t-y\Leftrightarrow y=\frac{t^2-1}{2t+1}$, obținem $\mathrm{d}y=\frac{2(t^2+t+1)\,\mathrm{d}t}{(2t+1)^2}$, deci

$$F=2\int\frac{2t^2+2t-1}{(2t+1)^2}\,\mathrm{d}t=\int\left(1-\frac{3}{(2t+1)^2}\right)\mathrm{d}t=t+\frac{3}{2(2t+1)}.$$

Rămîne să înlocuim pe t cu $\sqrt{x^4+x^2+1}+x^2$.

Exemplul 2. *Să se calculeze primitiva* $F=\int\sqrt{x^2-3x+2}\,\mathrm{d}x$.

Ecuația $x^2-3x+2=0$ are rădăcinile reale $x_1=1$, $x_2=2$, deci putem face substituția $\sqrt{x^2-3x+2}=t(x-1)$ (1). Evident F este definită pe $\mathbf{R}\setminus(1,2)$. Dacă $x\in[2,\infty)$, atunci (1) $\Leftrightarrow x^2-3x+2=t^2(x-1)^2\Leftrightarrow t^2=\frac{x-2}{x-1}\Leftrightarrow x=\frac{t^2-2}{t^2-1}$, deci $\mathrm{d}x=\frac{2t\,\mathrm{d}t}{(t^2-1)^2}$ și deci, punînd $t=\varphi(x)=\sqrt{\frac{x-2}{x-1}}$, $x\in[2,\infty)$, obținem:

$$F(t)=\int t\left(\frac{t^2-2}{t^2-1}-1\right)\frac{2t\,\mathrm{d}t}{(t^2-1)^2}\Bigg|_{t=\varphi(x)}=2\int\left(\frac{1}{(t^2-1)^2}+\frac{2}{(t^2-1)^3}\right)\mathrm{d}t\Bigg|_{t=\varphi(x)}$$

Mai departe se aplică 8.3.3.

8.4.4. *Calculul primitivelor de forma:* 1° $\int\frac{px+q}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,\mathrm{d}x$;

2° $\int(px+q)\sqrt{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x$; 3° $\int\frac{P(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,\mathrm{d}x$ (P polinom);

4° $\int\frac{\mathrm{d}x}{(px+q)^n\sqrt{ax^2+bx+c}}$.

Primitivele 1°—4° sînt cazuri particulare ale primitivelor considerate la 8.4.3., deci putem utiliza substituțiile lui Euler. Putem însă utiliza și substituții mai simple.

În cazurile 1° și 2° substituția $\boxed{x + \frac{b}{2a} = t}$ conduce la

$$\int (px + q)\sqrt{ax^2 + bx + c}\,dx = C_1 \int t\sqrt{at^2 + \lambda}\,dt + C_2 \int \sqrt{at^2 + \lambda}\,dt;$$

$$\int \frac{px + q}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}\,dx = C_1 \int \frac{t\,dt}{\sqrt{at^2 + \lambda}} + C_2 \int \frac{dt}{\sqrt{at^2 + \lambda}},$$

pentru care utilizăm formulele 8.2.5.(1°), 8.2.5.(4°) și 8.2.5.(13°).
În cazul 3° plecăm de la relația:

$$\int \frac{P(x)}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}\,dx = Q(x)\sqrt{ax^2 + bx + c} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}},$$

unde Q polinom de grad $n - 1$, $n = \text{grad } P$ și λ constantă. Derivăm relația de mai sus, apoi determinăm prin identificare λ și coeficienții lui Q.

În cazul 4° facem substituția $\boxed{px + q = \frac{1}{t}}$ și dăm peste 3°.

8.4.5. *Calculul primitivelor de forma (i.e. binome):*

$$\int x^m(ax^n + b)^p\,dx, \text{ unde } a, b \in \mathbf{R} \text{ și } m, n, p \in \mathbb{Q}.$$

Dacă p *sau* $\frac{m+1}{n}$ *sau* $p + \frac{m+1}{n} \in \mathbf{Z}$, *atunci calculul primitivei date se reduce la calculul primitivei dintr-o funcție rațională.*

Într-adevăr, cu substituția $x = t^{1/n}$, avem $dx = \frac{1}{n} t^{1/n-1}\,dt$, deci

$$F = \int x^m(ax^n + b)^p\,dx = \frac{1}{n}\int t^{\frac{m+1}{n}-1}(at + b)^p\,dt = \frac{1}{n}\int t^q(at + b)^p\,dt.$$

1° $p \in \mathbf{Z}$.

Să punem $q = \frac{r}{s}$ unde $r, s \in \mathbf{Z}$, $s \neq 0$. Atunci substituția $t^{1/s} = y \Leftrightarrow t = y^s$, ne dă $dt = sy^{s-1}\,dy$, deci

$$F = \frac{s}{n}\int y^{r+s-1}(ay^s + b)^p\,dy = \int R(y)\,dy.$$

unde R este funcție rațională deoarece $r, s, p \in \mathbf{Z}$.

2° $\frac{m+1}{n} \in \mathbf{Z} \Leftrightarrow q = \frac{m+1}{n} - 1 \in \mathbf{Z}$.

Să punem $p = \frac{r}{s}$, unde $r,\ s \in \mathbf{Z},\ s \neq 0$. Atunci substituția $(at+b)^{1/s} = y \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow t = \frac{y^s - b}{a}$, ne dă $\mathrm{d}t = \frac{s}{a} y^{s-1}\,\mathrm{d}y$, deci

$$F = \frac{s}{na} \int \left(\frac{y^s - b}{a}\right)^q \cdot y^{r+s-1}\,\mathrm{d}y = \int R(y)\,\mathrm{d}y,$$

unde R este funcție rațională, deoarece $r,\ s,\ q \in \mathbf{Z}$.

3° $p + \frac{m+1}{n} \in \mathbf{Z} \Leftrightarrow p + q = p + \frac{m+1}{n} - 1 \in \mathbf{Z}$.

Evident avem $F = \frac{1}{n} \int t^{p+q}(a + bt^{-1})^p\,\mathrm{d}t$. Să punem $p = \frac{r}{s}$, unde r, $s \in \mathbf{Z},\ s \neq 0$. Atunci substituția $(a+bt^{-1})^{1/s} = y \Leftrightarrow t = \frac{b}{y^s - a}$, ne dă $\mathrm{d}t =$

$= -\frac{sb + y^{s-1}}{(y^s - a)^2}\,\mathrm{d}y$, deci

$$F = -\int \left(\frac{b}{y^s - a}\right)^{p+q} \cdot y^r \frac{sby^{s-1}}{(y^s - a)^2}\,\mathrm{d}y = \int R(y)\,\mathrm{d}y,$$

unde R este funcție rațională deoarece $s,\ r,\ p + q \in \mathbf{Z}$.

Prin urmare substituțiile următoare:

1° $\boxed{(x^n)^{1/s} = y}$, dacă $p \in \mathbf{Z}$, unde $\frac{m+1}{n} = \frac{r}{s}$;

2° $\boxed{(ax^n + b)^{1/s} = y}$, dacă $\frac{m+1}{n} \in \mathbf{Z}$, unde $p = \frac{r}{s}$;

3° $\boxed{(a + bx^{-n})^{1/s} = y}$, dacă $\frac{m+1}{n} + p \in \mathbf{Z}$, unde $p = \frac{r}{s}$,

reduc calculul primitivei $\int x^m(ax^n + b)^p\,\mathrm{d}x$ la calculul primitivei dintr-o funcție rațională.

Observație. P. L. Cebîșev a arătat că *dacă*, p, $\frac{m+1}{n}$ și $p + \frac{m+1}{n} \notin \mathbf{Z}$, *atunci primitiva dată nu se poate reduce la primitiva dintr-o funcție rațională. Calculul primitivei nu poate fi făcut atunci prin mijloace elementare.*

Exemplul 1. *Să se calculeze primitiva* $F = \int x^{5/4}(1 + x^{3/5})^{-2}\,\mathrm{d}x$.

Avem $p = -3 \in \mathbf{Z}$, deci sîntem în cazul 1°. Cum $\frac{m+1}{n} = \frac{15}{4}$ facem

substituția $(x^{3/5})^{1/4} = t \Leftrightarrow x = t^{20/3}$, deci $dx = \frac{20}{3} t^{17/3}\, dt$ și deci

$$F = \int t^{\frac{20}{3}\cdot\frac{5}{4}} (1 + t^{\frac{20}{3}\cdot\frac{3}{5}})^{-2} \frac{20}{3} t^{\frac{17}{3}}\, dt = \frac{20}{3} \int \frac{t^{14}\, dt}{(1 + t^4)^2} \text{ (v.8.3.3.).}$$

Exemplul 2. *Să se calculeze primitiva* $F = \int x^3(1 - x^{2/3})^{3/2}\, dx$.

Avem $m = 3$, $n = 3/2$, deci $\frac{m+1}{n} \in \mathbf{Z}$ și deci sîntem în cazul 2°.

Facem substituția $(1 - x^{2/3})^{1/2} = t$. Atunci $x^{2/3} = 1 - t^2$, $2/3\, x^{-1/3} dx = -2t\, dt$, de unde obținem:

$$F = \int -3x^3 t^3 x^{1/3} t\, dt = -3 \int x^{4/3} t^4\, dt =$$

$$= -3 \int t^4(1 - t^2)^4\, dt = -3\left(\frac{t^5}{5} - \frac{2t^7}{7} + \frac{t^9}{9}\right).$$

Exemplul 3. *Să se calculeze primitiva* $F = \int x^{-1/2}(1 - x^{-4/3})^{-5/8}\, dx$.

Avem $m = -1/2$, $n = -4/3$ și $p = -5/2$, deci $\frac{m+1}{n} + p = -1 \in \mathbf{Z}$ și deci sîntem în cazul 3°. Facem substituția $(x^{4/3} - 1)^{1/8} = t$. Atunci $dx = 6x^{-1/3} t^7\, dt$, de unde obținem:

$$F = \int x^{1/3} t^{-5} 6x^{-1/3} t^7\, dt = 6 \int t^2 dt = 2t^3 = 2(x^{4/3} - 1)^{3/8}.$$

8.5. Calculul primitivelor din funcții rațional-trigonometrice

8.5.1. *Calculul primitivelor de forma:* $1° \int R(\operatorname{tg} x)\, dx$; $2° \int R(\sin x, \cos x) dx$; $3° \int R(\sin x, \cos x, \operatorname{tg} x, \operatorname{ctg} x)\, dx$; $4° \int R(\sin nx, \cos nx, \operatorname{tg} nx, \operatorname{ctg} nx)\, dx$, *unde* R *este o funcție rațională.*

Deoarece $\sin nx$, $\cos nx$, $\operatorname{tg} nx$, $\operatorname{ctg} nx$ sînt funcții raționale de $\sin x$ și $\cos x$, rezultă că funcția $R(\sin nx, \cos nx, \operatorname{tg} nx, \operatorname{ctg} nx)$ este o funcți rațională de $\sin x$ și $\cos x$, deci primitivele de tipul 4° și deci și de tipul 3° s reduc la primitive de tipul 2°. Însă $\sin x$ și $\cos x$ sînt funcții raționale d $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$, deci primitivele de tipul 2° se reduc la cele de tipul 1°.

Pentru a calcula primitiva $F = \int R(\operatorname{tg} x)\, dx$, facem substituția $\boxed{\operatorname{tg} x = t}$

Atunci $dx = \frac{dt}{1 + t^2}$, deci $F = \int R(t) \frac{dt}{1 + t^2} = \int R_1(t)\, dt$, unde R_1 este funcție rațională.

Exemplul 1. *Să se calculeze primitiva* $F = \int \frac{dx}{a + b\cos x}$, $(a^2 + b^2) \neq 0$.

Deoarece $\cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$, substituția $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t \Leftrightarrow x = 2 \operatorname{arc\,tg}\, t$, ne dă $dx = \frac{2dt}{1 + t^2}$, deci $F = \int \frac{2\,dt}{(a - b)t^2 + a + b}$.

(i) Dacă $a = b$, atunci $F = \frac{2}{a + b} t = \frac{1}{a} \operatorname{tg} \frac{x}{2}$; (ii) Dacă $a = -b$, atunci $F = -\frac{1}{a} \operatorname{ctg} \frac{x}{2}$; (iii) Dacă $|a| \neq |b|$ și notăm $\lambda^2 = \left|\frac{a + b}{a - b}\right|$, atunci $F = \frac{2}{a - b} \int \frac{dt}{t^2 \pm \lambda^2}$, deci

$$F = \frac{2}{a - b} \frac{1}{\lambda} \operatorname{arc\,tg} \frac{t}{\lambda} \text{ sau } F = \frac{2}{a - b} \frac{1}{2\lambda} \ln \frac{t - \lambda}{t + \lambda}.$$

Exemplul 2 *Să se calculeze primitiva* $F = \int \frac{1 - \sin x}{1 + \cos x} dx$.

Facem substituția $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t \Leftrightarrow x = 2 \operatorname{arc\,tg}\, t$. Atunci

$$\sin x = \frac{2t}{1 + t^2}, \quad \cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \quad dx = \frac{2dt}{1 + t^2},$$

deci

$$F = \int \frac{1 - \frac{2t}{1 + t^2}}{1 + \frac{1 - t^2}{1 + t^2}} \cdot \frac{2dt}{1 + t^2} \Bigg|_{t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}} = \int \frac{(1 - t)^2}{1 + t^2} dt \Bigg|_{t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}} =$$

$$= t - \ln(1 + t^2) \Big|_{t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}} = \operatorname{tg} \frac{x}{2} - \ln\left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}\right)$$

Observație. Calculul primitivelor de tipul 8.5.1.(2°) se simplifică, atunci cînd funcția rațională R are proprietăți suplimentare (v.8.5.2.).

8.5.2. *Calculul primitivelor de forma* $\int R(\sin x, \cos x)\, dx$, *unde* R *este o funcție rațională de două variabile* u, v *care satisface una din proprietățile*: 1° $R(-u, v) = -R(u, v)$; 2° $R(u, -v) = -R(u, v)$; 3° $R(-u, -v) = R(u, v)$; 4° $R(-u, v) = R(u, v)$; 5° $R(u, -v) = R(u, v)$.

În cazul 1°, funcția rațională $\frac{R(u, v)}{u}$ este pară în u, deci (P.4.9.8.) este egală cu $R_1(u^2, v)$. Cum $u^2 = 1 - v^2$, avem

$$R(u, v) = \frac{R(u, v)}{u} \cdot u = R_1(u^2, v) \cdot u = R_2(v) \cdot u,$$

deci

$$\int R(\sin x,\ \cos x)\,dx = -\int R_2(\cos x)\sin x\,dx = -\int R_2(t)\,dt,$$

cu substituția $\boxed{t = \cos x}$.

În cazul 2°, funcția rațională $\frac{R(u, v)}{v}$ este pară în v, deci ca și mai sus

$$\int R(\sin x, \cos x)\ dx = \int R_2(\sin x)\cos x\ dx = \int R_2(t)\,dt,$$

cu substituția $\boxed{t = \sin x}$.

În cazul 3° raționînd analog și ținînd cont că $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$, obținem evident

$$R(\sin x,\ \cos x) = R(\cos x\ \operatorname{tg} x,\ \cos x) = R_1(\cos x,\ \operatorname{tg} x) =$$
$$= R_2(\cos^2 x,\ \operatorname{tg} x) = R_3(\operatorname{tg} x),$$

deci cu substituția $\boxed{t = \operatorname{tg} x}$, obținem:

$$\int R(\sin x, \cos x)\ dx = \int R_3(t)\frac{1}{1+t^2}\,dt = \int R_4(t)\,dt.$$

În cazul 4° avem

$$R(u,\ v) = R_1(u^2,\ v) = R_1(1 - v^2,\ v) = R_2(v),$$

deci

$$\int R(\sin x,\ \cos x)\,dx = \int R_2(\cos x)\,dx$$

Analog în cazul 5° avem $\int R(\sin x,\ \cos x)\,dx = \int R_2(\sin x)\,dx$.

Așa dar în cazurile 4° și 5° am redus calculul primitivei date, teoretic vorbind, la calculul unei primitive mai simple.

Exemplul 1. *Să se calculeze primitiva* $F = \int \frac{(1 + \sin^2 x)\,dx}{\sin 2x + \cos 2x}$.

Avem $f(x) = \frac{1 + \sin^2 x}{2\sin x\cos x + \cos^2 x - \sin^2 x}$, deci $R(u, v) = \frac{1 + u^2}{2uv + v^2 - u^2}$.

Atunci $R(-u,\ -v) = R(u,\ v)$, deci sîntem în cazul 3°. Cu substituția $\operatorname{tg} x = t$, obținem:

$$F = \int \frac{\frac{1}{\cos^2 x} + \operatorname{tg}^2 x}{2\operatorname{tg} x + 1 - \operatorname{tg}^2 x}\,dx = \int \frac{1 + 2\operatorname{tg}^2 x}{2\operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^2 x + 1}\,dx = \int \frac{(1 + 2t^2)\,dt}{(2t - t^2 + 1)(1 + t^2)}$$

Facem descompunerea

$$\frac{1+2t^2}{(-t^2+2t+1)(t^2+1)}=\frac{C_1}{t-1-\sqrt{2}}+\frac{C_2}{t-1+\sqrt{2}}+\frac{C_3t+C_4}{t^2+1}.$$

Determinăm coeficienții $C_i(i+1,4)$ și antiderivăm termen cu termen.

Exemplul 2. *Să se calculeze primitiva* $F=\int\frac{\mathrm{d}x}{a^2\cos^2x+b^2\sin^2x}\ (a^2+b^2\neq 0)$.

Cu substituția $\operatorname{tg}x=t$, avem $\frac{\mathrm{d}x}{\cos^2x}=\mathrm{d}t$, deci

$$F=\int\frac{\frac{1}{\cos^2x}\mathrm{d}x}{a^2+b^2\operatorname{tg}^2x}=\int\frac{\mathrm{d}t}{a^2+b^2t^2}=\frac{1}{ab}\operatorname{arc\,tg}\frac{bt}{a}=\frac{1}{ab}\operatorname{arc\,tg}\frac{b\operatorname{tg}x}{a}.$$

8.5.3. *Calculul primitivelor de forma* $1^\circ\int R(\operatorname{th}x)\,\mathrm{d}x$; $2^\circ\int R(\operatorname{sh}x,\operatorname{ch}x)\,\mathrm{d}x$; $3^\circ\int R(\operatorname{sh}x,\operatorname{ch}x,\operatorname{th}x)\,\mathrm{d}x$ *și* $4^\circ\int R(\operatorname{sh}nx,\operatorname{ch}nx,\operatorname{th}nx)\mathrm{d}x$, *unde* R *este o funcție rațională.*

I *metodă*. Facem substituția $\boxed{\operatorname{th}\frac{x}{2}=t}$. Atunci

$$\operatorname{ch}x=\frac{1+t^2}{1-t^2},\quad \operatorname{sh}x=\frac{2t}{1-t^2},\quad \operatorname{th}x=\frac{2t}{1+t^2},\quad \mathrm{d}x=\mathrm{d}(2\operatorname{arcth}t)=\frac{2\,\mathrm{d}t}{1-t^2},$$

deci

$$\int R(\operatorname{th}x)\,\mathrm{d}x=\int R_1(t)\,\mathrm{d}t,$$

$$\int R(\operatorname{sh}x,\operatorname{ch}x)\,\mathrm{d}x=\int R_2(t)\,\mathrm{d}t,$$

$$\int R(\operatorname{sh}x,\operatorname{ch}x,\operatorname{th}x)\,\mathrm{d}x=\int R_3(t)\,\mathrm{d}t,$$

unde R_1, R_2 și R_3 sînt funcții raționale.

Primitivele de tipul 4° se reduc, evident, la cele de tipul 2° ținînd cont că $\operatorname{sh}nx$, $\operatorname{ch}nx$, $\operatorname{th}nx$ se exprimă rațional ca funcție de $\operatorname{sh}x$ și $\operatorname{ch}x$ (v. Ap. 3.18.—Ap. 3.19.).

II *metodă*. Facem substituția $\boxed{\mathrm{e}^x=t}$. Atunci

$$\operatorname{sh}x=\frac{t^2-1}{2t},\quad \operatorname{ch}x=\frac{t^2+1}{2t},\quad \operatorname{th}x=\frac{t^2-1}{t^2+1},\quad \mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}t}{t},$$

deci

$$\int R(\operatorname{th}x)\,\mathrm{d}x=\int R_1(t)\,\mathrm{d}t,$$

$$\int R(\text{sh } x,\ \text{ch } x)\,dx = \int R_2(t)\,dt,$$

$$\int R(\text{sh } x,\ \text{ch } x,\ \text{th } x)\,dx = \int R_3(t)\,dt,$$

unde R_1, R_2 și R_3 sînt funcții raționale.

III *metodă*. Reducem primitivele de tipul 2°—4° la primitive de tipul 1° în care facem substituția $\boxed{\text{th } x = t}$. Atunci $dx = \dfrac{dt}{1-t^2}$, deci $\int R(\text{th } x)\,dx = \int R_1(t)\,dt$, unde R_1 este o funcție rațională.

Exemplul 1. *Să se calculeze primitiva* $F = \int \text{sh}^2 x\,dx$.

Cu substituția $e^x = t \Leftrightarrow x = \ln t$, avem $dx = \dfrac{dt}{t}$, deci

$$F = \int \left(\frac{t^2-1}{2t}\right)^2 \frac{dt}{t} = \frac{1}{4}\int \left(t^2 - 2 + \frac{1}{t^2}\right) dt =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{t^3}{3} - 2t - \frac{1}{t}\right) = \frac{1}{12}e^{3x} - \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{4}e^{-x}.$$

Sau $F = \int \dfrac{\text{ch } 2x - 1}{2}\,dx = \dfrac{1}{4}\text{sh } 2x - \dfrac{1}{2}x$.

De asemenea, cu substituția $\text{th}\dfrac{x}{2} = t$, obținem:

$$F = \int \left(\frac{2t}{1-t^2}\right)^2 \cdot \frac{2dt}{1-t^2} = 4\int \frac{t^2 dt}{(1-t^2)^2} = -4\int \frac{dt}{1-t^2} +$$

$$+ 4\int \frac{dt}{(1-t^2)^2} \text{ (v.8.3.4.)}.$$

Exemplul 2. *Să se calculeze primitiva* $F = \int \text{th}^2 x\,dx$.

Cu substituția $\text{th}x = t$, avem $dx = \dfrac{dt}{1-t^2}$, deci

$$F = \int \frac{t^2 dt}{1-t^2} = -\int dt + \int \frac{dt}{1-t^2} = -t + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|.$$

Sau cu substituția $e^x = t$, avem $dx = \dfrac{dt}{t}$, deci

$$F = \int \left(\frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}\right)^2 dx = \int \left(\frac{t + t^{-1}}{t - t^{-1}}\right)^2 \frac{dt}{t} = \int \frac{dt}{t} + 4\int \frac{dt}{t(t^2-1)} +$$

$$+ 4\int \frac{dt}{t(t^2-1)^2} \text{ (v.8.3.3.)}.$$

8.5.4. *Calculul primitivelor de forma* $\int \sin^m x \cos^n x \, dx (m, n \in \mathbf{Z})$.

Prima metodă. Prin recurenţă.

1° Dacă m, $n \in \mathbf{Z}$, $m \neq -1$ şi $n + m \neq 0$, să punem $F_{mn} = \int \sin^m x \cos^n x \, dx$. Antiderivînd prin părţi, avem :

$$F_{mn} = \int \underbrace{\cos^{n-1} x}_{u} \underbrace{\sin^m x \cos x \, dx}_{dv} =$$

$$= \frac{\cos^{n-1} x \sin^{m+1} x}{m+1} - \frac{n-1}{m+1} \int \sin^{m+1} x \cos^{n-2} x (-\sin x) \, dx =$$

$$= \frac{\cos^{n-1} x \sin^{m+1} x}{m+1} + \frac{n-1}{m+1} \int \sin^m x \cos^{n-2} x (1 - \cos^2 x) \, dx =$$

$$= \frac{\cos^{n-1} x \sin^{m+1} x}{m+1} + \frac{n-1}{m+1} (F_{m,n-2} - F_{mn}),$$

deci

$$F_{mn} \left(1 + \frac{n-1}{m+1}\right) = \frac{\cos^{n-1} x \sin^{m+1} x}{m+1} + \frac{n-1}{m+1} F_{m,n-2}$$

şi deci

$$\boxed{F_{mn} = \frac{\cos^{n-1} x \sin^{m+1} x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n} F_{m,n-2}}$$

2° Dacă m, $n \in \mathbf{Z}$, $n \neq -1$ ş $n + m \neq 0$, se obţine la fel relaţia :

$$\boxed{F_{mn} = -\frac{\sin^{m-1} x \cos^{n+1} x}{m+n} + \frac{m-1}{m+n} F_{m-2,n}}$$

3° Dacă m, $n \in \mathbf{Z}$ şi $n + m = 0$, atunci primitiva dată este de forma cunoscută (v. 8.5.6.) :

$$\int \operatorname{tg}^n x \, dx \text{ sau } \int \operatorname{ctg}^n x \, dx, \text{ cu } n \in \mathbf{N}.$$

4° Dacă $m = n = -1$, obţinem primitiva cunoscută $\int \frac{dx}{\sin 2x}$.

A doua metodă. Distingem următoarele cazuri :

1° n, $m \in \mathbf{Z}$ şi $n + m$ impar. Atunci n sau m este impar.

Dacă $m = 2k + 1$, cu substituţia $\cos x = t$, obţinem :

$$F_{mn} = \int (1 - \cos^2 x)^k \cos^n x \sin x \, dx = \int -(1 - t^2)^k t^n \, dt = \int R(t) \, dt,$$

unde R este o funcţie raţională.

2° n, $m \in \mathbf{Z}$ şi $n + m$ par. Atunci m şi n au aceeaşi paritate. Dacă m şi n sînt impare, procedăm ca mai sus, iar dacă m şi n sînt pare, $m = 2k$ şi

$n = 2s$, avem :

$$\sin^m x \cos^n x = \left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right)^k \left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right)^s$$

și primitiva dată se reduce la un număr finit de primitive de forma :

$$\int \sin^p x \cos^q x \, dx, \text{ cu } p, q \in \mathbf{Z},\ 0 \leqslant p + q \leqslant \frac{1}{2}(m + n).$$

Facem substituția $2x = t$ și reluăm procedeul de la capăt.

De asemenea putem proceda și astfel : deoarece

$$(-\sin x)^m (-\cos x)^n = (-1)^{m+n} \sin^m x \cos^n x = \sin^m x \cos^n x,$$

din 8.5.2. rezultă că substituția $\operatorname{tg} x = t$, reduce calculul primitivei date la calculul primitivei dintr-o funcție rațională de t.

Exemplul 1. *Să se calculeze primitiva* $F = \int \sin^2 x \cos^4 x \, dx$.

$$F = \int \frac{1 - \cos 2x}{2} \cdot \left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{4} \int (1 + \cos 2x + 3\cos^2 2x) \, dx =$$

$$= \frac{1}{4} x + \frac{1}{8} \sin 2x + \frac{3}{4} \int \frac{1 + \cos 4x}{2} dx \text{ etc.}$$

Sau, deoarece $m + n = 6$, putem face substituția $\operatorname{tg} x = t$; obținem :

$$F = \int \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} \cdot \frac{1}{(1 + \operatorname{tg}^2 x)^2} dx = \int \frac{t^2 dt}{(1 + t^2)^3} =$$

$$= \int \frac{dt}{(1 + t^2)^3} - \int \frac{dt}{(1 + t^2)^4} \text{ (v.8.3.3.).}$$

8.5.5. *Calculul primitivelor de forma:*

$$\int \sin \lambda x \sin \mu x \, dx ; \int \cos \lambda x \cos \mu x \, dx ; \int \sin \lambda x \cos \mu x \, dx \ (\lambda, \mu \in \mathbf{R}).$$

Utilizînd relațiile trigonometrice cunoscute :

$$\sin a \sin b = -\frac{1}{2}[\cos(a + b) - \cos(a - b)],$$

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}[\cos(a + b) + \cos(a - b)],$$

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2}[\sin(a + b + \sin(a - b)],$$

pentru $a = \lambda x$ și $b = \mu x$, primitivele date se reduc la primitive de forma $\int \sin \alpha x \, dx$, $\int \cos \beta x \, dx$.

8.5.6. *Calculul primitivelor de forma* $\int P(\text{trig } x)\,dx$, *unde* $P \in \mathbf{R}[X]$.

Calculul primitivei date se reduce la calculul unei primitive de forma $\int \text{trig}^n x\,dx$ cu $n \geqslant 1$. Să considerăm succesiv cele 4 cazuri posibile :

1° *Calculul primitivei* $\int \sin^n x\,dx$ $(n \geqslant 2)$.

Prima metodă. Prin recurență.

Să punem $F_n = \int \sin^n x\,dx$. Antiderivînd prin părți avem :

$$F_n = \int \underbrace{\sin^{n-1} x}_{u}\ \underbrace{\sin x\,dx}_{dv} = -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1)\cdot\int \cos x \sin^{n-2} x \cos x\,dx =$$

$$= -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1)\cdot\int \sin^{n-2} x(1-\sin^2 x)\,dx,$$

deci

$$F_n = -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1)F_{n-2} - (n-1)F_n$$

și deci

$$F_n = -\frac{1}{n}\sin^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n} F_{n-2}$$

$$\boxed{\int \sin^n x\,dx = -\frac{1}{n}\sin^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} x\,dx}$$

A doua metodă. Dacă n este impar, $n = 2k+1$, atunci cu substituția $\cos x = t$, deducem :

$$\int \sin^n x\,dx = \int (1-\cos^2 x)^k \sin x\,dx = \int (1-t^2)^k\,dt.$$

Ridicăm la puterea k și antiderivăm termen cu termen.

Dacă n este par, $n = 2k$, atunci avem :

$$\int \sin^n x\,dx = \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^k dx = \int Q(\cos 2x)\,dx,$$

unde Q este un polinom de grad $\frac{n}{2}$. Procedeul continuă.

În cazul n par, avem $(-\sin x)^n = \sin^n x$, deci (8.5.2.) putem face de asemenea substituția $\text{tg } x = t$. Obținem :

$$\int \sin^n x\,dx = \int (\sin^2 x)^k\,dx = \int \left(\frac{t^2}{1+t^2}\right)^k \frac{dt}{1+t^2} = \int R(t)\,dt,$$

unde R este o funcție rațională.

2° *Calculul primitivei* $\int \cos^n x\,dx (n \geqslant 2)$.

Procedăm ca în cazul 1°. Se obține următoarea relație recursivă :

$$\boxed{\int \cos^n x \, dx = \frac{1}{n} \cos^{n-1} x \sin x + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x \, dx}$$

3° *Calculul primitivei* $\int \operatorname{tg}^n x \, dx$ $(n \geqslant 1)$.

Prima metodă. Prin recurență.

Să punem : $F_n := \int \operatorname{tg}^n x \, dx$. Atunci

$$F_1 = \int \operatorname{tg} x \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} \, dx = -\ln|\cos x|.$$

Dacă $n \geqslant 2$, avem evident :

$$F_n = \int \operatorname{tg}^{n-2} x \operatorname{tg}^2 x \, dx = \int tg^{n-2} x (1 + \operatorname{tg}^2 x) \, dx - \int \operatorname{tg}^{n-2} x \, dx =$$

$$= \int \operatorname{tg}^{n-2} x \, d(\operatorname{tg} x) - F_{n-2} = \frac{1}{n-1} \operatorname{tg}^{n-1} x - F_{n-2},$$

deci

$$F_n = \frac{1}{n-1} \operatorname{tg}^{n-1} x - F_{n-2}$$

și deci

$$\boxed{\int \operatorname{tg}^n x \, dx = \frac{1}{n-1} \operatorname{tg}^{n-1} x - \int \operatorname{tg}^{n-2} x \, dx}$$

A doua metodă. Facem substituția $\boxed{\operatorname{tg} x = t}$. Atunci $dx = \dfrac{dt}{1+t^2}$, deci

$$\int \operatorname{tg}^n x \, dx = \int t^n \frac{dt}{1+t^2} = \int R(t) \, dt,$$

unde R este o funcție rațională.

4° *Calculul primitivei* $\int \operatorname{ctg}^n x \, dx$ $(n \geqslant 1)$.

Se procedează ca în cazul 3°.

Se obține $\int \operatorname{ctg} x \, dx = \ln|\sin x|$ dacă $n=1$ și

$$\boxed{\int \operatorname{ctg}^n x \, dx = -\frac{1}{n-1} \operatorname{ctg}^{n-1} x - \int \operatorname{ctg}^{n-2} x \, dx \quad (n \geqslant 2)}$$

Exemplul 1. *Să se calculeze primitiva* $\int \sin^3 x\,dx$.

Evident avem :

$$\int \sin^3 x\,dx = \int (1 - \cos^2 x)\sin x\,dx =$$

$$= -\int (1 - \cos^2 x)\,d(\cos x) = -\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x.$$

Exemplul 2. *Să se calculeze primitiva* $\int \sin^6 x\,dx$.

Observăm că :

$$\sin^6 x = \left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}(1 - 3\cos 2x + 3\cos^2 2x - \cos^3 2x) =$$

$$= \frac{1}{8} - \frac{3}{8}\cos 2x + \frac{3}{8}\cdot\frac{1 + \cos 4x}{2} - \frac{1}{8}(1 - \sin^2 2x)\cos 2x,$$

deci

$$\int \sin^6 x\,dx = \frac{1}{8}x - \frac{3}{16}\sin 2x + \frac{3}{16} + \frac{3}{64}\sin 4x - \frac{1}{16}\sin 2x + \frac{1}{48}\sin^3 2x.$$

8.5.7. *Calculul primitivelor de forma* $\int P\left(\frac{1}{\text{trig } x}\right)dx$, *unde* $P \in \mathbf{R}[X]$.

Calculul primitivei date se reduce la calculul unei primitive de forma $\int \frac{dx}{\text{trig}^n x}$ $(n \geqslant 1)$. Să considerăm succesiv cele 4 cazuri posibile.

1° *Calculul primitivei* $\int \frac{dx}{\sin^n x}$ $(n \geqslant 1)$.

Prima metodă. Prin recurență.

Să punem $F_n = \int \frac{dx}{\sin^n x}$ $(n \geqslant 1)$. Atunci

$$F_1 = \int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|\text{tg}\,\frac{x}{2}\right|$$

Plecînd de la F_{n-2} $(n \geqslant 2)$ și antiderivînd prin părți avem :

$$F_{n-2} = \int \frac{dx}{\sin^{n-2} x} = \int \frac{1 - \cos^2 x}{\sin^n x}\,dx = F_n - \int \underbrace{\cos x}_{u}\,\underbrace{\frac{d(\sin x)}{\sin^n x}}_{dv} =$$

$$= F_n - \left[\frac{\cos x}{(-n+1)\sin^{n-1} x} - \frac{1}{-n+1}\int \frac{1}{\sin^{n-1} x}(-\sin x)\,dx\right],$$

deci

$$F_{n-2} = F_n + \frac{\cos x}{(n-1)\sin^{n-1} x} + \frac{1}{n-1}F_{n-2}$$

și deci

$$F_n = -\frac{\cos x}{(n-1)\sin^{n-1}x} + \frac{n-2}{n-1}F_{n-2},$$

prin urmare

$$\boxed{\int \frac{dx}{\sin^n x} = -\frac{\cos x}{(n-1)\sin^{n-1}x} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{dx}{\sin^{n-2}x}}$$

A doua metodă. Dacă n este impar, $n = 2k+1$, atunci $\frac{1}{(-\sin x)^n} = -\frac{1}{\sin^n x}$, deci (cf. 8.5.2.) putem face substituția $\cos x = t$; obținem:

$$\int \frac{dx}{\sin^n x} = \int \frac{\sin x\, dx}{(\sin^2 x)^{k+1}} = \int \frac{\sin x\, dx}{(1-\cos^2 x)^{k+1}} = -\int \frac{dt}{(1-t^2)^2} = \int R(t)\, dt,$$

unde R este o funcție rațională.

Dacă n este par, $n = 2k$, atunci $\frac{1}{(-\sin x)^n} = \frac{1}{\sin^n x}$, deci (8.5.2.) putem face substituția $\operatorname{tg} x = t$; obținem:

$$\int \frac{dx}{\sin^n x} = \int \left(\frac{1}{\sin^2 x}\right)^k dx = \int \left(\frac{\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x}\right)^k dx = \int \left(\frac{t^2}{1+t^2}\right)^k \frac{dt}{1+t^2} = \int R(t)dt,$$

unde R este o funcție rațională.

2° *Calculul primitivei* $\int \frac{dx}{\cos^n x}$ $(n \geqslant 1)$.

Procedăm ca în cazul 1°. Se obține următoarea relație recursivă

$$\boxed{\int \frac{dx}{\cos^n x} = \frac{1}{n-1}\frac{\sin x}{\cos^{n-1}x} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{dx}{\cos^{n-2}x}} \quad (n \geqslant 2)$$

3° și 4°. Calculul primitivei $\int \frac{dx}{\operatorname{tg}^n x}$ $\left(\text{resp. } \int \frac{dx}{\operatorname{ctg}^n x}\right)$ este identic cu calculul primitivei $\int \operatorname{ctg}^n x\, dx$ $\left(\text{resp. } \int \operatorname{tg}^n x\, dx\right)$, pe care am calculat-o mai sus (v.8.5.6.).

Exemplul 1. *Să se calculeze primitiva* $\int \frac{dx}{\sin^2 x}$.

$$F_0 = \int dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{\sin^2 x}dx = \int \frac{dx}{\sin^2 x} - \int \underbrace{\cos x}_{u} \underbrace{\frac{d(\sin x)}{\sin^2 x}}_{dv} =$$

$$= F_2 - \left(-\cos x \frac{1}{\sin x} - \int \frac{\sin x}{\sin x}dx\right) = F_2 + \operatorname{ctg} x + F_0,$$

deci

$$F_2 = -\operatorname{ctg} x.$$

Sau, deoarece $\sin^2 x = \dfrac{\operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$, cu substituția $\operatorname{tg} x = t$, obținem:

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = \int \frac{1 + t^2}{t^2} \cdot \frac{dt}{1 + t^2} = \int \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{t} = -\frac{1}{\operatorname{tg} x} = -\operatorname{ctg} x.$$

Exemplul 2. Să se calculeze primitiva $\int \dfrac{dx}{\sin^3 x}$.

$$F_1 = \int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{1 - \cos^2 x}{\sin^3 x}\, dx = \int \frac{dx}{\sin^3 x} - \int \underbrace{\cos x}_{u} \cdot \underbrace{\frac{d(\sin x)}{\sin^3 x}}_{dv} =$$

$$= F_3 - \left(-\frac{\cos x}{2 \sin^2 x} - \int \frac{\sin x}{2 \sin^2 x}\, xd \right) = F_3 + \frac{\cos x}{2 \sin^2 x} + \frac{1}{2} F_1,$$

deci

$$F_3 = -\frac{\cos x}{2 \sin^2 x} + \frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right|.$$

Sau, $n = 3$ fiind impar, facem substituția $\cos x = t$ și obținem

$$F_3 = \int \frac{\sin x\, dx}{(1 - \cos^2 x)^2} = -\int \frac{dt}{(1 - t^2)^2} = -\frac{1}{3} \left(\frac{t}{t^2 - 1} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t - 1}{t + 1} \right| \right) \text{ (v.8.3.4.).}$$

8.6. Calculul unor primitive diverse

8.6.1. *Calculul primitivelor de forma:*

$$1^\circ \int R(x, \sqrt{a^2 - x^2})\, dx; \quad 2^\circ \int R(x, \sqrt{a^2 + x^2})\, dx; \quad 3^\circ \int R(x, \sqrt{x^2 - a^2})\, dx,$$

unde R este o funcție rațională de două variabile.

Prima metodă. Utilizînd substituțiile lui Euler reducem calculul primitivelor 1°—3° la calculul unor primitive dintr-o funcție rațională.

A doua metodă. Facem în 1°, 2° și 3° respectiv substituțiile:

1° $\boxed{x = a \sin t}$; $\boxed{x = a \cos t}$,

2° $\boxed{x = a \operatorname{tg} t}$; $\boxed{x = a \operatorname{etg} t}$; $\boxed{x = a \operatorname{sh} t}$,

3° $\boxed{x = \dfrac{a}{\sin t}}$; $\boxed{x = \dfrac{a}{\cos t}}$; $\boxed{x = a \operatorname{ch} t}$,

și obținem, de fiecare dată, primitive de forma $\int R_1(\sin t, \cos t)\,dt$ sau $\int R_1(\text{sh } t, \text{ch } t), dt$, unde R_1 este o funcție rațională de două variabile.

Exemplul 1. *Să se calculeze primitiva* $F = \int \sqrt{x^2 - a^2}\,dx$.

Facem substituția $x = a \text{ ch } t$. Atunci $dx = a \text{ sh } t$, deci

$$F = \int \sqrt{a^2(\text{ch}^2 t - 1)}\,(a \text{ sh } t)\,dt = a^2 \int \text{sh}^2 t\,dt = a^2 \int \frac{\text{ch} 2t - 1}{2}\,dt =$$

$$= \frac{a^2}{4} \text{sh } 2t - \frac{a^2}{2} t = \frac{a^2}{2} \text{ch } t \sqrt{\text{ch}^2 t - 1} - \frac{a^2}{2} t = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 - a^2} -$$

$$- \frac{a^2}{2} \ln (x + \sqrt{x^2 - a^2}) + C.$$

Prin urmare

$$\int \sqrt{x^2 - a^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2} \ln(x + \sqrt{x^2 - a^2}) + C.$$

Să deducem aceleași relații cu substituțiile lui Euler.

Fie $F = \int \sqrt{x^2 \pm a^2}\,dx$. Facem substituția $\sqrt{x^2 \pm a^2} = t - x$. Atunci

$x^2 \pm a^2 = t^2 - 2tx + x^2 \Leftrightarrow x = \dfrac{t^2 + a^2}{2t}$, deci $dx = \dfrac{t^2 + a^2}{2t^2}\,dt$ și deci

$$F = \int \left(t - \frac{t^2 + a^2}{2t}\right) \frac{t^2 + a^2}{2t^2}\,dt = \int \frac{(t^2 + a^2)^2}{4t^3}\,dt =$$

$$= \int \frac{t^4 + 2a^2t^2 + a^4}{4t^3}\,dt = + \frac{a^2}{2} \ln t + \frac{t^4 - a^4}{8t^2} =$$

$$= + \frac{a^2}{2} \ln t + \frac{t^2 + a^2}{2t} \cdot \frac{t^2 + a^2}{2t} = + \frac{a^2}{2} \ln (x + \sqrt{x^2 \pm a^2}) + \frac{x}{2}\sqrt{x^2 \pm a^2}.$$

Prin urmare

$$\int \sqrt{x^2 \pm a^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2} \ln(x \pm \sqrt{x^2 + a^2}).$$

Exemplul 2. *Să se calculeze primitiva* $\int \dfrac{dx}{x^2 \pm a^2}$ $(a > 0)$.

Cu substituția $x = a \text{ sh } t$, avem $dx = a \text{ ch } t\,dt$, deci

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \int \frac{a \text{ ch } t\,dt}{\sqrt{a^2(\text{sh}^2 t + 1)}} = \int dt = t =$$

$$= \ln\left(\frac{x}{a} + \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2}}\right) = \ln (x + \sqrt{x^2 + a^2}).$$

Cu substituția $x = a \operatorname{ch} t$, $t \in \mathbf{R}_+$, avem $\mathrm{d}x = a \operatorname{sh} t \, \mathrm{d}t$, deci

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \int \frac{a \operatorname{sh} t}{\sqrt{a^2(\operatorname{ch}^2 t - 1)}} = t = \ln\left(\frac{x}{a} + \sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}\right) =$$

$$= \ln(x + \sqrt{x^2 - a^2}).$$

Prin urmare

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}) + C.$$

Exemplul 3. *Să se calculeze primitiva* $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$.

Cu substituția $x + \frac{b}{2a} = t$, primitiva dată devine $\int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{a(t^2 + \lambda^2)}}$, pe care am calculat-o mai sus (Exemplul 2).

Exemplul 4. *Să se calculeze primitiva* $\int \sqrt{ax^2 + bx + c} \, \mathrm{d}x$.

Cu substituția $x + \frac{b}{2a} = t$, primitiva dată devine $\int \sqrt{a(t^2 \pm \lambda^2)} \, \mathrm{d}t$, pe care am calculat-o mai sus (Exemplul 3).

Exemplul 5. *Să se calculeze primitiva* $F = \int \frac{Ax^2 + Bx + C}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} \mathrm{d}x$.

Evident există numerele $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}$ a.î. avem relația :

$$F = \alpha \int \frac{ax^2 + bx + c}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} \mathrm{d}x + \beta \int \frac{2ax + b}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} \mathrm{d}x + \gamma \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}.$$

Prima primitivă este egală cu $\int \sqrt{ax^2 + bx + c} \, \mathrm{d}x$ (v. Exemplul 4). A doua primitivă este egală cu $2\beta \sqrt{ax^2 + bx + c}$. Pentru ultima primitivă vezi Exemplul 3.

8.6.2. *Calculul primitivelor de forma* $\int \mathrm{e}^{\lambda x} \cdot P(x) \, \mathrm{d}x$, unde $P \in \mathbf{R}[X]$.

Prima metodă. Fie P polinom de gradul n. Antiderivînd prin părți se obține :

$$\int \underbrace{P(x)}_{u} \underbrace{\mathrm{e}^{\lambda x} \mathrm{d}x}_{\mathrm{d}v} = \frac{1}{\lambda} \mathrm{e}^{\lambda x} P(x) - \frac{1}{\lambda} \int \mathrm{e}^{\lambda x} \cdot P'(x) \, \mathrm{d}x$$

Antiderivînd, mai departe, prin părți primitivele $\int \mathrm{e}^{\lambda x} \cdot P'(x) \, \mathrm{d}x$, $\int \mathrm{e}_{\lambda x} P''(x) \, \mathrm{d}x$, ...

... $\int \mathrm{e}^{\lambda x} P^{(n-1)}(x) \, \mathrm{d}x$, obținem o relație de forma :

$$\int P(x) \, \mathrm{e}^{\lambda x} \, \mathrm{d}x = \mathrm{e}^{\lambda x} Q(x), \tag{1}$$

unde Q este un polinom de gradul n. Derivînd relația (1) avem :

$$P(x) \cdot \mathrm{e}^{\lambda x} = \lambda \mathrm{e}^{\lambda x} Q(x) + \mathrm{e}^{\lambda x} Q'(x) \Leftrightarrow P(x) = \lambda Q(x) + Q'(x), \tag{2}$$

de unde, prin identificare, deducem coeficienții lui Q.

Să presupunem că $P(x) := \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ și $Q(x) := \sum_{k=0}^{n} b_k x^k$, $(\forall)\, x \in \mathbf{R}$.

Atunci relația (2) devine:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x^k = \lambda b_n x^n + \sum_{k=0}^{n} (\lambda b_k + (k+1)\, b_{k+1})\, x^k,$$

deci

$$a_n = \lambda b_n \quad \text{și} \quad a_k = \lambda b_k + (k+1)\, b_{k+1} \quad 0 \leqslant k \leqslant n-1.$$

A doua metodă. Presupunem din nou P un polinom de gradul n. Antiderivînd prin părți $\int P^{(k)}(x)\, e^{\lambda x}\, dx$, $0 \leqslant k \leqslant n$, avem:

$$1 \qquad \int \underbrace{P(x)}_{u}\, \underbrace{e^{\lambda x}\, dx}_{dv} = \frac{1}{\lambda} e^{\lambda x} P(x) - \frac{1}{\lambda} \int e^{\lambda x} P'(x)\, dx$$

$$-\frac{1}{\lambda} \qquad \int \underbrace{P'(x)}_{u}\, \underbrace{e^{\lambda x}\, dx}_{dv} = \frac{1}{\lambda} e^{\lambda x} P'(x) - \frac{1}{\lambda} \int e^{\lambda x} P''(x)\, dx$$

. . . . . .

$$\frac{(-1)^{n-1}}{\lambda^{n-1}} \qquad \int \underbrace{P^{(n-1)}(x)}_{u}\, \underbrace{e^{\lambda x}\, dx}_{dv} = \frac{1}{\lambda} e^{\lambda x} P^{(n-1)}(x) - \frac{1}{\lambda} \int e^{\lambda x} P^{(n)}(x)\, dx$$

$$\frac{(-1)^{n}}{\lambda^{n}} \qquad \int \underbrace{P^{(n)}(x)}_{u}\, \underbrace{e^{\lambda x}\, dx}_{dv} = \frac{1}{\lambda} e^{\lambda x} P^{(n)}(x) - \frac{1}{\lambda} \int e^{\lambda x} P^{(n+1)}(x)\, dx$$

Înmulțind prima relație cu 1, a doua cu $-\frac{1}{\lambda}$, a treia cu $+\frac{1}{\lambda^2}, \ldots$, a $(n+1)$-a relație cu $\frac{(-1)^n}{\lambda^n}$ și adunînd, după reducerea termenilor asemenea, se obține:

$$\boxed{\int P(x)\, e^{\lambda x}\, dx = \frac{e^{\lambda x}}{\lambda} \left[P(x) - \frac{P'(x)}{\lambda} + \ldots + (-1)^n \frac{P^{(n)}(x)}{\lambda^n} \right]},$$

ținînd seama că primitiva $\int e^{\lambda x} P^{(n+1)}(x)\, dx$ este nulă, deoarece $P^{(n+1)} = 0$.

Exemplul 1. *Să se calculeze primitiva* $\int x^3 e^{2x} dx$.

Evident avem: $\int x^3 e^{2x}\, dx = e^{2x} Q(x)$, unde $Q(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

Prin derivare se obține $x^3 e^{2x} = 2e^{2x} Q(x) + e^{2x} Q'(x) \Leftrightarrow x^3 = 2Q(x) + Q'(x) \Leftrightarrow x^3 = 2ax^3 + (2b + 2a)x^2 + (2c + 2b)x + 2d + c$.

Prin identificare se deduce că $a = \frac{1}{2}$, $b = -c = -\frac{3}{4}$ și $d = -\frac{3}{8}$, deci

$$\int x^3 e^{2x} dx = e^{2x} \left(\frac{1}{2} x^3 - \frac{3}{4} x^2 + \frac{3}{4} x - \frac{3}{8} \right).$$

8.6.3. *Calculul primitivelor de forma:* $\int P(x) \cdot \sin \lambda x \, dx$; $\int P(x) \cdot \cos \lambda x \, dx$, *unde* P *este un polinom.*

Să considerăm primitiva $\int P(x) \sin \lambda x \, dx$.

Prima metodă. Antiderivînd prin părți de $n-1$ ori se obține ca și în cazul primitivei $\int e^{\lambda x} P(x) \, dx$ o relație de forma:

$$\int P(x) \sin \lambda x \, dx = Q(x) \sin \lambda x + R(x) \cos \lambda x, \tag{1}$$

unde Q și R sînt polinoame de gradul n. Derivînd relația (1), avem:

$$P(x) \sin \lambda x = Q'(x) \sin \lambda x + \lambda Q(x) \cos \lambda x + R'(x) \cos \lambda x - \lambda R(x) \sin \lambda x,$$

deci

$$[P(x) + \lambda R(x) - Q'(x)] \sin \lambda x = [\lambda Q(x) + R'(x)] \cos \lambda x$$

și deci

$$P(x) + \lambda R(x) - Q'(x) = 0; \quad \lambda Q(x) + R'(x) = 0, \ (\forall) \ x \in \mathbf{R}.$$

Din ultimile două relații obținem, prin identificare, coeficienții polinoamelor Q și R.

A doua metodă. Antiderivînd prin părți, obținem:

$$\int \underbrace{P(x)}_{u} \underbrace{\sin \lambda x \, dx}_{dv} = -P(x) \cdot \frac{1}{\lambda} \cos \lambda x + \frac{1}{\lambda} \int P'(x) \cdot \cos \lambda x \, dx,$$

$$\int \underbrace{P'(x)}_{u} \underbrace{\cos \lambda x \, dx}_{dv} = P'(x) \cdot \frac{1}{\lambda} \sin \lambda x - \frac{1}{\lambda} \int P''(x) \sin \lambda x \, dx,$$

deci

$$\int P(x) \sin \lambda x \, dx = -\frac{1}{\lambda} P(x) \cos \lambda x + \frac{1}{\lambda^2} P'(x) \sin \lambda x - \frac{1}{\lambda^2} \int P''(x) \sin \lambda x \, dx.$$

Înlocuind succesiv în ultima relație P cu P'', $P^{(IV)}, \ldots$, obținem relațiile:

$$\int P(x) \sin \lambda x \, dx = -\frac{1}{\lambda} P(x) \cos \lambda x + \frac{1}{\lambda^2} P'(x) \sin \lambda x - \frac{1}{\lambda^2} \int P''(x) \sin \lambda x \, dx$$

$$\int P''(x) \sin \lambda x \, dx = -\frac{1}{\lambda} P''(x) \cos \lambda x + \frac{1}{\lambda^2} P'''(x) \sin \lambda x - \frac{1}{\lambda^2} \int P^{(IV)}(x) \sin \lambda x \, dx$$

$$\int P^{(IV)}(x) \sin \lambda x \, dx = -\frac{1}{\lambda} P^{(IV)}(x) \cos \lambda x + \frac{1}{\lambda^2} P^{(V)}(x) \sin \lambda x - \frac{1}{\lambda^3} P^{(VI)}(x) \sin \lambda x \, dx$$

Înmulțind prima relație cu 1, a doua cu $\frac{1}{\lambda^2}$, a treia cu $+\frac{1}{\lambda^4}$ etc. și adunînd,

după reducerea termenilor asemenea, se obține :

$$\int P(x)\sin\lambda x\,dx = -\frac{\cos\lambda x}{\lambda}\left[P(x) - \frac{P''(x)}{\lambda^2} + \frac{P^{(IV)}(x)}{\lambda^4} - \dots\right] +$$

$$+\frac{\sin\lambda x}{\lambda}\left[\frac{P'(x)}{\lambda} - \frac{P'''(x)}{\lambda^3} + \frac{P^{(V)}(x)}{\lambda^5} - \dots\right]$$

Pentru primitiva $\int P(x)\cos\lambda x\,dx$ se procedează la fel.

Corolar 1. *Calculul primitivelor de forma* $\int P(x)\cos^n x\,dx, \int P(x)\sin^n x\,dx$

Utilizînd formulele Ap.2.21. — Ap.2.24., primitivele date se reduc la calculul primitivelor de forma $\int P(x)\cos kx\,dx$, $\int P(x)\sin kx\,dx$.

Exemplul 1. *Să se calculeze primitiva* $\int x^3\sin x\,dx$.

Evident avem $\int x^3\sin x\,dx = Q(x)\sin x + R(x)\cos x$, unde $Q(x) = a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4$ și $R(x) = b_1x^3 + b_2x^2 + b_3x + b_4$.
Prin derivare rezultă relația :

$$x^3\sin x = Q'(x)\sin x + Q(x)\cos x + R'(x)\cos x - R(x)\sin x,$$

deci

$$(x^3 - Q'(x) + R(x))\sin x = (Q(x) + R'(x))\cos x$$

și deci

$$x^3 - Q'(x) + R(x) = 0,\quad Q(x) + R'(x) = 0,$$

adică

$$(1 + b_1)x^3 + (b_2 - 3a_1)x^2 + (b_3 - 2a_2)x + b_4 - a_3 = 0$$

sau încă

$$a_1x^3 + (a_2 + 3b_1)x^2 + (a_3 + 2b_2)x + a_4 + b_3 = 0.$$

De aici prin identificare obținem $a_1 = a_3 = b_2 = b_4 = 0$, $a_2 = 3$, $a_4 = -6$, $b_1 = -1$, $b_3 = 6$, deci $Q(x) = 3x^2 - 6$ și $R(x) = -x^3 + 6x$, de unde deducem expresia primitivei $\int x^3\sin x\,dx$.

8.6.4. *Calculul primitivelor de forma* $\int(\ln x)^n\,dx$ $(n \in \mathbf{N})$.

Punem $F_n := \int(\ln x)^n\,dx$. Antiderivînd prin părți, avem :

$$F_n = \int \underbrace{(\ln x)^n}_{u}\,\underbrace{dx}_{dv} = x(\ln x)^n - n\int x(\ln x)^{n-1}\frac{1}{x}\,dx,$$

deci

$$\text{deci } F_n = x(\ln x)^n - nF_{n-1} \qquad (1)$$

Să scriem relaţia (1) pentru n egal cu $n, n-1, \ldots, 1$. Obţinem :

$$F_n = x(\ln x)^n - nF_{n-1}$$

$$F_{n-1} = x(\ln x)^{n-1} - (n-1)F_{n-2}$$

$$F_{n-2} = x(\ln x)^{n-2} - (n-2)F_{n-3}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$F_1 = x \ln x - F_0$$

Înmulţind prima relaţie cu 1, a doua cu $-n$, a treia cu $n(n-1), \ldots$, ultima cu $(-1)^{n-1}n!$ şi adunînd, după reducerea termenilor asemenea, se obţine relaţia :

$$F_n = x\,[(\ln x)^n - n(\ln x)^{n-1} + n(n-1)(\ln x)^{n-2} - \ldots + (-1)^n n!]$$

8.6.5. *Calculul primitivei de forma* $\int P(x) \ln x \, dx$, *unde* $P \in \mathbf{R}[X]$.

Fie $P(x) := \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, $x \in \mathbf{R}$. Antiderivînd prin părţi, avem :

$$\int \underbrace{\ln x}_{u} \underbrace{P(x)\,dx}_{dv} = \ln x \; P_1(x) - \int \frac{1}{x} P_1(x)\,dx,$$

unde

$$P_1(x) := \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1}, \quad (\forall) \; x \in \mathbf{R}$$

Prin urmare

$$\int \ln x \; P(x)\,dx = \ln x \; P_1(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{(k+1)^2} x^{k+1}.$$

8.6.6. *Calculul primitivelor de forma :*

$$\int e^{ax} \cos bx \, dx, \quad \int e^{ax} \sin bx \, dx \quad (a, b \in \mathbf{R}^*).$$

Antiderivînd prin părţi, avem :

$$F := \int \underbrace{e^{ax}}_{u} \underbrace{\cos bx \, dx}_{dv} = \frac{1}{b} e^{ax} \sin bx - \frac{a}{b} \int e^{ax} \sin bx \, dx,$$

$$G := \int \underbrace{e^{ax}}_{u} \underbrace{\sin bx \, dx}_{dv} = -\frac{1}{b} e^{ax} \cos bx + \frac{a}{b} \int e^{ax} \cos bx \, dx.$$

Determinăm F şi G din sistemul de ecuaţii :

$$F = \frac{1}{b} e^{ax} \sin bx - \frac{a}{b} G; \quad G = -\frac{1}{b} e^{ax} \cos bx + \frac{a}{b} F,$$

de unde obţinem :

$$\begin{cases} F = \dfrac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \cos bx + b \sin bx), \\ G = \dfrac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \sin bx - b \cos bx). \end{cases}$$

CAPITOLUL 9

INTEGRABILITATE

Noțiunea de integrală a apărut din nevoia practică de a determina aria unor figuri plane ca și din unele considerații de fizică. Sînt bine cunoscute în matematică diferite moduri de a defini integrala, denumite după numele matematicianului care a studiat-o, cum ar fi : integrala Riemann, Darboux, Lebesgue etc. În esență lucrurile stau astfel : se definește o anumită „schemă" („procedeu") S, prin care putem asocia unor anumite funcții date un număr bine determinat. A „integra" o funcție $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ relativ la schema S, înseamnă a determina, numărul $S(f)$ asociat lui f, prin mijlocirea schemei S. Problematica care apare este naturală : care este relația dintre tipurile de integrală considerată ? Să se determine clase cît mai largi de funcții integrabile. Să se găsească metode, procedee, pentru calculul integralelor, cînd funcția de integrat are o formă cît mai generală sau are o formă particulară importantă (funcții raționale, trigonometrice, trigonometrice inverse etc.). Acestea sînt problemele de care ne vom ocupa în capitolele următoare.

9.1. Funcții integrabile. Criterii de integrabilitate

9.1.1. Definiție. Fie $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$. Se numește *diviziune* a intervalului $[a, b]$ și se notează cu Δ o mulțime finită $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ de elemente din $[a, b]$ a.î. $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$; vom scrie $\Delta = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$. Elementele $x_i (i = \overline{0, n})$ se numesc *punctele diviziunii* Δ, iar $J_i := [x_{i-1}, x_i]$, $(i = \overline{0, n})$ se numesc *intervalele parțiale* definite de Δ. Numărul $\max_{i=\overline{0,n}} (x_i - x_{i-1})$ se numește *norma* lui Δ și se notează cu $\nu(\Delta)$. Diviziunea Δ se numește *echidistantă* dacă $x_i - x_{i-1} = \dfrac{b-a}{n}$, $(\forall)\ i = \overline{1, n}$, deci dacă $x_i = a + \dfrac{i}{n}(b-a)$. Vom nota cu $\mathfrak{T}_{[a,b]}$ sau $\mathfrak{T}$ *mulțimea tuturor diviziunilor* lui $[a, b]$. Fixăm $\Delta \in \mathfrak{T}_{[a,b]}$, $\Delta = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$; se numește *mulțime (familie) de puncte intermediare* asociată lui Δ și se notează cu ξ_Δ, o familie $(\xi_i)_{i=\overline{1,n}}$ de elemente din $[a, b]$ cu $\xi_i \in J_i$, $(\forall)\ i = \overline{1, n}$; vom nota $\Xi_\Delta = \{\xi_\Delta ;\ \xi_\Delta = (\xi_i)_{i=\overline{1,n}},\ \xi_i \in J_i\}$ i.e. familia mulțimilor de puncte intermediare asociată lui Δ. Dacă $\Delta_1, \Delta_2 \in \mathfrak{T}_{[a,b]}$ și $\Delta_1 \subseteq \Delta_2$, vom spune că Δ_1 este *mai puțin fină* ca Δ_2 sau că Δ_2 este mai *fină* ca Δ_1.

9.1.2. Propoziție. *Relația de finețe* $\subseteq$ *definește pe mulțimea* $\mathfrak{T} = \mathfrak{T}_{[a,b]}$ *o relație de ordine filtrantă i.e.* $(\forall)\ \Delta_1, \Delta_2 \in \mathfrak{T}$, $(\exists)\ \Delta \in \mathfrak{T}$ *a.î.* $\Delta_1 \subseteq \Delta$ *și* $\Delta_2 \subseteq \Delta$.

Dem. Evident relația $\subseteq$ este reflexivă, antisimetrică și tranzitivă. Dacă $\Delta_1,\ \Delta_2 \in \mathfrak{T}$ sînt fixate, atunci $\Delta := \Delta_1 \cup \Delta_2 \in \mathfrak{T}$ și $\Delta_1 \subseteq \Delta,\ \Delta_2 \subseteq \Delta$.

9.1.3. Definiție. Fie $f:[a,\ b]\to\mathbf{R}$ o funcție; $(\forall)\ \Delta = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\} \in \mathfrak{T} = \mathfrak{T}_{[a,b]}$ și $(\forall)\ \xi_\Delta \in \Xi_\Delta$, numărul $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,(x_i - x_{i-1})$ se numește *sumă Riemann* definită de funcția f, diviziunea Δ și mulțimea ξ_Δ de puncte intermediare asociată lui Δ și se notează cu $\sigma_f(\Delta,\ \xi_\Delta)$. Vom spune că f este *integrabilă Riemann* pe $[a,\ b]$,dacă $(\exists)\ L \in \mathbf{R}$ cu proprietatea: $(\forall)\ \varepsilon > 0$, $(\exists)\ \eta > 0$ a.î. pentru orice diviziune Δ a lui $[a,\ b]$ și pentru orice mulțime ξ_Δ de puncte intermediare asociată lui Δ, avem $|L - \sigma_f(\Delta,\ \xi_\Delta)| < \varepsilon$; altfel spus:

$$(\forall)\ \varepsilon > 0, (\exists)\ \eta > 0 \text{ a.î. } |A - \sigma_f(\Delta,\ \xi_\Delta)| < \varepsilon\ (\forall)\ \Delta \in \mathfrak{T},\ \nu(\Delta) < \eta, (\forall)\xi_\Delta \in \Xi\,\Delta$$

Acest fapt se scrie concentrat astfel:

$$\lim_{\nu(\Delta)\to 0} \sigma_f(\Delta,\ \xi_\Delta) = L,\ (\forall)\ \xi_\Delta \in \Xi_\Delta$$

Numărul L se numește *integrala (definită) Riemann* din f pe $[a,\ b]$ și se notează cu $\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x, \int_a^b f\ \mathrm{d}x$ sau $\int_a^b f$.

Așadar f este *integrabilă Riemann*, dacă $(\exists)\ \lim_{\nu(\Delta)\to 0} \sigma_f(\Delta,\ \xi_\Delta) = L \in \mathbf{R}$, independent de mulțimea de puncte intermediare ξ_Δ asociată lui Δ. Prin definiție $\int_b^a f := -\int_a^b f$.

Observație. Dacă $\int_a^b f$ există, ea este unic determinată de f (Raționament analog ca la unicitatea limitei unei funcții).

Exemplul 1. *Fie* $f:[a,\ b]\to\mathbf{R}$ *funcția constantă*, $f = c$. *Atunci* f *este* R — *integrabilă și avem* $\int_a^b f = (b - a)c$.

Fie $\Delta = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\} \in \mathfrak{T}_{[a,b]}$ și $\xi_\Delta = (\xi_i)_{i=\overline{1,n}}$ o mulțime de puncte intermediare asociată lui Δ, fixați. Atunci avem:

$$\sigma_f(\Delta,\ \xi_\Delta) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})\, f(\xi_i) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})\, c = (b - a)\, c,$$

deci

$$\lim_{\nu(\Delta)\to 0} \sigma_f(\Delta,\ \xi_\Delta) = (b - a)c,\ (\forall)\ \xi_\Delta \in \Xi_\Delta \text{ etc.}$$

Exemplul 2. *Fie* $f:[0,\ 1] \to \mathbf{R}$ *o funcție definită astfel* $f(x) = 0$, $(\forall)\ x \in \left[0,\ \frac{1}{2}\right)$ și $f(x) = 1$, $(\forall)\ x \in \left[\frac{1}{2},\ 1\right]$. *Atunci* f *este R-integrabilă și* $\int_0^1 f = \frac{1}{2}$.

Fie $\Delta = \{0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = 1\} \in \mathfrak{T}_{[0,1]}$ și $\xi_\Delta = (\xi_i)_{i=\overline{1,n}}$ o mulțime de puncte intermediare asociată lui Δ, fixate. Atunci, notînd cu $[x_{j-1},\ x_j]$ intervalul parțial al diviziunii Δ care conține punctul $\frac{1}{2}$, avem:

$$\sigma_f(\Delta,\ \xi_\Delta) = \sum_{i=1}^{j-1} (x_i - x_{i-1})\, f(\xi_i) + (x_j - x_{j-1})\, f(\xi_j) + \sum_{i=j}^{n} f(\xi_i)\,(x_i - x_{i-1}) =$$

$$= (x_j - x_{j-1})\, f(\xi_j) + 1 - x_j \in [1 - x_j,\ 1 - x_j - 1],$$

deci

$$-\nu(\Delta) \leqslant \left(x_i - \frac{1}{2}\right) \leqslant \sigma_f(\Delta, \xi_\Delta) - \frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{2} - x_{i-1} \leqslant \nu(\Delta)$$

și deci

$$|\sigma_f(\Delta, \xi_\Delta) - \frac{1}{2}| \leqslant \nu(\Delta) \tag{1}$$

Cum Δ și ξ_Δ au fost arbitrare, din (1) rezultă că $\lim_{\nu(\Delta)\to 0} \sigma_f(\Delta, \xi_\Delta) = \frac{1}{2}$, $(\forall)\, \xi_\Delta \in \Xi_\Delta$, prin urmare f este R-integrabilă și avem $\int_a^b f = \frac{1}{2}$

9.1.4. Teoremă. *Fie $f:[a, b]\to\mathbf{R}$ o funcție. Atunci f este R-integrabilă $\Leftrightarrow$ $(\exists)\, L \in \mathbf{R}$ cu proprietatea: $(\forall)\, (\Delta_n)_{n\geqslant 1}$ un șir de diviziuni ale lui $[a, b]$ cu $\nu(\Delta_n)\to 0$ $(n\to\infty)$ și $(\forall)\, (\xi_{\Delta_n})_{n\geqslant 1}$ un șir de mulțimi de puncte intermediare, cu ξ_{Δ_n} asociată lui $\Delta_n (n \geqslant 1)$, rezultă că șirul sumelor Riemann $(\sigma_f(\Delta_n, \xi_{\Delta_n}))_{n\geqslant 1}$ este convergent la L.*

Dem ($\Rightarrow$) Presupunem f integrabilă și fie $L := \int_a^b f$. Fie mai departe $\varepsilon > 0$, $\Delta_n \in \mathfrak{T} = \mathfrak{T}_{[a,b]}$ cu $\nu(\Delta_n)\to 0$ și $\xi_{\Delta_n} \in \Xi_{\Delta_n}$ $(n \geqslant 1)$, fixați. Cf. ipotezei $(\exists)\, \eta > 0$ a.î.

$$|L - \sigma_f(\Delta, \xi_\Delta)| < \varepsilon,\ (\forall)\ \Delta \in \mathfrak{T},\ \nu(\Delta) < \eta,\ (\forall)\ \xi_\Delta \in \Xi_\Delta \tag{1}$$

Deoarece $\nu(\Delta_n)\to 0$, $(\exists)\, N \geqslant 1$ cu $\nu(\Delta_n) < \eta$, $(\forall)\, n \geqslant N$, deci din (1) rezultă

$$|L - \sigma_f(\Delta_n, \xi_{\Delta_n})| < \varepsilon,\ (\forall)\ n \geqslant N$$

și deci $\sigma_f(\Delta_n, \xi_{\Delta_n}) \to L (n \to \infty)$.

($\Leftarrow$). Fie $L \in \mathbf{R}$ cu proprietatea din enunț și să arătăm că $\lim_{\nu(\Delta)\to 0} \sigma_f(\Delta, \xi_\Delta) = L$, $(\forall)\, \xi_\Delta \in \Xi_\Delta$. Presupunem contrariul; atunci $(\exists)\, \varepsilon > 0$ cu proprietatea: $(\forall)\, \eta > 0$, $(\exists)\, \Delta \in \mathfrak{T}$ cu $\nu(\Delta) < \eta$ și $(\exists)\, \xi_\Delta \in \Xi_\Delta$ a.î. $|L - \sigma_f(\Delta, \xi_\Delta)| > \varepsilon$. Luînd succesiv $\eta := \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$ rezultă că $(\exists)$ șirul $(\Delta_n)_{n\geqslant 1} \subseteq \mathfrak{T}$ cu $\nu(\Delta_n) < \frac{1}{n}$, $(\exists)$ șirul $(\xi_{\Delta_n})_{n\geqslant 1}$, cu $\xi_{\Delta_n} \in \Xi_{\Delta_n}$, a.î. $|L - \sigma_f(\Delta_n, \xi_{\Delta_n})| > \varepsilon$, $(\forall)\, n \geqslant 1$ (2). Evident însă $\nu(\Delta_n)\to 0$, deci cf. ipotezei $\sigma_f(\Delta_n, \xi_{\Delta_n})\to L (n\to\infty)$, ceea ce contrazice relația (2). Rămîne că f este R-integrabilă și $\int_a^b f = L$.

Corolar 1. *Fie $f:[a, b]\to\mathbf{R}$ o funcție* **R**-*integrabilă. Atunci $(\forall)\, (\Delta_n)_{n\geqslant 1}$ un șir de diviziuni ale lui $[a, b]$ cu $\nu(\Delta_n)\to 0 (n\to\infty)$ și $(\forall)\, (\xi_{\Delta_n})_{n\geqslant 1}$ un șir de mulțimi de puncte intermediare, cu ξ_{Δ_n} asociată lui Δ_n, rezultă că șirul sumelor Riemann $(\sigma_f(\Delta_n, \xi_{\Delta_n}))_{n\geqslant 1}$ este convergentă la $\int_a^b f$.*

Corolar 2. *Fie $f:[a, b]\to\mathbf{R}$ o funcție R-integrabilă. Atunci*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + \frac{k}{n}(b - a)\right) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f.$$

In particular, dacă $a = 0$ și $b = 1$, avem:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{1}{n}\right) = \int_0^1 f$$

Dem. $(\forall)\ n \geqslant 1$, fie Δ_n diviziunea „echidistantă" definită de punctele $\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right)_{k=\overline{0,n}}$ și fie $\xi_{\Delta_n} := \left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right)_{k=\overline{1,n}}$. Atunci $\nu(\Delta_n) = \frac{b-a}{n} \to 0$ $(n \to \infty)$. Aplicăm mai departe Cor. 1.

9.1.5. Definiție. Fie $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ o funcție mărginită și $\Delta = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$ o diviziune a lui $[a, b]$. Numărul $\inf f([x_{i-1}, x_i])$ (resp. $\sup f([x_{i-1}, x_i])$) se notează cu $m_i(f)$ (resp. $M_i(f)$) sau simplu cu m_i (resp. M_i) $(i = \overline{1, n})$. Numărul $s_f(\Delta) := \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1})$ (resp. $S_f(\Delta) := \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1})$) se numește *suma Darboux inferioară* (resp. *superioară*) asociată funcției f și diviziunii Δ. Numărul $\sup_{\Delta \in \mathfrak{T}} s_f(\Delta)$ (resp. $\inf_{\Delta \in \mathfrak{T}} S_f(\Delta)$), unde $\mathfrak{T} := \mathfrak{T}_{[a,b]}$, se numește *integrala Darboux inferioară* (resp. *superioară*) a funcției f și se notează cu $\underline{\int_a^b} f$ sau $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx$ $\left(\text{resp. } \overline{\int_a^b} f \text{ sau } \overline{\int_a^b} f(x)\,dx\right)$. Funcția f se numește *integrabilă Darboux* dacă $\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$; numărul astfel obținut se numește *integrala Darboux* a funcției f pe $[a, b]$.

Din definiția dată rezultă imediat proprietățile:

1) Dacă notăm $J_i := [x_{i-1}, x_i]$ $(i = \overline{1, n})$, putem scrie

$$s_f(\Delta) = \sum_{i=1}^{n} m_i |J_i|,\ S_f(\Delta) := \sum_{i=1}^{n} M_i |J_i|$$

2) Dacă $M := \sup f([a, b])$, $m := \inf f([a, b])$ și $\|f\|_\infty := \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|$, atunci avem:

$$0 \leqslant M_i - m_i = \omega_f(J_i) \leqslant M - m \leqslant 2\,\|f\|_\infty,\ (\forall)\ i = \overline{1, n}$$

3) $S_f(\Delta) - s_f(\Delta) = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) \leqslant \nu(\Delta) \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)$

4) $S_f(\Delta) - s_f(\Delta) = \sum_{i=1}^{n} \omega_f(J_i) \cdot |J_i| = \sum_{i=1}^{n} \text{dia } f(J_i) \cdot |J_i|$

5) $S_f(\Delta) - s_f(\Delta) \leqslant \max_{i=1,n} (M_i - m_i) \cdot (b - a)$

6) Dacă $|f(x) - f(y)| \leqslant \alpha$, $(\forall)\ x, y \in J_i \Rightarrow S_f(\Delta) - s_f(\Delta) \leqslant \alpha(b - a)$

Exemplul 1. Fie $f : [0, 1] \to \mathbf{R}$ *o funcție definită astfel* $f(x) = 1$ *dacă* $x \in (0, 1]$ *și* $f(0) = 0$. *Atunci* f *este integrabilă Darboux.*

Fie $\Delta = \{0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = 1\}$ o diviziune a lui $[0, 1]$. Evident $m_1 = 0$, $M_1 = 1$ și $m_i = M_i = 1$, $(\forall)\ i = \overline{2, n}$, deci

$$s_f(\Delta) = \sum_{i=2}^{n} 1 \cdot (x_i - x_{i-1}) = 1 - x_1,\ S_f(\Delta) = \sum_{i=1}^{n} 1 \cdot (x_i - x_{i-1}) = 1$$

Atunci $\overline{\int_0^1} f = 1$ și $1 - \nu(\Delta) \leqslant s_f(\Delta) \leqslant 1$, deci $1 - \nu(\Delta) \leqslant \underline{\int_0^1} f \leqslant 1$, $(\forall)\ \Delta$ o diviziune a lui $[0, 1]$, de unde rezultă evident că $\underline{\int_0^1} f = 1$. Prin urmare $\underline{\int_0^1} f = \overline{\int_0^1} f = 1$, deci f este integrabilă Darboux.

Exemplul 2. *Fie* $f:[0,1]\to\mathbf{R}$ *o funcție definită astfel* $f(x)=x$. *Atunci* f *este integrabilă Darboux.*

Fie $\Delta=\{0=x_0<x_1<\ldots<x_n=1\}$ o diviziune a lui $[0,1]$. Evident $m_i=x_{i-1}$, $M_i=x_i$, $(\forall)\ i=\overline{1,n}$, deci

$$S_f(\Delta)-s_f(\Delta)=\sum_{i=1}^{n}(M_i-m_i)(x_i-x_{i-1})=\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})^2\leqslant$$

$$\leqslant\nu(\Delta)\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})=\nu(\Delta)\cdot 1=\nu(\Delta)$$

Din considerente geometrice (Fig. 37) rezultă că $s_f(\Delta)\leqslant\frac{1}{2}\leqslant S_f(\Delta)$, $(\forall)\ \Delta\in\mathfrak{T}$, deci $\underline{\int}_0^1 f\leqslant\frac{1}{2}\leqslant\overline{\int}_0^1 f$ și deci

$$s_f(\Delta)\leqslant\underline{\int}_0^1 f\leqslant\overline{\int}_0^1 f\leqslant S_f(\Delta),\ (\forall)\ \Delta\in\mathfrak{T}$$

și deci

$$0\leqslant\overline{\int}_0^1 f-\underline{\int}_0^1 f\leqslant S_f(\Delta)-s_f(\Delta)\leqslant\nu(\Delta),(\forall)\ \Delta\in\mathfrak{T},$$

de unde rezultă că $\overline{\int}_0^1 f=\underline{\int}_0^1 f$ etc.

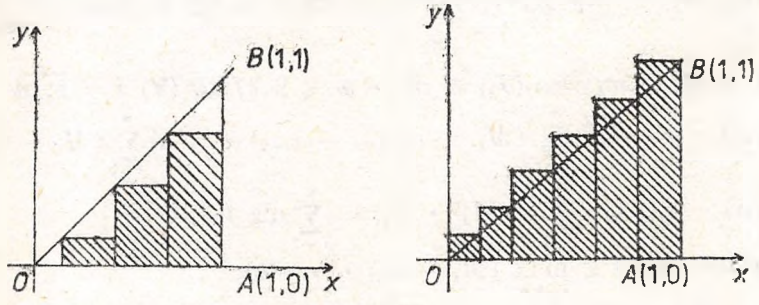


Fig. 37

Exemplul 3. *Fie* $f:[0,1]\to\mathbf{R}$ *o funcție definită astfel* $f(x)=x^2$. *Atunci* f *este integrabilă Darboux și integrala sa Darboux este egală cu* $\frac{1}{3}$.

Fie $(\Delta_n)_{n\geqslant 1}$ un șir de diviziuni ale lui $[0,1]$ definit astfel $\Delta_n:=\left\{0<\frac{1}{n}<\right.$ $\left.<\frac{2}{n}\ldots<\frac{n-1}{n}<1\right\}$. Atunci

$$S_f(\Delta_n)=\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^2}\cdot\frac{1}{n}=\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}\to\frac{1}{3}$$

Cum $\overline{\int}_0^1 f\leqslant S_f(\Delta_n)$, $(\forall)\ n\geqslant 1$, rezultă $\overline{\int}_0^1 f\leqslant\frac{1}{n}$

Analog avem :

$$s_f(\Delta_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(k-1)^2}{n^2} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n} k-1)^2 = \frac{(n-1)\,n(2n-1)}{6n^3} \to \frac{1}{3}$$

Cum $\underline{\int}_0^1 f \geq s_f(\Delta_n)$, $(\forall)\ n \geq 1$, rezultă $\underline{\int}_0^1 f \geq \frac{1}{3}$.

Așadar $\frac{1}{3} \leq \underline{\int}_0^1 f \leq \overline{\int}_0^1 f \leq \frac{1}{3}$, deci f este integrabilă Darboux și integrala sa Darboux este egală cu $\frac{1}{3}$.

9.1.6. Propoziție. *Fie* $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ *o funcție mărginită și* $\Delta_1, \Delta_2 \in \mathfrak{T}_{[a,b]}$ *cu* $\Delta_1 \subseteq \Delta_2$. *Atunci avem* $1^\circ\ \nu(\Delta_1) \geq \nu(\Delta_2)$; $2^\circ\ s_f(\Delta_1) \leq s_f(\Delta_2)$; $3^\circ\ S_f(\Delta_1) \geq S_f(\Delta_2)$; $4^\circ\ S_f(\Delta_2) - s_f(\Delta_2) \leq S_f(\Delta_1) - s_f(\Delta_1)$

Dem. 1° Evident.

2° Notăm Δ_1 cu Δ^* și Δ_2 cu Δ și fie $J^*\ J^*, \ldots, J_p^*$ (resp. $J_1, J_2, \ldots, J_n$) intervalele parțiale ale diviziunii Δ^* (resp. Δ). Evident (fig. 38) $(\forall)\ i \in \overline{1, n}$, $(\exists)\ k \in \overline{1, p}$ a.î. $J_i \subseteq J_k^*$

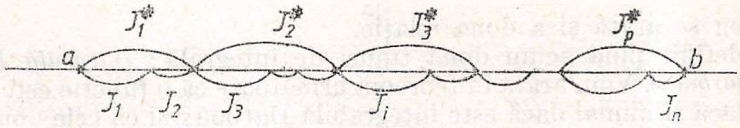


Fig. 38

Deoarece $\sum_{J_i \subseteq J_k^*} |J_i| = |J_k^*|$, $(\forall)\ k = \overline{1, p}$ și deoarece

$$n_k^* \leq m_i,\ M_k^* \geq m_i,\ (\forall)\ J_i \subseteq J_k^*,$$

rezultă

$$s_f(\Delta^*) = \sum_{k=1}^{p} m_k^* |J_k^*| = \sum_{k=1}^{p} \Big(\sum_{i=\overline{1,n}, J_i \subseteq J_k^*} m_k^* |J_i| \Big) \leq \sum_{k=1}^{p} \Big(\sum_{i=\overline{1,n}, J_i \subseteq J_k^*} m_i |J_i| \Big) = s_f(\Delta)$$

3° Se arată la fel ca 2°, iar 4° rezultă din 2° și 3°.

Corolar 1. *Fie* $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ *o funcție mărginită. Atunci* $(\forall)\ \Delta_1, \Delta_2 \in \mathfrak{T}_{[a,b]}$ *avem* : $s_f(\Delta_1) \leq S_f(\Delta_2)$.

Dem. Din P.9.1.6. deducem :

$$s_f(\Delta_1) \leq s_f(\Delta_1 \cup \Delta_2) \text{ și } S_f(\Delta_1 \cup \Delta_2) \leq S_f(\Delta_2)$$

Cum evident $s_f(\Delta) \leq S_f(\Delta)$, $(\forall)\ \Delta \in \mathfrak{T}_{[a,b]}$, rezultă că $s_f(\Delta_1) \leq S_f(\Delta_2)$.

Corolar 2. *Fie* $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ *o funcție mărginită. Atunci* $(\forall)\ \Delta_1, \Delta_2 \in \mathfrak{T}_{[a,b]}$ *avem* :

$$s_f(\Delta_1) \leq \underline{\int}_a^b f \leq \overline{\int}_a^b f \leq S_f(\Delta_2)$$

Dem. Aplicăm Cor. 1 și T.2.3.21 Cor.1.

Observație. Vom formula adeseori P.9.1.6. și Cor.1 astfel : Cînd diviziunea Δ crește, atunci suma Darboux s (resp. S) crește (resp. descrește). Orice sumă Darboux s este mai mică sau egală decît orice sumă Darboux S.

9.1.7. Propoziție. *Fie* $f:[a, b]\to\mathbf{R}$ *o funcție mărginită. Atunci* $(\forall)\ \Delta\in\mathfrak{T}_{[a,b]}$ *avem* :

1° $s_f(\Delta)\leqslant\sigma_f(\Delta,\ \xi_\Delta)\leqslant S_f(\Delta),\ (\forall)\ \xi_\Delta\in\Xi_\Delta$;

2° $s_f(\Delta)=\inf\limits_{\xi_\Delta}\sigma_f(\Delta,\xi_\Delta),\ S_f(\Delta)=\sup\limits_{\xi_\Delta}\sigma_f(\Delta,\ \xi_\Delta)$.

Dem. 1° Fie $\Delta=\{a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b\}$ și $\xi_\Delta=(\xi_i)_{i=\overline{1,n}}$ fixați și să punem $J_i:=[x_{i-1},\ x_i]$ $(i=\overline{1,\ n})$. Atunci avem :

$$m_i\leqslant f(\xi_i)\leqslant M_i,\ (\forall)\ i=\overline{1,\ n},$$

deci

$$s_f(\Delta)=\sum_{i=1}^{n}m_i|J_i|\leqslant\sum_{i=1}^{n}|J_i|\,f(\xi_i)\leqslant\sum_{i=1}^{n}|J_i|\ M_i=S_f(\Delta)\ \text{etc.}$$

2° Evident $(\forall)\ i=\overline{1,\ n}$, $(\exists)\ (\xi_i^k)_{k\geqslant1}\subseteq J_i$ a.î. $f(\xi_i^k)\to m_i(k\to\infty)$. Atunci $\xi_\Delta^k:=(\xi_i^k)_{i=\overline{1,n}}\in\Xi_\Delta\ (\forall)\ k\geqslant1$ și avem :

$$\lim_{k\to\infty}\sigma_f(\Delta,\ \xi_\Delta^k)=\lim_{k\to\infty}\sum_{i=1}^{n}|J_i|\,f(\xi_i^k)=\sum_{i=1}^{n}m_i|J_i|=s_f(\Delta)$$

Din P. 2.3.22.(2°) deducem că $s_f(\Delta)=\inf\limits_{\xi_\Delta}\sigma_f(\Delta,\ \xi_\Delta)$.

Analog se arată și a doua relație.

Am definit pînă acum două tipuri de integrală : *integrala Riemann* și *integrala Darboux*. Vom arăta în teorema următoare că o funcție este integrabilă Riemann dacă și numai dacă este integrabilă Darboux și că cele două integrale coincid. După aceasta vom spune în continuare despre o funcție că este *integrabilă* și vom vorbi despre *integrala ei*, fără alte precizări.

9.1.8. Teoremă (D a r b o u x). *Fie* $f:[a,\ b]\to\mathbf{R}$ *o funcție mărginită. Atunci cond.* 1°—4° *sînt echivalente:*

1° f *este integrabilă Riemann*;

2° f *este integrablilă Darboux*;

3° $(\forall)\ \varepsilon>0$, $(\exists)\ \Delta$ *o diviziune a lui* $[a,\ b]$ *a.î.* $S_f(\Delta)-s_f(\Delta)\leqslant\varepsilon$;

4° $(\forall)\ \varepsilon>0$, $(\exists)\ \eta>0$ *a.î.* $S_f(\Delta)-s_f(\Delta)\leqslant\varepsilon,\ (\forall)\ \Delta\in\mathfrak{T}_{[a,b]},\ \nu(\Delta)\leqslant\eta$.

Dem. 1° $\Rightarrow$ 4°. Fie $L:=\int_a^b f$ și $\varepsilon>0$ fixat. Atunci $(\exists)\ \eta>0$ a.î.

$$|L-\sigma_f(\Delta,\ \xi_\Delta)|\leqslant\varepsilon/2,\ (\forall)\ \Delta\in\mathfrak{T}_{[a,b]},\ \nu(\Delta)\leqslant\eta,$$

unde ξ_Δ este o mulțime de puncte intermediare asociată lui Δ. Fie $\Delta\in\mathfrak{T}_{[a,b]}$ cu $\nu(\Delta)\leqslant\eta$, fixată; $\Delta=\{a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b\}$. Atunci

$$L-\frac{\varepsilon}{2}\leqslant\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\,(x_i-x_{i-1})\leqslant L+\frac{\varepsilon}{2},\ (\forall)\ \xi_i\in[x_{i-1},\ x_i],$$

deci

$$L-\frac{\varepsilon}{2}\leqslant\sum_{i=1}^{n}\inf_{\xi_i\in[x_{i-1},\ x_i]}f(\xi_i)\,(x_i-x_{i-1})\leqslant\sum_{i=1}^{n}\sup_{\xi_i\in[x_{i-1},\ x_i]}f(\xi_i)\leqslant L+\frac{\varepsilon}{2}$$

și deci

$$L-\frac{\varepsilon}{2}\leqslant s_f(\Delta)\leqslant S_f(\Delta)\leqslant L+\frac{\varepsilon}{2}$$

Așadar,

$$S_f-s_f\leqslant\varepsilon,\ (\forall)\ \Delta\in\mathfrak{T}_{[a,b]},\ \nu(\Delta)<\eta$$

$4° \Rightarrow 3°$. Evident.

$3° \Rightarrow 2°$. Evident avem (fig. 39) :

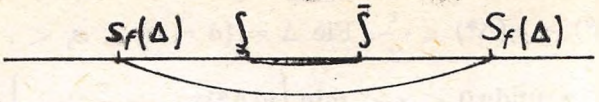


Fig. 39

$$\overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f \leqslant S_f(\Delta) - s_f(\Delta), \ (\forall)\ \Delta \in \mathfrak{T}_{[a,b]}$$

Fie $\varepsilon > 0$ fixat. Cf. $3°(\exists)\ \Delta_0 \in \mathfrak{T}_{[a,b]}$ cu $S_f(\Delta_0) - s_f(\Delta_0) < \varepsilon$. Atunci $0 \leqslant \overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f \leqslant \varepsilon$ și cum termenul din mijloc nu depinde de ε, rezultă că este 0, deci $\overline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} f$ și deci f este integrabilă Darboux.

$2° \Rightarrow 3°$. Fie $L = \underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$ și $\varepsilon > 0$ fixat. Cum $L = \sup_{\Delta} s_f(\Delta) = \inf_{\Delta} S_f(\Delta)$ $(\exists)\ \Delta_1,\ \Delta_2, \in \mathfrak{T}_{[a,b]}$ a.î.

$s_f(\Delta_1) \geqslant L - \frac{\varepsilon}{2}$ și $S_f(\Delta_2) \leqslant L + \frac{\varepsilon}{2}$. Fie $\Delta := \Delta_1 \cup \Delta_2$; atunci

$$s_f(\Delta) \geqslant s_f(\Delta_1) \geqslant L - \frac{\varepsilon}{2},\ S_f(\Delta) \leqslant S_f(\Delta_2) \leqslant L + \frac{\varepsilon}{2},$$

deci

$$S_f(\Delta) - s_f(\Delta) \leqslant \left(L + \frac{\varepsilon}{2}\right) - \left(L - \frac{\varepsilon}{2}\right) = \varepsilon \text{ (fig. 40).}$$

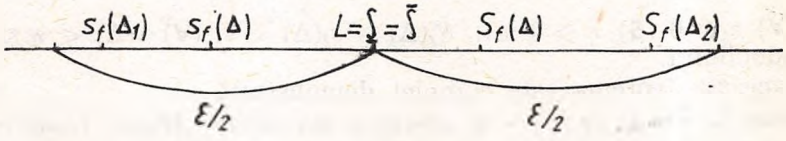


Fig. 40

$4° \Rightarrow 1°$. Am arătat că $4° \Rightarrow 3° \Leftrightarrow 2°$, deci $\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f = L$. Fie $\varepsilon > 0$ fixat. Cf. lui $4°$ $(\exists)\ \eta > 0$ a.i.

$$S_f(\Delta) - s_f(\Delta) \leqslant \varepsilon,\ (\forall)\ \Delta \in \mathfrak{T} = \mathfrak{T}_{[a,b]},\ \nu(\Delta) < \eta \qquad (1)$$

Evident însă $(\forall)\ \Delta \in \mathfrak{T}$ și $(\forall)\ \xi_\Delta$ o mulțime de puncte intermediare asociată lui Δ, avem :

$$s_f(\Delta) \leqslant L \leqslant S_f(\Delta);\ s_f(\Delta) \leqslant \sigma_f(\Delta, \xi_\Delta) \leqslant S_f(\Delta) \qquad (2)$$

Din (1) și (2) deducem :

$$|L - \sigma_f(\Delta, \xi_\Delta)| \leqslant S_f(\Delta) - s_f(\Delta) \leqslant \varepsilon,\ (\forall)\ \Delta \in \mathfrak{T},\ \nu(\Delta) < \eta,$$

unde ξ_Δ este o mulțime arbitrară de puncte intermediare asociată lui Δ.

Prin urmare, f este integrabilă și $\int_a^b f = L$.

$3° \Rightarrow 4°$. Fixăm $\varepsilon > 0$. Cf. $3°$ $(\exists)\ \Delta^* = \{a = x_0^* < x_1^* \leqslant \ldots x_p^* = b\} \in \mathfrak{T} = \mathfrak{T}_{[a,b]}$ a.î. $S_f(\Delta^*) - s_f(\Delta^*) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Fie $\Delta = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\} \in \mathfrak{T}$ fixată cu $\nu(\Delta) < \eta$, unde $0 < \eta < \min\left\{\nu(\Delta^*), \frac{\varepsilon}{2p(M-m)}\right\}$. Atunci avem:

$$S_f(\Delta) - s_f(\Delta) = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) =$$

$$= \sum{}'(M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) + \sum{}''(M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}),$$

unde

$$\sum{}' := \sum_{i=\overline{1,n}, J_i \cap \Delta^* \neq \emptyset}, \quad \sum{}'' := \sum_{k=1}^{p} \Big(\sum_{i=\overline{1,n}, J_i \subseteq J_k^*} \Big),$$

$$J_i := [x_{i-1}, x_i],\ J_k^* := [x_{k-1}^*, x_k^*]\ (i = \overline{1, n};\ k = \overline{1, p})$$

Evident avem $\sum{}' \leqslant p(M-m)\,\nu(\Delta) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Deoarece $M_i - m_i \leqslant M_k^* - m_k^*$, dacă $J_i \subseteq J_k^*$ și deoarece

$$\sum_{i=\overline{1,n}, J_i \subseteq J_k^*} (x_i - x_{i-1}) \leqslant |J_k^*| = x_k^* - x_{k-1}^*,$$

rezultă

$$\sum{}'' \leqslant \sum_{k=1}^{p} (M_k^* - m_k^*)(x_k^* - x_{k-1}^*) \leqslant \frac{\varepsilon}{2},$$

prin urmare

$$S_f(\Delta) - s_f(\Delta) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Așadar, $(\forall)\ \varepsilon > 0\ (\exists)\ \eta > 0$ a.î. $S_f(\Delta) - s_f(\Delta) \leqslant \varepsilon$, $(\forall)\ \nu(\Delta) < \eta$ și condiția 4^c este îndeplinită.

Cu aceasta teorema este complet demonstrată.

Corolar 1. *Fie $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ o funcție mărginită. Atunci f este integrabilă Riemann $\Leftrightarrow$ f este integrabilă Darboux. În acest caz cele două integrale coincid i.e.* $\int_a^b f = \underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$.

Corolar 2. *Fie $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ o funcție mărginită. Atunci f este integrabilă $\Leftrightarrow (\forall)/(\exists)\ (\Delta_n)_{n\geqslant 1}$ un șir de diviziuni ale lui $[a, b]$ cu $\nu(\Delta_n) \to 0$ a.î. $S_f(\Delta_n) - s_f(\Delta_n) \to 0$ $(n \to \infty)$.*

Dem. $(\Rightarrow)$ Fie $\varepsilon > 0$ fixat și $\eta > 0$ dat de T.9.1.8. $(4°)$. Atunci $(\exists)\ N \geqslant 1$ a.î. $\nu(\Delta_n) \leqslant \eta, (\forall)\ n \geqslant N$, deci $S_f(\Delta_n) - s_f(\Delta_n) \leqslant \varepsilon$, $(\forall)\ n \geqslant N$ etc.

Corolar 3. *Fie $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ o funcție mărginită. Atunci cond. $1°$—$3°$ sînt echivalente:*

$1°$ f este integrabilă;

$2°$ $(\exists)\ (\Delta_n)_{n\geqslant 1}$ un șir de diviziuni ale lui $[a, b]$, cu $\nu(\Delta_n) \to 0$, a.î. $(\forall)(\xi_{\Delta_n})_{n\geqslant 1}$ un șir de mulțimi de puncte intermediare cu ξ_{Δ_n} asociată lui Δ_n, rezultă că șirul sumelor Riemann $(\sigma_f(\Delta_n, \xi_{\Delta_n}))_{n\geqslant 1}$ este convergent;

3° $(\forall)$ $n \geqslant 1$ *şi* $(\forall)$ $a + \dfrac{k-1}{n}(b-a) \leqslant \xi_n^k \leqslant a + \dfrac{k}{n}(b-a)$ $(k = \overline{1, n})$,

rezultă că şirul numeric $\left(\dfrac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k^n)\right)_{n\geqslant 1}$ *este convergent.*

Dem. $1^\circ \Rightarrow 3^\circ$. Fie $\Delta_n := \left(a + \dfrac{k}{n}(b-a)\right)_{k=\overline{1,n}}$ şi $\xi_{\Delta_n} := (\xi_n^k)_{k=\overline{1,n}}$. Atunci $\nu(\Delta_n) = \dfrac{b-a}{n} \to 0$ $(n \to \infty)$ şi $\sigma_f(\Delta_n, \xi_{\Delta_n}) = \dfrac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_n^k)$, $(\forall)$ $n \geqslant 1$, deci (T. 9.1.4. Cor. 1) $(\sigma_f(\Delta_n, \xi_{\Delta_n}))_{n\geqslant 1}$ este convergent $\left(\text{către } \int_a^b f\right)$.

$3^\circ \Rightarrow 2^\circ$. Evident. Luăm $\Delta_n := \left(a + \dfrac{k}{n}(b-a)\right)_{k=\overline{1,n}}$ $(n \geqslant 1)$.

$2^\circ \Rightarrow 1^\circ$. Să arătăm mai întîi că $(\exists)$ $L \in \mathbf{R}$ cu proprietatea:

$(\forall)$ $(\Delta_n)_{n\geqslant 1} \subseteq \mathfrak{T} = \mathfrak{T}_{[a,b]}$ cu $\nu(\Delta_n) \to 0$ şi $(\forall)$ $\xi_{\Delta_n} \in \Xi_{\Delta_n} (n \geqslant 1)$, avem $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_f(\Delta_n, \xi_{\Delta_n}) = L$.

Într-adevăr, fie $(\Delta_n')_{n\geqslant 1} \subseteq \mathfrak{T}$ şi $(\Delta_n'')_{n\geqslant 1} \subseteq \mathfrak{T}$ cu $\nu(\Delta_n') \to 0$ şi $\nu(\Delta_n'') \to 0$ şi fie $(\xi_{\Delta_n'})_{n\geqslant 1}$ şi $(\xi_{\Delta_n''})_{n\geqslant 1}$ cu semnificaţiile standard. Definim şirurile $(\Delta_n)_{n\geqslant 1}$ şi $(\xi_{\Delta_n})_{n\geqslant 1}$ astfel: $\Delta_{2n+1} := \Delta_n'$, $\Delta_{2n} := \Delta_n''$, $\xi_{\Delta_{2n+1}} := \xi_{\Delta_n'}$ şi $\xi_{\Delta_{2n}} := \xi_{\Delta_n''}$ $(n \geqslant 1)$. Atunci $\nu(\Delta_n) \to 0$ deci şirul $(\sigma_f(\Delta_n, \xi_\Delta))_{n\geqslant 1}$ este, cf. ipotezei, convergent. Cum $(\sigma_f(\Delta_n', \xi_{\Delta_n'}))_{n\geqslant 1}$ şi $(\sigma_f(\Delta_n'', \xi_{\Delta_n''}))_{n\geqslant 1}$ sînt subşiruri ale lui $(\sigma_f(\Delta_n, \xi_{\Delta_n}))_{n\geqslant 1}$ ele converg către aceeaşi limită. Cu aceasta existenţa lui L cu proprietatea de mai sus este arătată.

Fie mai departe $(\Delta_n^0)_{n\geqslant 1} \subseteq \mathfrak{T}$ cu $\nu(\Delta_n^0) \to 0$, fixat. Arătăm că $(\forall)$ $\varepsilon > 0$, $(\exists)$ $\Delta \in (\Delta_n^0)_{n\geqslant 1}$ a.î.

$$|L - \sigma_f(\Delta, \xi_\Delta)| < \varepsilon, (\forall)\ \xi_\Delta \in \Xi_\Delta \qquad (1)$$

Presupunînd contrariul, putem determina un şir $(\xi_{\Delta_n^0})_{n\geqslant 1}$, cu $\xi_{\Delta_n^0} \in \Xi_{\Delta_n^0}$ a.î. $|L - \sigma_f(\Delta_n^0, \xi_{\Delta_n^0})| > \varepsilon$, $(\forall)$ $n \geqslant 1$. Cum $\sigma_f(\Delta_n^0, \xi_{\Delta_n^0}) \to L$, obţinem o contradicţie. Aşadar (1) este adevărat.

Din (1) şi din P.9.1.7. deducem:

$$|L - s_f(\Delta)| < \varepsilon \wedge |L - S_f(\Delta)| < \varepsilon,$$

deci

$$S_f(\Delta) - s_f(\Delta) \leqslant |S_f(\Delta) - L| + |L - s_f(\Delta)| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon,$$

prin urmare (T.9.1.8.(3°)) f este integrabilă.

Corolar 4. *Fie* $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ *o funcţie monotonă. Atunci* f *este integrabilă*

Dem. Presupunem f monoton crescătoare neconstantă şi fie $\varepsilon > 0$ fixat. Fie $\Delta = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\} \in \mathfrak{T}_{[a,b]}$ a.î. $\nu(\Delta) < \dfrac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}$. Evident avem $M_i - m_i \leqslant f(x_i) - f(x_{i-1})$, $(\forall)$ $i = \overline{1, n}$, deci

$$S_f(\Delta) - s_f(\Delta) = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) \leqslant$$

$$\leqslant \nu(\Delta) \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - f(x_{i-1})) = \nu(\Delta)(f(b)) - f(a)) < \varepsilon$$

Prin urmare (T.9.1.8.(3°)) f este integrabilă.

Corolar 5. *Fie* $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ *o funcție continuă. Atunci* f *este integrabilă.*

Dem. Fie $\varepsilon>0$ fixat. Funcția f fiind continuă și $[a,b]$ compact, este uniform continuă (T.5.7.8.), deci $(\exists)\ \eta>0$ a.î.

$$|f(x)-f(y)|<\frac{\varepsilon}{b-a},\ (\forall)\ x,y\in[a,b],\ |x-y|<\eta$$

Fie acum $\Delta=\{a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b\}\in\mathfrak{T}_{[a,b]}$ cu $\nu(\Delta)<\eta$. Atunci

$$|f(x)-f(y)|<\frac{\varepsilon}{b-a},\ (\forall)\ x,y\in[x_{i-1},x_i],\ (i=\overline{1,n}).$$

deci

$$M_i-m_i=\sup_{x,y\in[x_{i-1},x_i]}|f(x)-f(y)|\leqslant\frac{\varepsilon}{b-a}$$

Atunci

$$S_f(\Delta)-s_f(\Delta)=\sum_{i=1}^{n}(M_i-m_i)(x_{i-1}-x_i)\leqslant\frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})=\varepsilon,$$

prin urmare (T.9.1.8.) f este integrabilă.

Corolar 6. *Fie* $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ *o funcție care are un număr finit de discontinuități și este mărginită (resp. discontinuitățile sînt de prima speță). Atunci* f *este integrabilă.*

Dem. Fie $\varepsilon>0$ fixat și $\{x_1^*,x_2^*,\ldots x_p^*\}$ mulțimea discontinuităților lui f. Notăm $M=\sup_{x\in[a,b]}f(x)$, $m=\inf_{x\in[a,b]}f(x)$ și fie $0<\eta_1<\dfrac{\varepsilon}{8p(M-m)}$. Mulțimea $A:=[a,b]\setminus\bigcup_{j=1}^{p}(x_j^*-\eta_1,x_j^*+\eta_1)$ fiind compactă și f continuă pe $[a,b]\setminus\{x_1^*,x_2^*,\ldots,x_p^*\}\supseteq A$, este uniform continuă pe A (T.5.7.8.), deci $(\exists)\ \eta_2>0$ a.î.

$$|f(x)-f(y)|<\frac{\varepsilon}{2(b-a)},\ (\forall)\ x,y\in A,\ |x-y|<\eta_2 \tag{1}$$

Fie acum $\eta:=\min\{\eta_1,\eta_2\}$ și $\Delta=\{a=x_0<x_1\ldots<x_p=b\}\in\mathfrak{T}_{[a,a]}$ fixată cu $\nu(\Delta)<\eta$. Atunci din (1) rezultă

$$M_i-m_i=\sup_{x,y\in[x_{i-1},x_i]}|f(x)-f(y)|\leqslant\frac{\varepsilon}{2(b-a)},\ \text{dacă}\ [x_i,x_{i-1}]\subseteq A, \tag{2}$$

deci

$$S_f(\Delta)-s_f(\Delta)=\sum_{i=1}^{n}(M_i-m_i)(x_i-x_{i-1})=$$

$$=\sum{}'(M_i-m_i)(x_i-x_{i-1})+\sum{}''(M_i-m_i)(x_i-x_{i-1}),$$

unde în $\sum'$(resp. $\sum''$) sumăm după toți indicii $i\in\overline{1,n}$ pentru care $[x_{i-1},x_i]\subseteq A$ (resp. $(\exists)\ j\in\overline{1,p}$ cu $[x_{i-1},x_i]\cap(x_j^*-\eta_1,x_1^*+\eta_1)\neq\emptyset$).
Ținînd seama de (2) și de faptul că $M_i-m_i\leqslant M-m$, $(\forall)\ i=\overline{1,n}$ avem:

$$S_f(\Delta)-s_f(\Delta)\leqslant\frac{\varepsilon}{2(b-a)}\sum{}'(x_i-x_{i-1})+(M-m)\sum{}''(x_i-x_{i-1})\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\varepsilon}{2(b-a)}(b-a)+(M-m)p(2\eta_1+2\eta)\leqslant\frac{\varepsilon}{2}+$$

$$+4p\eta_1(M-m)\leqslant\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

Aşadar $(\forall)\ \varepsilon > 0$, $(\exists)\ \Delta \in \mathfrak{T}_{[a,\,b]}$ a.î. $S_f(\Delta) - s_f(\Delta) < \varepsilon$, deci (T.9.1.8.) f este integrabilă.

9.1.9. Definiţie. Fie $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ o funcţie; vom spune că f este *integrabilă* dacă este integrabilă Riemann sau integrabilă Darboux (v. T.9.1.8. Cor. 1). Fie acum $I \subseteq R$ un interval arbitrar şi $f : I \to \mathbf{R}$ o funcţie. Vom spune că f este *integrabilă* pe intervalul compact $[a, b] \subseteq I$, dacă $f|_{[a,\,b]}$ este integrabilă; vom scrie atunci $\int_a^b f := \int_a^b f|_{[a,\,b]}$; funcţia f se numeşte *local integrabilă*, dacă $(\forall)\ x \in I$, $(\exists)\ \varepsilon_x > 0$ a.î. f este integrabilă pe $J_x = I \cap [x - \varepsilon_x, x + \varepsilon_x]$.

Evident dacă f este integrabilă pe orice interval compact $J \subseteq I$, atunci f este local integrabilă. Vom arăta mai tîrziu (T.9.2.3.) că este adevărată şi afirmaţia reciprocă.

9.1.10. Propoziţie. *Fie $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ o funcţie integrabilă. Atunci f este mărginită.*

Dem. Fie $L = \int_a^b f$ şi $\varepsilon = 1$. Aplicînd definiţia integralei rezultă că $(\exists)$ $\Delta \in \mathfrak{T}_{[a,\,b]}$ a.î.

$$|\sigma_f(\Delta, \xi_\Delta) - L| \leqslant 1,\ (\forall)\ \xi_\Delta \in \Xi \tag{1}$$

Dacă $\Delta = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$, relaţia (1) se transcrie

$$L - 1 \leqslant \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) f(\xi_i) \leqslant L + 1,\ (\forall)\ \xi_\Delta = (\xi_i)_{i=\overline{1,n}} \in \Xi_\Delta$$

Fixăm $j = \overline{1, n}$ şi fie $\xi_\Delta \in \Xi_\Delta$ de forma $\{\xi_1^0, \ldots, \xi_{j-1}^0, \xi_j, \xi_{j+1}^0 \ldots, \xi_n^0\}$ cu $\xi_i^0 (i \neq j)$ fixaţi şi ξ_i arbitrar. Atunci, $(\forall)\ \xi_j \in [x_{j-1}, x_j]$ avem

$$\frac{(L-1) - \sum\limits_{i \neq j} (x_i - x_{i-1}) f(\xi_j^0)}{x_j - x_{j-1}} \leqslant f(\xi_j) \leqslant \frac{(L+1) + \sum\limits_{i \neq j} (x_i - x_{i-1}) f(\xi_i^0)}{x_j - x_{j-1}}$$

Prin urmare, f este mărginită pe $[x_{j-1}, x_j]$ şi cum $j = \overline{1, n}$ a fost arbitrar, concludem că f este mărginită pe $\bigcup\limits_{i=1}^{n} [x_{j-1}, x_j] = [a, b]$.

Corolar 1. *Fie $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ o funcţie nemărginită. Atunci f nu este integrabilă.*

9.1.11. Definiţie. O mulţime $A \subseteq \mathbf{R}$ se numeşte:

· *neglijabilă* sau *de măsură Lebesgue nulă* (prescurtat L-măsură nulă), dacă $(\forall)\ \varepsilon > 0\ (\exists)\ (J_n)_{n \geqslant 1}$ un şir de intervale din $\mathbf{R}$ a.î. $\bigcup\limits_{n \geqslant 1} J_n \supseteq A$ şi $\sum\limits_{n \geqslant 1} |J_n| \leqslant \varepsilon$;

· *de măsură Jordan nulă* (prescurtat, J-măsură nulă), dacă $(\forall)\ \varepsilon > 0$ $(\exists)\ (J_k)_{k=\overline{1,n}}$ un şir finit de intervale din $\mathbf{R}$ a.î. $\bigcup\limits_{k=1}^{n} J_n \supseteq A$ şi $\sum\limits_{k=1}^{n} |J_k| < \varepsilon$.

O proprietate punctuală „P" pe $\mathbf{R}$ (continuitate, derivabilitate etc.) vom spune că are loc *aproape peste tot* (prescurtat a.p.t.) pe o mulţime $A \subseteq \mathbf{R}$, dacă $(\exists)\ A_0 \subseteq A$ neglijabilă a.î. „P" are loc pe $A \setminus A_0$. Astfel o funcţie $f : A \to \mathbf{R}$ este continuă (resp. derivabilă, nulă etc.) aproape peste tot, dacă $(\exists)\ A_0 \subseteq A$ neglijabilă a.î. f este continuă (resp. derivabilă, nulă etc.) pe $A \setminus A_0$.

În D.9.1.11. putem lua intervalele $J_k (k \geqslant 1)$, resp. $k = \overline{1, n}$) deschise, închise sau semideschise.

Exemplul 1. Mulțimea $A = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right\}$ *este de măsură Jordan nulă.*

Fie $\varepsilon > 0$ fixat și $N \geqslant 1$ cu $\frac{1}{N} < \frac{\varepsilon}{2}$. Atunci $\frac{1}{n} \in J_0 := \left[0, \frac{\varepsilon}{2}\right]$,

$(\forall)\ n > N$ și $\frac{1}{k} \in J_k := \left[\frac{1}{k} - \frac{\varepsilon}{4N}, \frac{1}{k} + \frac{\varepsilon}{4N}\right]$, $(\forall)\ k \in \overline{1, N}$, deci

$$\bigcup_{k=0}^{N} J_k \supseteq A \text{ și } \sum_{k=0}^{N} |J_k| = \frac{\varepsilon}{2} + N \cdot \frac{\varepsilon}{2N} = \varepsilon \text{ etc,}$$

Exemplul 2. Mulțimea $\mathbf{N}$ *este de măsură Lebesgue nulă.*

Fie $\varepsilon > 0$ fixat și $J_n = \left[\frac{1}{n} - \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}, \frac{1}{n} + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}\right]$ $(n \geqslant 1)$. Atunci

$\bigcup_{n \geqslant 1} J_n \supseteq \mathbf{N}$ și $\sum_{n \geqslant 1} |J_n| = \sum_{n \geqslant 1} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon$ etc.

Exemplul 3. Funcția lui Dirichlet $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *este egală cu 1 aproape peste tot.*

Într-adevăr, f este egală cu 1 pe $\mathbf{R} \setminus Q$ și Q este numerabilă, deci neglijabilă.

9.1.12. Propoziție. 1° *Dacă* $A \subseteq \mathbf{R}$ *este de măsură Lebesgue (resp. Jordan) nulă și* $A_0 \subseteq A$, *atunci* A_0 *este de măsură Lebesgue (resp. Jordan) nulă;*

2° *Dacă* $A \subseteq \mathbf{R}$ *este de măsură Lebesgue (resp. Jordan) nulă, atunci* $\mathring{A} = \emptyset$, *deci* $\mathbf{R} \setminus A$ *este densă în* $\mathbf{R}$;

3° *Dacă* $A \subseteq \mathbf{R}$ *este numerabilă (resp. finită), atunci* A *este de măsură Lebesgue (resp. Jordan) nulă:*

4° *O reuniune numerabilă (resp. finită) de mulțimi de măsură Lebesgue (resp. Jordan) nulă, este o mulțime de măsură Lebesgue (resp. Jordan) nulă;*

5° *Dacă* $A \subseteq \mathbf{R}$ *este de măsură Jordan nulă, atunci* A *este măsură Lebesgue nulă. Dacă în plus* A *este compactă, atunci este adevărată și afirmația reciprocă.*

Dem. 1°. Evident.

2° Presupunem $\mathring{A} \neq \emptyset$, deci $(\exists)\ J \subseteq \mathbf{R}$ un interval nedegenerat cu $J \subseteq A$; fie $0 < \varepsilon < |J|$ fixat. Cum A este de măsură Lebesgue nulă, $(\exists)\ (J_n)_{n \geqslant 1}$ un șir de intervale incluse în $\mathbf{R}$ a.î. $\sum_{n \geqslant 1} J_n \supseteq A \supseteq J$ și $\sum_{n \geqslant 1} |J_n| \leqslant \varepsilon$. Atunci $\varepsilon < |J| \leqslant \sum_{n \geqslant 1} |J_n| \leqslant \varepsilon$, absurd. Rămîne că $\mathring{A} = \emptyset$.

3° Fie A numerabilă și $\{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$ o enuemerare a lui A. Fixăm $\varepsilon > 0$ și fie $J_n = \left[a_n - \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}, a_n + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}\right]$ $(n \geqslant 1)$. Atunci

$$\bigcup_{n \geqslant 1} J_n \supseteq A \text{ și } \sum_{n \geqslant 1} |J_n| = \sum_{n \geqslant 1} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon \text{ etc.}$$

4° Fie $(A_n)_{n \geqslant 1}$ un șir de mulțimi incluse în $\mathbf{R}$ de măsură Lebesgue nulă și $A := \bigcup_{k \geqslant 1} A_n$. Fixăm $\varepsilon > 0$. Atunci $(\forall)\ n \geqslant 1$ $(\exists)\ (J_k^n)_{k \geqslant 1}$ un șir de intervale incluse în $\mathbf{R}$ cu $\bigcup_{n \geqslant 1} J_k^n \supseteq A_n$ și $\sum_{k \geqslant 1} |J_k^n| < \frac{\varepsilon}{2^n}$. Evident familia $(J_k^n)_{n,\, k \geqslant 1}$ este numerabilă, acoperă A și avem $\sum_{n,\, k \geqslant 1} |J_k^n| = \sum_{n \geqslant 1} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon$, prin urmare A este de măsură Lebesgue nulă.

5° Fie $A \subseteq \mathbf{R}$ de măsură Jordan nulă și $\varepsilon > 0$ fixat. Atunci $(\exists)\ (J_k^*)_{k\in\overline{1,N}}$ un șir finit de intervale în $\mathbf{R}$ a.î. $\bigcup_{k=1}^{N} J_k^* \supseteq A$ și $\sum_{k=1}^{N} |J_k^*| < \varepsilon$. Evident însă există $(J_n)_{n\geqslant 1}$ un șir de intervale cu proprietatea că $\bigcup_{n\geqslant 1} J_n = J_1^*$ și $\sum_{n\geqslant 1} |J_n| = |J_1^*|$. Considerăm mai departe familia numerabilă $\{J_2^*, \ldots, J_N^*, J_1, J_2, J_3, \ldots\}$

Să presupunem acum A compactă și de măsură Lebesgue nulă. Fixăm $\varepsilon > 0$. Există atunci $(J_n)_{n\geqslant 1}$ un șir de intervale deschise incluse în $\mathbf{R}$ a.î. $\bigcup_{n\geqslant 1} J_n \supseteq A$ și $\sum_{n\geqslant 1} |J_n| < \varepsilon$. Mulțimea A fiind compactă, $(\exists)\ N \geqslant 1$ cu proprietatea că $\bigcup_{k=1}^{N} J_k \supseteq A$. Dum $\sum_{k=1}^{N} |J_k| \leqslant \sum_{n\geqslant 1} |J_n| < \varepsilon$, conchidem că A este de măsură Jordan nulă.

Corolar 1. *Mulțimile* $\mathbf{N}$, $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$ *sînt de măsură Lebesgue nulă. Orice interval nedegenerat inclus în* $\mathbf{R}$ *nu are măsura Lebesgue (resp. Jordan) nulă.*

9.1.13. Propoziție. *Fie* $I \subseteq \mathbf{R}$ *un interval și* $f : I \to \mathbf{R}$ *o funcție. Dacă f este nulă a.p.t., atunci f este nulă în punctele de continuitate. În particular, dacă f este continuă și nulă a.p.t., atunci f este identic nulă.*

Dem. Deoarece f este nulă a.p.t., $(\exists)\ A \subseteq I$ neglijabilă a.î. $f(x) = 0$, $(\forall)\ x \in I \setminus A$. Fie $x_0 \in I$ un punct în care f este continuă. Fixăm $\varepsilon > 0$ și fie $I_\varepsilon := I \cap [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$. Deoarece $A \neq \emptyset$, rezultă că $I_\varepsilon \nsubseteq A$, deci $I_\varepsilon \cap (I \setminus A) = \Phi$ și deci $(\exists)\ x_\varepsilon \in I_\varepsilon$ cu $f(x_\varepsilon) = 0$. Așadar $(\forall)\ n \geqslant 1$ $(\exists)\ x_n \in I$ a.î. $|x - x_n| \leqslant \frac{1}{n}$ și $f(x_n) = 0$. Evident $x_n \to 0$ $(n \to \infty)$, deci $f(x_0) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = 0$.

9.1.14. Teoremă (L e b e s g u e). *Fie* $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ *o funcție. Atunci f este integrabilă* $\Leftrightarrow$ *1° f este mărginită; 2° f este continuă pe* $[a, b]$ *cu excepția unei mulțimi neglijabile i.e. f este continuă a.p.t.*

Dem. ($\Rightarrow$). Condiția 1° rezultă din P.9.1.10. Să arătăm 2°. Fie $\varepsilon > 0$ fixat. Din T.9.1.8. (3°) rezultă că $(\exists)\ \Delta \in \mathfrak{T} = \mathfrak{T}_{[a,b]}$, $\Delta = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$ a.î.

$$\sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1})] = S_f(\Delta) - s_f(\Delta) < \varepsilon \tag{1}$$

Fie A mulțimea discontinuităților lui f, deci (P.5.5.12.(3°)) $A = \{x \in [a, b];\ \omega_f(x) > 0\} = \bigcup_{m\geqslant 1} A_{\frac{1}{m}}$ (2), unde am notat $A_r := \{x \in [a, b];\ \omega_f(x) \geqslant r\}$ $(r > 0)$. Dacă arătăm că $A_r (r > 0)$ este neglijabilă, din (2) și P.9.1.12. (4°) rezultă A neglijabilă. Fie deci $r > 0$ fixat, notăm A_r cu B și $J_i := [x_{i-1}, x_i]$ $(i = \overline{1, n})$. Dacă $x \in B \cap J_i$, avem :

$$r \leqslant \omega_f(x) \leqslant \omega_f(J_i) = M_i - m_i \tag{3}$$

Evident familia $\mathcal{A} := (J_i)_{i=\overline{1,n};\ J_i \cap B \neq \emptyset}$ acoperă B și ținînd seama de (1) și (3) deducem :

$$r \cdot \sum_{J_i \in \mathcal{A}} |J_i| \leqslant \sum_{J_i \in \mathcal{A}} (M_i - m_i)|J_i| \leqslant \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)|J_i| < \varepsilon,$$

deci $\sum_{J_i \in \mathcal{A}} |J_i| < \varepsilon_{r=1}$. Aceasta înseamnă că B este de măsură Jordan nulă, deci (P.9.1.12. (5°)) neglijabilă și deci A, este neglijabilă.

($\Leftarrow$) Fie f mărginită pe $[a, b]$ și A mulțimea discontinuităților lui f de măsură Lebesgue nulă, deci (P.5.5.12. (3°)) $A := \{x \in [a, b];\ \omega_f(x) > 0\}$. Fixez $\varepsilon > 0$, fie $0 < r < \dfrac{\varepsilon}{2(b-a)}$ și $A_0 := \{x \in [a, b];\ \omega_f(x) \geqslant r\}$. Deoarece $A_0 \subseteq A$, rezultă (P.9.1.12. (1°)) A_0 de măsură Lebesgue nulă. Din P.5.5.30. Cor. 1 rezultă A_0 închisă, deci (T.5.2.6.) A_0 compactă și deci (P.9.1.12 (5°)) A_0 este de măsură Jordan nulă, încît există $(J_k^*)_{k=\overline{1,p}}$ o familie de intervale disjuncte două cîte două și deschise relativ la $[a, b]$ cu proprietățile : $\bigcup_{k=1}^{p} J_k^* \supseteq A_0$ și $\sum_{k=1}^{p} |J_k^*| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2(M-m)}$. Mulțimea $\bigcup_{k=1}^{p} J_k^*$ fiind deschisă relativ la $[a, b]$, rezultă că mulțimea $A_1 := [a, b] \setminus \bigcup_{k=1}^{p} J_k^*$ este închisă (în $\mathbf{R}$), deci fiind și mărginită este compactă (T.5.2.6.). Cum $A_1 \subseteq [a, b] \setminus A_0$, avem $\omega_f(x) \leqslant r$, $(\forall)\ x \in A_1$, deci (P.5.5.31.) $(\exists)\ \eta > 0$ a.î.

$$\omega_f(M) < r,\ (\forall)\ M \subseteq A_1,\ \text{dia}\,(M) < \eta \tag{1}$$

Fie acum $\Delta = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$ o diviziune a lui $[a, b]$ formată din capetele intervalelor J_k^* $(k = \overline{1, p})$ și din puncte noi în afara acestor intervale (fig. 41) în așa fel încît $|J_i| < \eta$, dacă $J_i := [x_{i-1}, x_i]$ este diferit de $J_k^*(k = \overline{1, p})$

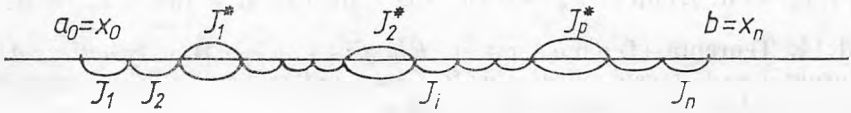


Fig. 41

Atunci din (1) rezultă

$$M_i - m_i = \omega_f(J_i) < r,\ (\forall)\ i = \overline{1, n},\ J_i \notin (J_k^*)_{k=\overline{1,p}},$$

deci

$$S_f(\Delta) - s_f(\Delta) = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\,|J_i| = \sum_{i=\overline{1,n},\ J_i \neq J_k^*} (M_i - m_i)\,|J_i| +$$

$$+ \sum_{k=1}^{p} (M_k - m_k)\,|J_k^*| \leqslant r(b-a) + (M-m) \sum_{k=1}^{p} |J_k^+| < \frac{\varepsilon}{2} +$$

$$+ (M-m)\,\frac{\varepsilon}{2(M-m)} = \varepsilon$$

Așadar $(\forall)\ \varepsilon > 0$ $(\exists)\ \Delta \in \mathfrak{T}_{[a,\,b]}$ a.î. $S_f(\Delta) - s_f(\Delta) < \varepsilon$, prin urmare f este integrabilă.

Corolar 1. *Fie $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ o funcție continuă (resp. monotonă, resp. etajată, resp. posedă o mulțime finită de puncte de discontinuitate și este mărginită) Atunci f este integrabilă.*

Dem. Evident f este mărginită. Fie A mulțimea discontinuităților lui f Dacă f este etajată, atunci A este finită. Dacă f este monotonă, atunci (P.5.5.18 Cor. 1) A este cel mult numerabilă. În fiecare caz A este neglijabilă (P.9.1.12.(3)) deci (T.9.1.14 .) f este integrabilă.

Corolar 2. (P a u l d u B o i s - R a y m o n d). *Fie* $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ *o funcție mărginită. Atunci* f *este integrabilă* $\Leftrightarrow(\forall)\ r>0$ *mulțimea* $\{x\in[a,b];\ \omega_f(x)\geqslant r\}$ *este de măsură Jordan (resp. Lebesgue) nulă.*

Dem. Fie A mulțimea discontinuităților lui f și $A_r=\{x\in[a,b];\ \omega_f(x)\geqslant r\}$ $(r>0)$.

$(\Rightarrow)$ Evident (P.5.5.12.(3°)) $A_r\subseteq A$ și A neglijabilă (T.9.1.14.), deci (P.9.1.12.(1°)) A_r este neglijabilă. Din P.5.5.30. Cor. 1 avem A_r închisă și cum $A_r\subseteq[a,b]$ avem (T.5.2.6.) A_r compactă, prin urmare (P.9.1.12. (5°)) este de măsură Jordan nulă.

$(\Leftarrow)$ Dacă fiecare $A_r(r>0)$este de măsură Jordan nulă, atunci(P.9.1.12.(5°)) A_r este de măsură Lebesgue nulă. Cum $A=\bigcup_{n\geqslant 1}A_{\frac{1}{n}}$, deducem (P.9.1.12.(4°)) că A este neglijabilă și deci (T.9.1.14) f este integrabilă.

Corolar 3. *Fie* $I\subseteq\mathbf{R}$ *un interval (resp. compact) și* $f:I\to\mathbf{R}$ *o funcție riglată. Atunci* f *este local integrabilă (resp. integrabilă).*

Dem. Din T.5.5.29. Cor. 1 rezultă că f este continuă pe I cu excepția unei mulțimi cel mult numerabile, deci (P.9.1.12 (3°) f este continuă a.p.t., iar din (P.5.5.28. Cor. 1) rezultă că f este mărginită pe fiecare mulțime compactă $K\subseteq I$. Fixăm $K\subseteq I$ un interval compact; atunci $f|_K$ este mărginită și continuă a.p.t., deci (T.9.1.14.) $f|_K$ este integrabilă. Prin urmare f este local integrabilă.

Observația 1. Condiția de integrabilitate din Cor. 3 este suficientă și nu numaidecît necesară. Spre exemplu, funcția $f(x)=\sin\frac{1}{x}$, dacă $x\in[-1,1]\setminus\{0\}$ și $f(0)=0$, este integrabilă (cf. T.9.1.14.) și 0 este o discontinuitate de speța a doua.

9.2. Proprietăți generale ale funcțiilor integrabile

9.2.1. Lemă. *Fie* $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ *o funcție integrabilă,* Δ *o diviziune a lui* $[a,b]$, ξ_Δ *o mulțime de puncte intermediare asociată lui* Δ *și* $a<c<b$. *Punem* $f_1:=f|_{[a,c]}$, $f_2:=f|_{[c,b]}$, $\Delta_1:=(\Delta\cap[a,c])\cup\{c\}$ *și* $\Delta_2:=\{c\}\cup(\Delta\cap[c,b])$. *Atunci avem:*

$$|\sigma_{f_1}(\Delta_1,\xi_{\Delta_1})+\sigma_{f_2}(\Delta_2,\xi_{\Delta_2})-\sigma_f(\Delta,\xi_\Delta)|\leqslant\nu(\Delta)\|f\|_\infty \tag{1}$$

Dem. Fie $\Delta:=\{a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b\}$ și $j=\overline{1,n}$ cu $[x_{j-1},x_j]\ni c$. Atunci

$$\sigma_{f_1}(\Delta_1,\xi_{\Delta_1})=\sum_{i=1}^{j-1}|J_i|f(\xi_i)+(c-x_{j-1})f(c),$$

$$\sigma_{f_2}(\Delta_2,\xi_{\Delta_2})=\sum_{i=j}^{n}|J_i|f(\xi_i)+(x_j-c)f(c),$$

deci

$$\sigma_{f_1}(\Delta_1,\xi_{\Delta_1})+\sigma_{f_2}(\Delta_2,\xi_{\Delta_2})=\sum_{i=1}^{n}|J_i|f(\xi_i)+(x_j-x_{j-1})f(c)$$

Cum $x_j-x_{j-1}\leqslant\nu(\Delta)$ și $|f(c)|\leqslant\|f\|_\infty$, obținem egalitatea(1).

9.2.2. Teoremă. *Fie* $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ *o funcție. Atunci* f *este integrabilă* $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow(\forall)/(\exists)c\in(a,b)$ *funcțiile* $f|_{[a,c]}$ *și* $f|_{[c,b]}$ *sînt integrabile. În acest caz avem :*

$$\int_a^b f=\int_a^c f+\int_c^b f.$$

Dem. ($\Rightarrow$). Punem $f_0:=f|_{[a,c]}$ și fie $\varepsilon>0$ fixat. Funcția f fiind integrabilă, (cf. T.9.1.8.(4°) ($\exists$) $\eta>0$ a.î.

$$S_f(\Delta)-s_f(\Delta)\leqslant\varepsilon\ (\forall)\ \Delta\in\mathfrak{T}_{[a,b]},\ \nu(\Delta)\leqslant\eta \tag{1}$$

Fie acum $\Delta_0\in\mathfrak{T}_{[a,c]}$ cu $\nu(\Delta_0)<\eta$, fixată. Evident ($\exists$) $\Delta\in\mathfrak{T}_{[a,b]}$ cu $\Delta\cap[a,c]=\Delta_0$ și $\nu(\Delta)<\eta$. Atunci se deduce imediat inegalitatea :

$$S_{f_0}(\Delta_0)-s_{f_0}(\Delta_0)\leqslant S_f(\Delta)-s_f(\Delta) \tag{2}$$

Din (1) și (2) rezultă $S_{f_0}(\Delta_0)-s_{f_0}(\Delta_0)\leqslant\varepsilon$, prin urmare (T.9.1.8.) f_0 este integrabilă.

Analog se arată că $f|_{[c,b]}$ este integrabilă.

($\Leftarrow$). Fie $L_1:=\int_a^c f$, $L_2:=\int_c^b f$, $(\Delta_n)_{n\geqslant1}$ un șir de diviziuni ale lui $[a,b]$ cu $\nu(\Delta_n)\to0$ $(n\to\infty)$ și $(\xi_{\Delta_n})_{n\geqslant1}$ un șir de mulțimi de puncte intermediare, cu ξ_{Δ_n} asociat lui $\Delta_n(n\geqslant1)$. Punem mai departe $f_1:=f|_{[a,c]}$, $f_2:=f|_{[c,b]}$, $\Delta_n^1:=$ $=(\Delta_n\cap[a,c])\cup\{c\}$, $\Delta_n^2:=\{c\}\cup(\Delta_n\cap([c,b])$, $\xi_{\Delta_n^1}:=(\xi_{\Delta_n}\cap[a,c])\cup\{c\}$, $\xi_{\Delta_n^2}:=\{c\}\cup(\xi_{\Delta_n}\cap[a,c]$, $(n\geqslant1)$. Cf. Lemei, $(\forall)$ $n\geqslant1$, avem :

$$|\sigma_{f_1}(\Delta_n^1,\ \xi_{\Delta_n^1})+\sigma_{f_2}(\Delta_n^2\ \xi_{\Delta_n^2})-\sigma f(\Delta_n,\ \xi_{\Delta_n})|\leqslant\nu(\Delta_n)\,\|f\|_\infty \tag{1}$$

Evident $\nu(\Delta_n^k)\leqslant\nu(\Delta_n)$, $(\forall)\ n\geqslant1\wedge k=\overline{1,2}$, deci $\nu(\Delta_n^k)\to0$ $(n\to\infty)$ și deci (T.9.1.4.) $\sigma_{f_k}(\Delta_n^k,\xi_{\Delta_n^k})\to L_k(k=\overline{1,2})$. Atunci din(1) prin trecere la limită rezultă

$\sigma_f(\Delta_n,\ \xi_{\Delta_n})\to L_1+L_2\ (n\to\infty)$

Prin urmare (T.9.1.4.)f este integrabilă și avem $\int_a^b f=L_1+L_2$.

Corolar 1. *Fie* $I\subseteq\mathbf{R}$ *un interval și* $f:I\to\mathbf{R}$ *o funcție continuă. Atunci* $(\forall)$, $a,b,c\in I$, *avem relația :* $\int_a^b f=\int_a^c f+\int_c^b f$.

Dem. Dacă $a<c<b$ aplicăm direct T.9.2.2. Dacă $a<b<c$, avem :

$$\int_a^c f=\int_a^b f+\int_b^c f=\int_a^b f-\int_c^b f\Leftrightarrow\int_a^b f=\int_a^c f+\int_c^b f$$

Observație. Relația $\int_a^b f=\int_a^c f+\int_c^b f$ se numește „proprietatea de aditivitate a integralei ca funcție de interval".

Corolar 2. *Fie* $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ *o funcție integrabilă. Atunci avem :*

$$\int_a^b f=\int_{a+}^b f=\int_{a+}^{b-} f=\int_{a+}^{b-} f,\ \textit{unde}\int_{a+}^b f=\lim_{c\searrow a}\int_c^b f\ \textit{etc.}$$

Dem. Evident avem :

$$\left|\int_a^b f - \int_c^b f\right| = \left|\int_a^c f\right| \leqslant (c-a)\sup_{a\leqslant x\leqslant c}|f(x)| \leqslant (c-a)\|f\|_\infty, (\forall)\, c \in (a, b]$$

Trecem mai departe la limită, $c \searrow a$.

9.2.3. Propoziție. *Fie* $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ *o funcție. Atunci cond.* 1°—3° *sînt echivalente.* 1° f *integrabilă*;

2° $(\forall)\ [c, d] \subseteq [a, b]$, *rezultă că* $f|_{[c,d]}$ *este integrabilă*;

3° $(\exists)\ (J_k)_{k=\overline{1,n}}$ *o familie finită de intervale compacte a căror reuniune este egală cu* $[a, b]$ *a.î.* $f|_{J_k}$ *este integrabilă,* $(\forall)\ k = \overline{1, n}$;

Dem. 1° $\Rightarrow$ 2°. f fiind integrabilă, rezultă (T.9.2.2.) că $g := f|_{[a,d]}$ este integrabilă, deci (T.9.2.2.) $g_{[c,d]}$ este integrabilă. Evident $g|_{[c,d]} = f|_{[c,d]}$.

2°$\Rightarrow$3°. Fie $(J_k)_{k=\overline{1,n}}$ o familie arbitrară de intervale compacte a căror reuniune este egală cu $[a, b]$, spre exemplu $J_k := \left[a + \frac{k-1}{n}(b-a),\ a + \frac{k}{n}(b-a)\right]$. Din 2° rezultă că $f|_{J_k}$ este integrabilă $(\forall)\ k = \overline{1, n}$.

3°$\Rightarrow$1°. Fie $(J_k)_{k=\overline{1,n}}$ o familie de intervale compacte cu proprietățile din enunț. Evident putem presupune, utilizînd T.9.2.2., J_k de forma $[x_{k-1}, x_k]$, unde $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. Din T.9.2.2. rezultă succesiv că $f|_{J_1 \cup J_2}$ este integrabilă, apoi $f|_{J_1 \cup J_2 \cup J_3}$ etc. În fine, aplicînd principiul inducției conchidem că $= f|_{J_1 \cup J_2 \cup \ldots \cup J_n}$ este integrabilă.

9.2.4. Propoziție. *Fie* $I \subseteq \mathbf{R}$ *un interval și* $f : I \to \mathbf{R}$ *o funcție. Atunci cond.* 1°—3° *sînt echivalente* :

1° f *local integrabilă*;

2° $(\forall)\ J \subseteq I$ *un interval compact, rezultă că* $f|_J$ *este integrabilă*;

3° f *continuă a.p.t. și local mărginită.*

Dem. 1°$\Rightarrow$2°. Fie $J \subseteq I$ un interval compact fixat $(\forall)\ x \in J$, $(\exists)$, cf. 1°, $\varepsilon_x > 0$ a.î. f este integrabilă pe $J_x := I \cap [x - \varepsilon_x, x + \varepsilon_x]$. Evident familia $(V_{\varepsilon_x}(x))_{x\in J}$ unde $V_{\varepsilon_x}(x) = (x - \varepsilon_x, x + \varepsilon_x)$, constituie o acoperire deschisă a lui J, deci J fiind compact, $(\exists)\ x_1, x_2, \ldots, x_n \in J$ a.î. $(V_{\varepsilon_{x_i}}(x_i))_{i=\overline{1,n}}$ acoperă J. Atunci $\bigcup_{i=1}^{n} J_{x_i} = J$ și f este integrabilă pe fiecare inteval $J_{x_i} (i = \overline{1, n})$, prin urmare (P.9.2.3.) $f|_J$ este integrabilă.

2°$\Rightarrow$3°. Fie $J \subseteq I$ un interval compact fixat. Cf. lui 2° $f|_J$ este integrabilă deci (T. 9.1.14.) $f|_J$ este mărginită și continuă a.p.t. și deci f este mărginită pe J și continuă a.p.t. pe J. Am obținut că f este local mărginită. Evident $(\exists)(J_n)_{n\geqslant 1}$ un șir de intervale compacte cu $\bigcup_{n\geqslant 1} J_n = \mathring{J}$. Din raționamentul făcut mai sus rezultă că $(\forall)\ n \geqslant 1$ $(\exists)\ A_n \subseteq J_n$ neglijabilă a.î. f este continuă pe $J_n \setminus A_n$. Atunci (P.9.1.12.(4°)) $A := \bigcup_{n\geqslant 1} A_n$ este neglijabilă și f este continuă pe fiecare $J_n \setminus A$ $(n \geqslant 1)$, deci pe $\bigcup_{n\geqslant 1}(J_n \setminus A) = \mathring{J} \setminus A$, prin urmare f este continuă a.p.t.

3°$\Rightarrow$1°. Fie $x \in I$ fixat. Cf. 3° $(\exists)\ \varepsilon_x > 0$ a.î. f este mărginită pe $J_x := I \cap [x - \varepsilon_x, x + \varepsilon_x]$. Cum f este continuă a.p.t., rezultă că $f|_{J_x}$ este continuă a.p.t., deci (T.9.1.14). $f|_{J_x}$ este integrabilă și deci f este integrabilă.

Să prezentăm în continuare cîteva rezultate cu privire la operațiile algebrice și de compunere a funcțiilor integrabile.

Corolar 1. *Fie $I \subseteq \mathbf{R}$ un interval și $f : I \to \mathbf{R}$ o funcție local mărginită, în particular mărginită. Atunci f local integrabilă $\Leftrightarrow$ f continuă a.p.t.*

9.2.5. Teoremă. *Fie $f, g : [a, b] \to \mathbf{R}$ două funcții integrabile și $\lambda \in \mathbf{R}$ un număr. Atunci $f \pm g$ și λf sînt integrabile și avem relațiile :*

$$\int_a^b (f \pm g) = \int_a^b f \pm \int_a^b g\,; \quad \int_a^b \lambda f = \lambda \int_a^b f$$

Dem. Fie $(\Delta_n)_{n\geqslant 1}$ un șir de diviziuni ale lui $[a, b]$ cu $\nu(\Delta_n) \to 0$ $(n \to \infty)$ și $(\xi_{\Delta_n})_{n\geqslant 1}$ un șir de mulțimi de puncte intermediare, cu ξ_{Δ_n} asociată lui $\Delta_n (n \geqslant 1)$. Atunci (T.9.1.4.) $\sigma_f(\Delta_n, \xi_{\Delta_n}) \to \int_a^b f$ și $\sigma_g(\Delta_n, \xi_{\Delta_n}) \to \int_a^b g$. Evident însă avem : $\sigma_{f+g}(\Delta_n, \xi_{\Delta_n}) = \sigma_f(\Delta_n, \xi_{\Delta_n}) + \sigma_g(\Delta_n, \xi_{\Delta_n})$, $(\forall)\ n \geqslant 1$, de unde, prin trecere la limită, rezultă

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_{f+g}(\Delta_n, \xi_{\Delta_n}) = \int_a^b f + \int_a^b g$$

Prin urmare (T.9.1.4.) $f + g$ este integrabilă și avem $\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g$.

Analog se arată și a doua relație.

9.2.6. Teoremă. *Fie $f, g : [a, b] \to \mathbf{R}$ două funcții integrabile. Atunci fg este integrabilă.*

Dem. $(\forall)\ \Delta \in \mathfrak{T} = \mathfrak{T}_{[a,b]}$ avem inegalitatea :

$$S_{fg}(\Delta) - s_{fg}(\Delta) \leqslant (S_f(\Delta) - s_f(\Delta))\, \|g\|_\infty + (S_g(\Delta) - s_g(\Delta))\, \|f\|_\infty \qquad (1)$$

Într-adevăr, fie $\Delta : = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$ fixată și $J_i : = [x_{i-1}, x_i]$ $(i = \overline{1, n})$. Evident avem :

$$(fg)(x) - (fg)(y) = (f(x) - f(y))\, g(x) + (g(x) - g(y))\, f(y),\ (\forall)\ x, y \in [a, b].$$

deci

$$|(fg)(x) - (fg)(y)| \leqslant |f(x) - f(y)| \cdot \|g\|_\infty + |g(x) - g(y)| \cdot \|f\|_\infty,\ (\forall)\ (x, y \in [a, b]$$

Ținînd seama (P.2.2.3.) că

$$\sup_{x,y\in J_i} |(fg)(x) - (fg)(y)| = M_i(fg) - m_i(fg),$$

$$\sup_{x,y\in J_i} |f(x) - f(y)| = M_i(f) - m_i(f),\ \sup_{x,y\in J_i} |g(x) - g(y)| = M_i(g) - m_i(g),$$

deducem :

$$M_i(fg) - m_i(fg) \leqslant (M_i(f) - m_i(f))\, \|g\|_\infty + (M_i(g) - m_i(g))\, \|f\|_\infty$$

Multiplicînd cu $x_i - x_{i-1}$ și sumînd după i, $i = \overline{1, n}$, obținem inegalitatea (1).

Fie acum $\varepsilon > 0$ fixat și $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$, a.î. $\varepsilon_1 \|g\|_\infty + \varepsilon_2 \|f\|_\infty \leqslant \varepsilon$ (2)

Cf. T.9.1.8.(3°) $(\exists)\ \Delta_1, \Delta_2 \in \mathfrak{T}$ a.î.

$$S_f(\Delta_1) - s_f(\Delta_1) \leqslant \varepsilon_1,\quad S_g(\Delta_2) - s_g(\Delta_2) \leqslant \varepsilon_2$$

Dacă $\Delta := \Delta_1 \cup \Delta_2$, avem (P.9.1.6.) :

$$S_f(\Delta) - s_f(\Delta) \leqslant \varepsilon_1, \quad S_g(\Delta) - s_g(\Delta) \leqslant \varepsilon_2 \tag{3}$$

Din (1), (2), (3) rezultă imediat că $S_{fg}(\Delta) - s_{fg}(\Delta) \leqslant \varepsilon$, prin urmare (T.9.1.8.(3°)) fg este integrabilă.

9.2.7. Teoremă. *Fie* $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ *o funcție integrabilă și* $g : [c, d] \to \mathbf{R}$ *o funcție continuă a.î.* $f([a, b]) \subseteq [c, d]$. *Atunci* $g \circ f$ *este integrabilă.*

Dem. Fie $\varepsilon > 0$ fixat. Funcția g fiind continuă și $[c, d]$ compact, este uniform continuă (T.5.7.8.), deci $(\exists)\ 0 < \eta < \varepsilon$ a.î.

$$|g(y_1) - g(y_2)| \leqslant \varepsilon \ \ (\forall)\ y_1, y_2, \in [c, d],\ |y_1 - y_2| < \eta$$

și deci

$$\operatorname{dia}(g(A)) \leqslant \varepsilon,\ \ (\forall)\ A \subseteq [c, d],\ \operatorname{dia}(A) < \eta \tag{1}$$

Funcția f fiind integrabilă, $(\exists)\ \Delta \in \mathfrak{T}_{[a,b]}$ cu $\nu(\Delta) < \eta$ a.î. $S_f(\Delta) - s_f(\Delta) \leqslant \eta^2$ (T.9.1.8.(3°)). Fie $\Delta = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$, $J_i = [x_{i-1}, x_i]$ și să punem

$$\widetilde{M}_i := \sup(g \circ f)(J_i),\ \ \widetilde{m}_i = \inf(g \circ f)(J_i),\ \ (i = \overline{1, n})$$

Din (D.9.1.5.(2°)) rezultă $\widetilde{M}_i - \widetilde{m}_i \leqslant 2\|g \circ f\|_\infty$, $(\forall)\ i = \overline{1, n}$. Fie $H := \{i = \overline{1, n}\ ;$ $\operatorname{dia} f(J_i) < \eta\}$ și $K := \{1, 2, \ldots n\} \setminus H$. Atunci $(\forall)\ i \in H$, avem (cf.(1)):

$$\widetilde{M}_i - \widetilde{m}_i = \operatorname{dia}(g \circ f)(J_i) = \operatorname{dia} g(f(J_i)) < \varepsilon, \tag{2}$$

iar dacă $i \in K$ avem

$$\eta \sum_{i \in K} |J_i| \leqslant \sum_{i \in K} \operatorname{dia} f(J_i) \cdot |J_i| \leqslant \sum_{i=1}^{n} \operatorname{dia} f(J_i)\, |J_i| =$$

$$= S_f(\Delta) - s_f(\Delta) \leqslant \eta^2,\ \text{deci} \sum_{i \in H} |J_i| \leqslant \eta < \varepsilon \tag{3}$$

Din (2) și (3) rezultă

$$\sum_{i=1}^{n} (\widetilde{M}_i - \widetilde{m}_i)|J_i| = \sum_{i \in H} (\widetilde{M}_i - \widetilde{m}_i)|J_i| + \sum_{i \in K} (\widetilde{M}_i - \widetilde{m}_i)|J_i| \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon \sum_{i \in H} |J_i| + 2\|g \circ \varphi\| \sum_{i \in K} |J_i| \leqslant ((b - a) + 2\|g \circ \varphi\|)\, \varepsilon$$

Așadar, $(\forall)\ \varepsilon > 0\ \ (\exists)\ \Delta \in \mathfrak{T}_{[a,b]}$ a.î. $S_{g \circ f}(\Delta) - s_{g \circ f}(\Delta) < \varepsilon'$, unde $\varepsilon' = ((b - a) +$ $+ 2\|g \circ \varphi\|_\infty)$, prin urmare (T.9.1.8.(3°)) $g \circ f$ este integrabilă.

Corolar 1. *Fie* $f, g : [a, b] \to \mathbf{R}$ *două funcții integrabile cu* $\inf g([a, b]) > 0$. *Atunci* $\dfrac{f}{g}$ *este integrabilă.*

Dem. Fie $\alpha := \inf g([a, b])$, $\beta := \sup g([a, b])$ și $h(x) = \dfrac{1}{x}$, $x \in [\alpha, \beta]$. Cum h este continuă, rezultă (T.9.2.7.) că $\dfrac{1}{g} = h \circ g$ este integrabilă, deci (T.9.2.6.) $f \cdot \dfrac{1}{g}$ este integrabilă.

Corolar 2. *Fie* $f, g : [a, b] \to \mathbf{R}$ *două funcții; prima integrabilă, iar a doua continuă și nenulă în fiecare punct. Atunci* $\frac{f}{g}$ *este integrabilă.*

Dem. Cum g este continuă are proprietatea Darboux (T.5.5.16.) și fiind nenulă avem $g > 0$ sau $g < 0$; presupunem $g > 0$. Cf. T.5.5.17.Cor.1. $(\exists)\ x_0 \in [a, b]$ a.î. $g(x_0) \leqslant g(x)$, $(\forall)\ x \in [a, b]$, deci $\inf g([a, b]) \geqslant g(x_0) > 0$. Aplicăm mai departe Cor. 1.

Observația 1. Compunerea a două funcții integrabile nu este numaidecît integrabilă.

Observația 2. Dacă $f, g : [a, b] \to \mathbf{R}$ sînt două funcții integrabile și $g(x) \neq 0$ $(\forall)\ x \in [a, b]$, nu rezultă numaidecît că $\frac{f}{g}$ este integrabilă.

Contraexemplu. Fie $f, g : [0, 1] \to \mathbf{R}$ definite astfel $f = 1$; $g(x) = x$, $(\forall)\ x \in [0, 1]$ și $g(0) = 1$. Evident f și g sînt integrabile și $\frac{f}{g}$ nu este integrabilă, deoarece $\frac{f}{g}$ nu este mărginită (P.9.1.10.).

9.2.8. Propoziție. *Fie* $f, g : [a, b] \to \mathbf{R}$ *două funcții integrabile a.î.* $f \geqslant g$. *Atunci* $\int_a^b f \geqslant \int_a^b g$. *In particular, dacă* $f \geqslant 0$, *avem* $\int_a^b f \geqslant 0$.

Dem. Fie $h := f - g$. Atunci h este integrabilă (T.9.2.5.) și $h \geqslant 0$. Fie $(\Delta_n)_{n \geqslant 1}$ un șir de diviziuni ale lui $[a, b]$ cu $\nu(\Delta_n) \to 0$ $(n \to \infty)$ și $(\xi_{\Delta_n})_{n \geqslant 1}$ un șir de mulțimi de puncte intermediare, cu ξ_{Δ_n} asociată lui Δ_n $(n \geqslant 1)$. Evident $\sigma_h(\Delta_n, \xi_{\Delta_n}) \geqslant 0$, $(\forall)\ n \geqslant 1$ și (T.9.1.4.) $\sigma_h(\Delta_n, \xi_{\Delta_n}) \to \int_a^b h$, deci $\int_a^b h \geqslant 0$ și deci $\int_a^b f - \int_a^b g = \int_a^b (f - g) \geqslant 0$ etc.

Corolar 1. *Fie* $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ *o funcție integrabilă. Dacă* $m \leqslant f \leqslant M$, *atunci* $m \leqslant \frac{1}{b - a} \int_a^b f \leqslant M$.

Dem. Evident avem:

$$m(b - a) = \int_a^b (b - a)\, dx \leqslant \int_a^b f \leqslant \int_a^b M(b - a) = M(b - a)$$

9.2.9. Propoziție. *Fie* $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ *o funcție integrabilă. Atunci* $|f|$ *este integrabilă și avem:*

$$\left| \int_a^b f \right| \leqslant \int_a^b |f| \leqslant (b - a)\, \|f\|_\infty$$

Dem. Fie $\Delta = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\} \in \mathfrak{T} = \mathfrak{T}_{[a,b]}$ fixată. Să arătăm inegalitatea

$$S_{|f|}(\Delta) - s_{|f|}(\Delta) \leqslant S_f(\Delta) - s_f(\Delta) \tag{1}$$

Într-adevăr, deoarece avem:

$$||f(x)| - |f(y)|| \leqslant |f(x) - f(y)|,\ (\forall)\ x, y \in [a, b],$$

notînd $J_i : [x_{i-1}, x_i]$ $(i = \overline{1, n})$, rezultă

$$M_i(|f|) - m_i(|f|) = \sup_{x, y \in J_i} (|f(x)| - |f(y)|) = \sup_{x, y \in J_i} |f(x) - f(y)| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{x, y \in J_i} |f(x) - f(y)| = \sup_{x, y \in J_i} (f(x) - f(y)) = M_i(f) - m_i(f), \quad (\forall)\ i = \overline{1, n}$$

deci

$$S_{|f|}(\Delta) - s_{|f|}(\Delta) = \sum_{i=1}^{n} (M_i(|f|) - m_i(|f|))\,|J_i| \leqslant \sum_{i=1}^{n} (M_i(f) - m_i(f))\,|J_i| =$$

$$= S_f(\Delta) - s_f(\Delta)$$

Cu aceasta relația (1) este arătată.

Fie acum $\varepsilon > 0$ fixat. Funcția f fiind integrabilă, $(\exists)\ \Delta \in \mathfrak{T}$ a.î. $S_f(\Delta) - s_f(\Delta) \leqslant \varepsilon$, deci cf. (1) avem $S_{|f|}(\Delta) - s_{|f|}(\Delta) \leqslant \varepsilon$ și deci (T.9.1.8.(3°)) $|f|$ este integrabilă.

Evident avem $-|f| \leqslant f \leqslant |f|$, deci $-\int_a^b |f| \leqslant \int_a^b f \leqslant \int_a^b |f|$ și deci $\left|\int_a^b f\right| \leqslant$ $\leqslant \int_a^b |f|$. În fine, deoarece $|f(x)| \leqslant \|f\|_\infty$, $(\forall)\ x \in [a, b]$, rezultă

$$\int_a^b |f| \leqslant \int_a^b \|f\|_\infty = \|f\|_\infty \cdot \int_a^b 1 = (b - a)\,\|f\|_\infty$$

Corolar 1. *Fie $I \subseteq \mathbf{R}$ un interval și $f : I \to \mathbf{R}$ o funcție local integrabilă. Atunci $(\forall)\ a, b \in I$ și $(\forall)\ J \subseteq I$ un interval compact care conține pe a și b, avem relația* $\left|\int_a^b f\right| \leqslant |b - a| \sup_{x \in J} |f(x)|$.

Corolar 2. *Fie $f, g : [a, b] \to \mathbf{R}$ două funcții integrabile. Atunci funcțiile $f \vee g$ și $f \wedge g$ sînt integrabile.*

Dem. Evident avem $f \vee g = \dfrac{f + g + |f - g|}{2}$ și $f \wedge g = \dfrac{f + g - |f - g|}{2}$.

Cum f și g sînt integrabile, rezultă (T.9.2.5.) $f \pm g$ este integrabilă deci (P.9.2.8.) $|f \pm g|$ este integrabilă, și deci (T.9.2.5.) $\dfrac{f + g \pm |f - g|}{2}$ este integrabilă.

Prin urmare $f \vee g$ și $f \wedge g$ este integrabilă.

Corolar 3. *Fie $\mathcal{R}\,[a, b]$ mulțimea tuturor funcțiilor $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ integrabile. Atunci* 1° $(\forall) f, g \in \mathcal{R}\,[a, b]$, $(\forall)\ \lambda \in \mathbf{R}$ *avem* $f \pm g$, λf, fg, $\dfrac{f}{g}$, *(dacă* $\inf_{x \in [a,b]} g(x) > 0$*),* $|f|$, $f \vee g$, $f \wedge g \in \mathcal{R}\,[a, b]$; 2° *Dacă punem* $F(f) = \int_a^b f, f \in \mathcal{R}\,[a, b]$, *rezultă că F este liniară, monoton crescătoare și* $|F(f)| \leqslant (b - a)\,\|f\|_\infty$ $(\forall)$, $f \in \mathcal{R}\,[a, b]$.

Observația 1. Există funcții neintegrabile cu modul integrabil. Fie, spre exemplu, $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ definită astfel $f(x) = 1$, dacă $x \in [0,1] \cap Q$ și $f(x) = -1$, dacă $x \in [0, 1] \setminus Q$. Atunci $|f| = 1$, deci $|f|$ este integrabilă, însă f nu este integrabilă (v.9.4.1. Exemplul 3).

Observația 2. Cor. 3 ne arată că $\mathcal{R}\,[a,b]$ *este o algebră reticulată, iar integrala* $\int_a^b$ *este o funcțională liniară, monotonă și continuă, definită pe* $\mathcal{R}\,[a,b]$ *înze-*

strat cu norma $\|\cdot\|_\infty$. Integrala nu este o funcțională multiplicativă: relația $\int_a^b fg = \left(\int_a^b f\right)\left(\int_a^b g\right)$ nu este adevărată pentru orice f și g din $\mathcal{R}[a, b]$.

Observația 3. Integrabilitatea funcțiilor $f \pm g$, λf, fg, $g \circ f$, $|f|$, $f \vee g$ etc. demonstrată în propozițiile precedente, poate fi arătată mai simplu, dacă utilizăm teorema lui Lebesgue (T.9.1.14). Fie spre exemplu f și g integrabile; atunci f și g sînt mărginite și continue a.p.t., de unde rezultă imediat că $f + g$ este mărginită și continuă a.p.t., prin urmare $f + g$ este integrabilă.

9.2.10. Teoremă (I Formulă de medie). *Fie* $f, g : [a, b] \to \mathbf{R}$ *două funcții integrabile cu* $g \geqslant 0$. *Atunci* $(\exists)\ \gamma \in [m, M]$, *unde* $m := \inf f([a, b])$ *și* $M := \sup f([a, b])$, *a.î.* $\int_a^b fg = \gamma \int_a^b g$. *În particular, dacă* $g = 1$, *avem* $\int_a^b f = \gamma (b - a)$.

Dem. Evident avem $m \leqslant f \leqslant M$, deci $mg \leqslant fg \leqslant Mg$ și deci

$$m \int_a^b g \leqslant \int_a^b fg \leqslant M \int_a^b g$$

(i) Dacă $\int_a^b g = 0$, atunci $\int_a^b fg = 0$, deci putem lua γ orice număr din $[m, M]$.

(ii) Dacă $\int_a^b g > 0$, atunci $\gamma := \dfrac{\int_a^b fg}{\int_a^b g} \in [m, M]$ și avem $\int_a^b fg = \gamma \int_a^b f$

Corolar 1. *Fie* $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ *o funcție continuă și* $g : [a, b] \to \mathbf{R}$ *o funcție integrabilă nenegativă. Atunci* $(\exists)\ \xi \in [a, b]$ *a.î.* $\int_a^b fg = f(\xi) \int_a^b g$. *În particular, dacă* $g = 1$, *avem* $\int_a^b f = (b - a) f(\xi)$.

Dem. Din T.9.2.10. rezultă că $(\exists)\ \gamma \in [m, M]$, unde $m = \inf f([a, b])$ și $M = \sup f([a, b])$, a.î. $\int_a^b fg = \gamma \int_a^b g$. Funcția f fiind continuă, există (T.5.5.17. Cor. 2) $x_0, x_1 \in [a, b]$ a.î. $f([a, b]) = [f(x_0), f(x_1)] = [m, M]$, deci $\gamma \in f([a, b])$ și deci $(\exists)\ \xi \in [a, b]$ cu $f(\xi) = \gamma$

Observația 1. Punctul ξ din Cor. 1 nu este numaidecît unic determinat.

Observația 2. Fie $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ o funcție integrabilă. Atunci numărul $\mu[f] := \dfrac{1}{b - a} \int_a^b f$ se numește *valoarea medie* a lui f pe $[a, b]$.

9.2.11. Lemă. *Fie* $f, g : [a, b] \to \mathbf{R}$ *două funcții integrabile și* $\Delta_n := \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$ *cu* $x_k := a + \dfrac{k}{n}(b - a)$. *Atunci* $(\forall)\ \alpha_i \in [m_i(f), M_i(f)]$ *și* $\beta_i \in [m_i(g), M_i(g)]$, *avem relația* $\lim\limits_{n \to \infty} \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i (x_i - x_{i-1}) = \int_a^b fg$.

Dem. Fie $L = \int_a^b fg$ și $\varepsilon > 0$ fixat. Deoarece $\nu(\Delta_n) \to 0$ $(n \to \infty)$, rezultă

că $\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}(fg)(x_i)\to\int_a^b fg\ (n\to\infty)$, deci $(\exists)\ N'\geqslant 1$ a.î.

$$\left|L-\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}(fg)(x_i)\right|<\frac{\varepsilon}{3},\ (\forall)\ n\geqslant N'.$$

Atunci $(\forall)\ n\geqslant N'$, avem:

$$\left|L-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\beta_i(x_i-x_{i-1})\right|\leqslant\left|L-\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}[(fg)(x_i)\right|+$$

$$+\left|\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}g(x_i)(f(x_i)-\alpha_i)\right|+\left|\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(g(x_i)-\beta_i)\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\varepsilon}{3}+\|g\|_\infty\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|f(x_i)-\alpha_i\right|+\|f\|_\infty\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|g(x_i)-\beta_i\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\varepsilon}{3}+\|g\|_\infty\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}(M_i(f)-m_i(f))+\|f\|_\infty\sum_{i=1}^{n}\frac{b-a}{n}(M_i(g)-m_i(g))\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\varepsilon}{3}+\|g\|_\infty(S_f(\Delta_n)-s_f(\Delta_n)+\|f\|_\infty(S_g(\Delta_n)-s_g(\Delta_n)).$$

Funcțiile f și g fiind integrabile, rezultă (T.9.1.8. Cor. 2) că $(\exists)\ N''\geqslant 1$ a.î.

$$S_f(\Delta_n)-s_f(\Delta_n)\leqslant\varepsilon/3\ \|g\|_\infty,\ S_g(\Delta_n)-s_g(\Delta_n)\leqslant\varepsilon/3\ \|f\|_\infty,\ (\forall)\ n\geqslant N'$$

Prin urmare $(\forall)\ n\geqslant N:=\max\{N',N''\}$ avem:

$$\left|L-\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}(fg)(x_i)\right|\leqslant\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon,$$

deci

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}(fg)(x_i)=L$$

9.2.12. Teoremă (A II-a formulă de medie). *Fie $f,g:[a,b]\to\mathbf{R}$ două funcții integrabile cu g monotonă. Atunci* $(\exists)\ \xi\in[a,b]$ *a.î.*

$$\int_a^b fg=g(a)\int_a^\xi f+g(b)\int_\xi^b g$$

Dem. Presupunem $g\geqslant 0$, g monoton descrescătoare și fie $n\in\mathbf{N}$ și $\Delta_n:=\{a=x_0<x_1\ldots<x_n=b\}$ cu $x_k:=a+\frac{k}{n}(b-a)$. Notăm

$\alpha_i:=\frac{1}{x_i-x_{i-1}}\int_{x_{i-1}}^{x_i}f\ (i=\overline{1,n})$. Din T.9.2.10.avem $m_i(f)\leqslant\alpha_i\leqslant M_i(f)\ (\forall)i=\overline{1,n}$ deci cf. Lemei

$$\int_a^b fg=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i g(x_{i-1})(x_i-x_{i-1})\qquad(1)$$

Dacă $F(x):=\int_a^x f, x\in[a,b]$, atunci avem:

$$\alpha_i(x_i-x_{i-1})=\int_{x_{i-1}}^{x_i}f=\int_a^{x_i}f-\int_a^{x_{i-1}}f=F(x_i)-F(x_{i-1}),$$

$$L_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i g(x_{i-1}) \cdot (x_i - x_{i-1}) = \sum_{i-1}^{n} g(x_{i-1})\,(F(x_i) - F(x_{i-1})) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} g(x_{i-1})\,F(x_i) - \sum_{i=1}^{n} g(x_{i-1})\;F(x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} g(x_{i-1})\,F(x_i) -$$

$$- \sum_{i=1}^{n} g(x_i)\,F(x_i) = g(x_{n-1})\,F(x_n) + \sum_{i=1}^{n-1} (g(x_{i-1}) - g(x_i))\,F(x_i).$$

Notînd $M := \sup F([a, b])$, $m = \inf F([a, b])$ și ținînd seama că $g(x_{n-1}) \geqslant 0$ și $g(x_{i-1}) - g(x_i) \geqslant 0$, $(\forall)\ i = \overline{1, n}$, rezultă

$$L_n \leqslant g(x_{n-1})\,M + \sum_{i=1}^{n-1} (g(x_{i-1}) - g(x_i))\,M = Mg(a)$$

și analog $L_m \geqslant m\,g(a)$, deci $m \leqslant \dfrac{1}{g(a)} L_n \leqslant M$ (2). Cum $\lim\limits_{n\to\infty} L_n = \int_a^b fg$, din (2) rezultă că $m \leqslant \dfrac{1}{g(a)} \int_a^b fg \leqslant M$. Funcția F fiind continuă (T.9.3.1.), avem (T.5.5.17. Cor. 2) $F([a, b]) = [m, M]$, deci $(\exists)\ \xi \in [a, b]$ a.î. $F(\xi) = \dfrac{1}{g(a)} \int_a^b fg$ și deci $\int_a^b fg = g(a) \int_a^\xi f$.

Revenind la cazul general, presupunem g monoton descrescătoare arbitrară și fie $h = g - g(b)$. Atunci $h \geqslant 0$ și h monoton descrescătoare, deci din raționamentul făcut rezultă că $(\exists)\ \xi \in [a, b]$ a.î. $\int_a^b fh = h(a) \int_a^\xi f$ și deci

$$\int_a^b (fg - fg(b)) = (g(a) - g(b)) \int_a^\xi f,$$

prin urmare

$$\int_a^b fg = g(b) \int_a^b f + (g(a) - g(b)) \int_a^\xi f = g(a) \int_a^\xi f + g(b) \int_\xi^b f$$

Corolar 1. *Fie $f, g : [a, b] \to \mathbf{R}$ două funcții integrabile a.î. g este monoton descrescătoare și nenegativă. Atunci* $(\exists)\,\xi \in [a, b]$ *a.î.* $\int_a^b fg = g(a) \int_a^\xi f$.

Observație. A II-a formulă de medie se mai numește *teorema Bonnet-Weierstrass.*

9.2.13. Propoziție. *Fie $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ o funcție integrabilă. Atunci cond.* 1°—3° *sînt echivalente*: 1° *f nulă în punctele de continuitate*; 2° *f nulă a.p.t.*; 3° $\int_\alpha^\beta f = 0$, $(\forall)\ \alpha, \beta \in [a, b]$.

Dem. 1°⇒2°. f fiind integrabilă este continuă a.p.t. (T.9.1.14.) deci f este nulă a.p.t.

2°⇒3°. Să presupunem, pentru a simplifica notația, că $[\alpha, \beta] = [a, b]$. Deoarece f este nulă a.p.t., $(\exists)\ A \subseteq [a, b]$ neglijabilă a.î. f se anulează pe $[a, b] \setminus A$. Fie $\Delta = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\} \in \mathfrak{T} := \mathfrak{T}_{[a,b]}$ fixată. Din

P.9.1.12.(2°) rezultă $\mathring{A} = \emptyset$, deci $(\forall)\ i = \overline{1, n}$ avem $[x_{i-1}, x_i] \not\subseteq A$, deci $[x_{i-1}, x_i]$ conține puncte din $[a, b] \setminus A$ și deci f se anulează cel puțin într-un punct $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$. Obținem astfel o mulțime ξ_Δ de puncte intermediară asociată lui Δ, pe care f se anulează, prin urmare $\sigma_f(\Delta, \xi_\Delta) = 0$.

Fie acum $(\Delta_n)_{n\geqslant 1} \subseteq \mathfrak{T}$ cu $\nu(\Delta_n) \to 0$, fixat și $(\xi_{\Delta_n})_{n\geqslant 1}$ un șir de mulțimi de puncte intermediare cu $\xi_{\Delta n}$ asociată lui Δ_n $(n \geqslant 1)$, cu proprietatea că f se anulează pe $\xi_{\Delta n}$. Atunci $\sigma_f(\Delta_n, \xi_{\Delta n}) = 0$ $(\forall)\ n \geqslant 1$, deci (T.9.1.4.) avem:

$$\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} \sigma_f(\Delta_n, \xi_{\Delta_n}) = 0 \Leftrightarrow \int_a^b f = 0$$

$3°\Rightarrow 1°$. Fie $x_0 \in [a, b]$ un punct în care f este continuă. Să presupunem $f(x_0) \neq 0$, spre exemplu $f(x_0) > 0$. Atunci (P.5.5.14.) $(\exists)\ [\alpha, \beta]$ un interval nedegenerat cu $x_0 \in [\alpha, \beta] \subseteq [a, b]$ și cu proprietatea că $f(x) \geqslant \frac{1}{2} f(x_0)$, $(\forall)\ x \in [\alpha, \beta]$. În acest caz avem

$$0 = \int_\alpha^\beta f\,dx \geqslant \int_\alpha^\beta \frac{1}{2} f(x_0)\,dx = \frac{1}{2}(\beta - \alpha) f(x_0) > 0,$$

absurd. Rămîne că $f(x_0) = 0$, deci f se anulează în punctele de continuitate.

Corolar 1. *Fie $I \subseteq \mathbf{R}$ un interval și $f : I \to \mathbf{R}$ o funcție local integrabilă. Atunci cond.* $1°-3°$ *sînt echivalente:*

$1°$ *f nulă în punctele de continuitate*; $2°$ *f nulă a.p.t.* $3° \int_\alpha^\beta f = 0$, $(\forall)\ \alpha, \beta \in I$.

Dem. $1°\Rightarrow 2°$. f fiind local integrabilă, rezultă (P.9.2.4.(3°)) f continuă a.p.t., deci cf. $1°$ f este nulă a.p.t.

$2°\Rightarrow 3°$. Fie $[\alpha, \beta] \subseteq I$ fixat. Evident $f_{[\alpha,\beta]}$ este integrabilă (cf. ipotezei) și nulă a.p.t. (cf. 2°). Atunci (P.9.2.13.) $\int_\alpha^\beta f = \int_\alpha^\beta f\Big|_{[\alpha,\beta]} = 0$.

$3°\Rightarrow 1°$. Se raționează exact ca în P.9.2.13.

Corolar 2. *Fie $I \subseteq \mathbf{R}$ un interval și $f : I \to \mathbf{R}$ o funcție continuă. Atunci* $f = 0 \Leftrightarrow \int_\alpha^\beta f = 0$, $(\forall)\ \alpha, \beta \in I$.

Dem. Aplicăm Cor.1.

Corolar 3. *Fie $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ o funcție integrabilă, nenegativă. Atunci cond.* $1°-3°$ *sînt echivalente:* $1°$ *f nulă în punctele de continuitate*; $2°$ *f nulă a.p.t.*; $3° \int_b^b f = 0$.

Dem. $3°\Rightarrow 1°$. Fie $[\alpha, \beta] \subseteq [a, b]$ fixat. Atunci avem $0 \leqslant \int_\alpha^\beta f \leqslant \int_a^b f = 0$, deci $\int_\alpha^\beta f = 0$. Aplicăm mai departe P.9.2.13. etc.

Corolar 4. *Fie $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ o funcție integrabilă nenegativă. Atunci cond.* $1°-3°$ *sînt echivalente:* $1°$ $(\exists)\ x_0 \in [a, b]$ *a.î. f este continuă și strict pozitivă în x_0*; $2°$ $(\exists)\ \alpha, \beta \in [a, b]$, $\alpha < \beta$ *a.î.* $f(x) > 0$, $(\forall)\ x \in [\alpha, \beta]$; $3° \int_a^b f > 0$.

Corolar 5. *Fie $f, g : [a, b] \to \mathbf{R}$ două funcții integrabile, egale a.p.t. Atunci* $\int_a^b f = \int_a^b g$.

Dem. Funcția $f - g$ este integrabilă și nulă a.p.t., deci (P.9.2.13.)

$$\int_a^b f - \int_a^b g = \int_a^b (f - g) = 0 \Leftrightarrow \int_a^b f = \int_a^b g$$

Observația 1. Fie $f, g : [a, b] \to \mathbf{R}$ două funcții mărginite și egale între ele a.p.t. Dacă f este integrabilă (chiar continuă), nu rezultă numaidecît că g este integrabilă.

Contraexemplu. Fie $f, g : [0, 1] \to \mathbf{R}$ cu $f = 1$ și g funcția lui Dirichlet. atunci $f = g$ a.p.t. și g nu este integrabilă.

9.2.14. Propoziție. *Fie $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ o funcție. Atunci f este integrabilă* $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (\forall)\ \varepsilon > 0$, $(\exists) f_1, f_2 : [a, b] \to \mathbf{R}$ *două funcții etajate a.î.* $f_1 \leqslant f \leqslant f_2$ *și* $\int_a^b (f_2 - f_1) \leqslant \varepsilon$.

Dem. ($\Rightarrow$). Fie $\varepsilon > 0$ fixat. Cf. (T.9.1.8.)(3°) $(\exists)\ \Delta = \{a = x_0 < x_1 < \ldots$ $\ldots < x_n = b\}$ o diviziune a lui $[a, b]$ a.î. $S_f(\Delta) - s_f(\Delta) < \varepsilon$. Fie $f_1 := \sum_{i=1}^{n} m_i \varphi_i$ și $f_2 := \sum_{i=1}^{n} M_i \varphi_i$, unde $m_i = \inf f(J_i)$, $M_i = \sup f(J_i)$, $\varphi_i : [a, b] \to \mathbf{R}$ funcția caracteristică a lui J_i, iar $J_i = [x_{i-1}, x_i)$, dacă $i = \overline{1, n-1}$ și $J_n = [x_{n-1}, x_n]$. Atunci f_1, f_2 sînt etajate, $f_1 \leqslant f \leqslant f_2$ și avem :

$$\int_a^b (f_2 - f_1)\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{n} \int_{J_i} (f_2 - f_1)\, \mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i) \int_{J_i} \varphi_i\, \mathrm{d}x =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\, |J_i| = S_f(\Delta) - s_f(\Delta) < \varepsilon$$

($\Leftarrow$). Fie $\varepsilon > 0$ fixat și $f_1, f_2 : [a, b] \to \mathbf{R}$ două funcții cu proprietățile din enunț. Evident $(\exists)\ \Delta = \{a = x_0 < x_1 \ldots < x_n = b\}$ o diviziune a lui $[a, b]$ a.î. f_1 și f_2 sînt constante pe fiecare interval (x_{i-1}, x_i) $(i = \overline{1, n})$. Fie Δ^* o diviziune a lui $[a, b]$ formată din Δ la care adăugăm punctele $a + \eta$, $x_i - \eta$ $x_i + \eta$ $(i = \overline{1, n-1})$ și $b - \eta$, unde $0 < \eta < \min \left\{ \nu(\Delta), \dfrac{\varepsilon}{4n \|f\|_\infty} \right\}$ (fig. 42).

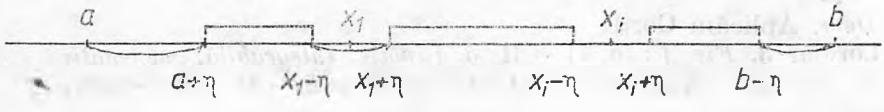


Fig. 42

Notăm cu J_k^* un interval parțial al diviziunii Δ^*. Atunci

$$S_f(\Delta^*) - s_f(\Delta^*) = \sum_k (M_k^* - m_k^*)\, |J^*| = \sum_k{}' + \sum_k{}'',$$

unde în $\sum_k{}'$ luăm intervalele J_k^* de forma $[x_{i-1} + \eta, x_i + \eta]$, iar în $\sum_k{}''$ de forma $[a, a + \eta]$, $[x_i - \eta, x_i + \eta]$, $[b - \eta, b]$ cu $i = \overline{1, n-1}$. Dacă J_k^* este de forma $[x_{i-1} + \eta, x_i + \eta]$, avem :

$$M_k^*(f) - m_k^*(f) \leqslant M_i(f_2) - m_i(f_1) = \frac{1}{|J_k^*|} \int_{J_k^*} (f_2 - f_1),$$

deci,

$$\sum_k{}' \leqslant \sum_k{}' \int_{J_k^*} (f_2 - f_1) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} (f_2 - f_1) = \int_a^b (f_2 - f_1) \leqslant \varepsilon$$

Cum $M_k^* - m_k^* \leqslant 2\|f\|_\infty$, $(\forall)\, k$, rezultă

$$\sum{}'' \leqslant 2\|f\|_\infty \sum_k{}'' |J_k''| = 2\|f\|_\infty \cdot n \cdot 2\eta \leqslant \varepsilon$$

Prin urmare $S_f(\Delta^*) - s_f(\Delta^*) \leqslant \varepsilon$, deci (T.9.1.8.(3°)) f este integrabilă.

Corolar 1. *Fie $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ o funcție. Atunci f este integrabilă* $\Leftrightarrow (\forall)\, \varepsilon > 0$, $(\exists)\, f_1, f_2 : [a, b] \to \mathbf{R}$ *continue a.î.* $f_1 \leqslant f \leqslant f_2$ *și* $\int_a^b (f_2 - f_1) \leqslant \varepsilon$.

Dem. Ținem seama că $(\forall)\, \varphi : [a, b] \to \mathbf{R}$ etajată, $(\forall)\, \varepsilon > 0$, $(\exists)\, \psi : [a, b] \to \mathbf{R}$ continuă a.î. $\varphi \leqslant \psi$ (resp. $\psi \leqslant \varphi$) și $\int_a^b (\psi - \varphi) \leqslant \varepsilon$ (resp. $\int_a^b (\varphi - \psi) \leqslant \varepsilon$).

Corolar 2. *Fie $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ o funcție. Atunci f este integrabilă* $\Leftrightarrow (\exists)$ *$f_n, g_n : [a, b] \to \mathbf{R}$ $(n \geqslant 1)$ două șiruri de funcții etajate (resp. continue) cu proprietățile*: 1° *$(f_n)_{n\geqslant 1}$ este monoton crescător și $(g_n)_{n\geqslant 1}$ este monoton descrescător*; 2° $f_n \leqslant f \leqslant g_n$, $(\forall)\, n \geqslant 1$; 3° $\lim_{n\to\infty} \int_a^b (g_n - f_n) = 0$.

Corolar 3. *Fie $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ o funcție integrabilă. Atunci* $(\forall)\, \varepsilon > 0$, $(\exists)$ *$g : [a, b] \to \mathbf{R}$ de clasă $\mathcal{C}^\infty$ a.î.* $\int_a^b |f - g| < \varepsilon$.

Dem. Din Cor. 1 rezultă că $(\exists)\, h : [a, b] \to \mathbf{R}$ continuă a.î. $\int_a^b |f - h| < \varepsilon/2$. Din T.12.1. 20. rezultă că $(\exists)\, g : [a, b] \to \mathbf{R}$ de clasă $\mathcal{C}^\infty$ a.î. $|h(x) - g(x)| < \dfrac{\varepsilon}{2(b-a)}$, $(\forall)\, x \in [a, b]$. Atunci

$$\int_a^b |f - g| \leqslant \int_a^b |f - h| + \int_a^b |h - g| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \int_a^b \frac{\varepsilon}{2(b-a)} dx = \varepsilon$$

9.3. Metode de integrare a funcțiilor

9.3.1. Teoremă. *Fie $I \subseteq \mathbf{R}$ un interval și $f : I \to \mathbf{R}$ o funcție local integrabilă; fie $a \in I$ fixat și $F(x) = \int_a^x f$, $x \in I$. Atunci*: 1° *F este continuă (pe I)*; 2° *F este derivabilă în orice punct $x_0 \in I$ în care f este (derivabilă) continuă și avem $F'(x_0) = f(x_0)$.*

Dem. 1° Fie $x_0 \in I$ și $r > 0$ fixat. Atunci (T. 9.2.2.)

$$F(x) - F(x_0) = \int_a^x f - \int_a^{x_0} f = \int_{x_0}^x f,\ (\forall)\, x \in J := I \cap [x_0 - \gamma, x_0 + \gamma],$$

deci (P. 9.2.9.) avem :

$$|F(x) - F(x_0)| \leqslant |x - x_0| \sup_{t\in J} |f(t)|,\ (\forall)\, x \in J \qquad (1)$$

Fixăm $\varepsilon > 0$ și fie $\eta := \dfrac{\varepsilon}{M}$, unde $M = \sup_{t\in J} |f(t)|$. Din (1) rezultă

$$|F(x) - F(x_0)| < \varepsilon,\ (\forall)\, x \in J,\ |x - x_0| < \eta,$$

prin urmare (T. 5.5.7. (3°)) F este continuă în x_0.

2° Fie $x_0 \in I$ un punct în care f este continuă și $\varepsilon > 0$ fixat. Atunci (T. 5.5.7. (3°)) $(\exists)\ \eta > 0$ a.i.

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon, (\forall)\ x \in J := I \cap [x_0 - \eta, x_0 + \eta] \tag{1}$$

Evident avem

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) = \frac{1}{x - x_0}\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt - \frac{1}{x - x_0}\int_{x_0}^{x} f(x_0)\,dt =$$

$$= \frac{1}{x - x_0}\int_{x_0}^{x} (f(t) - f(x_0))\,dt, (\forall)\ x \in I \setminus \{x_0\}$$

Din (1), (2) și P. 9.2.9. rezultă

$$\left|\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0)\right| \leqslant \frac{1}{x - x_0}|x - x_0| \sup_{t \in J}|f(t) - f(x_0)| = \varepsilon, (\forall)\ x \in J \setminus \{x_0\}.$$

Prin urmare $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = f(x_0)$, deci f este derivabilă în x_0 și $F'(x_0) = f(x_0)$.

Corolar 1. *Fie $I \subseteq \mathbf{R}$ un interval și $f : I \to \mathbf{R}$ o funcție continuă. Atunci $(\forall)\ a \in I$ funcția $F(x) := \int_a^x f$, $x \in I$, este derivabilă și avem $F' = f$. Prin urmare, f admite primitive și F este o primitivă a sa.*

Corolar 2. *Fie $I \subseteq \mathbf{R}$ un interval* și $f : I \to \mathbf{R}$ *o funcție continuă a.p.t. și local mărginită; fixăm $a \in I$ și fie $F(x) := \int_a^x f$, $x \in I$. Atunci : 1° F este continuă (pe I); 2° F este derivabilă a.p.t. și $F'(x_0) = f(x_0)$, în fiecare punct $x_0 \in I$ în care f este continuă.*

Dem. Aplicăm T. 9.3.1. și P. 9.2.4.

Corolar 3. *Fie $I \subseteq \mathbf{R}$ un interval și $f : I \to \mathbf{R}$ o funcție continuă. Atunci $(\forall)$ F o primitivă a lui f și $(\forall)$ $a, b \in I$, avem relația :*

$$\int_a^b f = F(b) - F(a).$$

Dem. Fie $a, b \in I$ și F o primitivă a lui f, fixați. Punem $F_0(x) := \int_a^x f$, $x \in I$. Atunci (Cor. 1) $F_0' = f$, deci $(F - F_0)' = f - f = 0$ și deci $F = F_0 + C$ (C constantă). Cum $F_0(a) = 0$, rezultă $C = F(a)$, deci

$$\int_a^b f = F_0(b) = F(b) - C = F(b) - F(a)$$

Observația 1. Dacă funcția f din T.9.3.1. este continuă la stînga (resp. la dreapta) în $x_0 \in I$, atunci F este derivabilă la stînga (resp. la dreapta) în x_0 și avem $F_s'(x_0) = f(x_0 -)$ (resp. $F_d'(x_0) = f(x_0 +)$).

Observația 2. T.9.3.1. se numește *teorema fundamentală a calculului integral.*

Observația 3. Fie $I \subseteq \mathbf{R}$ un interval și $f : I \to \mathbf{R}$ o funcție local integrabilă; fixăm $a \in I$ și punem $F(x) := \int_a^x f$, $x \in I$. Funcția F se numește impropriu *integrala nedefinită* a funcției f, deoarece una din limitele de integrare, cea supe-

rioară este nedefinită, am văzut că $F'(x_0) = f(x_0)$ în fiecare punct x_0 din I în care f este continuă. Aşadar, putem spune că *derivata integralei nedefinite din funcţia f este egală cu f.* Mai departe, dacă f este derivabilă cu f' local integrabilă, avem (T. 9.3.1. Cor. 1) $\int_a^x f' = f(x) - f(a)$, $(\forall)\ x \in I$ deci, *integrala nedefinită din derivata lui f este egală, cu excepţia unei constante aditive, cu funcţia f.* Prin urmare putem spune că *integrala nedefinită şi derivarea sînt operaţii inverse una alteia.* Deoarece *o primitivă a lui f coincide, pînă la o constantă aditivă, cu integrala nedefinită a lui f,* se utilizează adeseori, prin tradiţie, denumirea improprie de *integrală nedefinită* pentru termenul de *primitivă* (antiderivată).

Observaţia 4. Cor. 4. este un caz particular al teoremei care urmează.

9.3.2. Teoremă (Formula Leibniz-Newton). *Fie $f: [a, b] \to \mathbf{R}$ o funcţie integrabilă care admite primitive. Atunci* $(\forall)$ *F o primitivă a lui f avem relaţia :* $\int_a^b f = F(b) - F(a)$.

Dem. Fie $\Delta = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$ o diviziune a lui $[a, b]$. Atunci cf. T.6.2.5. avem :

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n} F(x_i) - F(x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) F'(\xi_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) f(\xi_i) = \sigma_f(\Delta\,;\, \xi_\Delta),$$

unde $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$ şi $\xi_\Delta = (\xi_i)_{i=\overline{1,n}}$. Fie acum $(\Delta_j)_{j\geq 1}$ un şir de diviziuni ale lui $[a, b]$ cu $\nu(\Delta_j) \to 0$ $(j \to \infty)$, fixat. Din cele de mai sus rezultă relaţia :

$$F(b) - F(a) = \sigma_f(\Delta_j, \xi_{\Delta_j}), j \geq 1 \qquad (1)$$

Ţinînd seama că f este integrabilă, din (1) rezultă

$$F(b) - F(a) = \lim_{j\to\infty} \sigma_f(\Delta_j\, \xi_{\Delta_j}) = \int_a^b f.$$

Corolar 1. *Fie $f: [a, b] \to \mathbf{R}$ o funcţie derivabilă cu f' integrabilă. Atunci* $\int_a^b f' = f(b) - f(a)$.

Corolar 2. *Fie $I \subseteq \mathbf{R}$ un interval şi $f: I \to \mathbf{R}$ o funcţie local integrabilă, care admite primitive, în particular f continuă. Atunci* $(\forall)$ *F o primitivă a lui f şi* $(\forall)$ *$a, b \in I$, avem relaţia :* $\int_a^b f = F(b) - F(a)$.

Observaţia 1. Notînd $F(b) - F(a)$ prin $F\Big|_a^b$, formula Leibniz-Newton se scrie $\int_a^b f = F\Big|_a^b$

Observaţia 2. Formula Leibniz-Newton este numită *Formula (teorema) fundamentală a calculului integral.* Ea reduce calculul integralei dintr-o funcţie la calculul primitivei din f. Cum pentru o clasă destul de largă de funcţii cunoaşte primitiva (v. Cap. 8), rezultă că pentru o clasă destul de largă de funcţii putem calcula (exact) integrala.

Exemple.

1) $\int_a^b x^n \mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}\, x^{n+1}\Big|_a^b = \frac{1}{n+1}(b^{n+1} - a^{n+1})$, $(\forall)\ a,\ b \in \mathbf{R} \wedge n \in \mathbf{N}$;

2) $\int_0^{\pi} \sin^2 x\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}(1 - \cos 2x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\sin 2x\right)\Big|_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}$;

3) $\int_0^1 \left(\cos \pi x + \frac{1}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x = \left(\frac{1}{\pi}\sin \pi x + \operatorname{arc\,tg}\ x\right)\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}$;

4) $\int_0^1 x\, \mathrm{e}^{x^2}\, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}(\mathrm{e} - 1)$;

5) $\int_0^{2\pi} |\sin\ x|\mathrm{d}x = \int_0^{\pi} \sin x\, \mathrm{d}x + \int_{\pi}^{2\pi}(-\sin x)\mathrm{d}x = -\cos x\Big|_0^{\pi} + \cos x\Big|_{\pi}^{2\pi} = 4$;

6) $\int_{-1}^1 |x|\mathrm{d}x = \int_{-1}^0 (-x)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 x\ \mathrm{d}x = -\frac{1}{2}x^2\Big|_{-1}^0 + \frac{1}{2}x^2\Big|_0^1 = 1$;

7) $\int_0^2 \max\{1,\ x^2\}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 1.\,\mathrm{d}x + \int_1^2 x^2\ \mathrm{d}x = x\Big|_0^1 + \frac{x^3}{3}\Big|_1^2 = \frac{10}{3}$.

Să vedem cum putem aplica formula Leibniz-Newton pentru o funcți care are un număr finit de discontinuități.

9.3.3. Propoziție. *Fie* $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ *o funcție care are numai discontinuități de prima speță și acestea sînt în număr finit* : $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. *Atunc* $\int_a^b f = \sum_{i=1}^n (F_i(x_i -) - F_i(x_{i-1}+))$, *unde* F_i *este o primitivă a funcției* $f|_{(x_{i-1},\, x_i)}$.

Dem. Fie $f_i := f|_{(x_{i-1}, x_i)}$. Deoarece $f_i(x_{i-1}+)$ și $f_i(x_i-)$ există și sînt, finit rezultă (P.8.1.10.) $F_i(x_{i-1}+)$ și $F_i(x_i-)$ există și sînt finite; funcția $\tilde{F}_i : [x_{i-1}, x_i] \to \mathbf{I}$ definită astfel $\tilde{F}_i(x) := F_i(x)$, dacă $x \in (x_{i-1}, x_i)$, $\tilde{F}_i(x_{i-1}) := F_i\ (x_{i-1} +$ și $\tilde{F}_i(x_i) = F_i(x_i-)$ este o primitivă a funcției $\tilde{f}_i : [x_{i-1},\ x_i] \to \mathbf{R}$ definită astfel $\tilde{f}_i(x) := f_i(x)$ dacă $x \in (x_{i-1},\ x_i)$, $\tilde{f}_i(x_{i-1}) := f_i(x_{i-1}+)$ și $\tilde{f}_i(x_i) := f_i(x_i-)$.

Din T.9.1.14. Cor. 6 rezultă că f este integrabilă, deci $f|_{[x_{i-1}, x_i]}$ este inte grabilă $(\forall)\ i = \overline{1, n}$ și avem (T.9.2.2.): $\int_a^b f = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f|_{[x_{i-1}, x_i]}$. Cum $\tilde{f}_i$ difer de $f|_{[x_{i-1}, x_i]}$ în cel mult două puncte, rezultă (P.9.2.13. Cor. 5) că $\int_{x_{i-1}}^{x_i} f|_{[x_{i-1}, x_i]} = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \tilde{f}_i$. Aplicînd T.9.3.2. avem :

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} \tilde{f}_i = \tilde{F}_i(x_i) - \tilde{F}_i(x_{i-1}) = F_i(x_i-) - F_i(x_{i-1}+),$$

prin urmare

$$\int_a^b f = \sum_{i=1}^n (F_i(x_i-) - F_i(x_{i-1}+))$$

Corolar 1. *Fie* $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ *o funcție continuă pe* (a, b) *și care are lim finite în* a *și* b. *Atunci* $(\forall)$ F *o primitivă a lui* f *pe* (a, b), *avem rela* $\int_a^b f = F(a+) - F(b-)$.

Corolar 2. *Fie* $f:[a,\ b]\to\mathbb{R}$ *o funcție egală cu* α *cu excepția unui număr finit de puncte. Atunci* $\int_a^b f=\alpha(b-a)$.

Dem. Evident $(\exists)\ a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b$ a.î. $f(x)=\alpha(\forall)\ x\neq x_i$ deci $\int_a^b f=\sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i} f$. Cum o primitivă a lui f pe $(x_{i-1},\ x_i)$ este αx, avem $\int_{x_{i-1}}^{x_i} f=\alpha x_i-\alpha x_{i-1}=\alpha(x_i-x_{i-1})$, deci

$$\int_a^b f=\sum_{i=1}^{n}\alpha(x_i-x_{i-1})=\alpha(b-a)$$

Putem raționa și altfel : $f=\alpha$ a.p.t., deci $\int_a^b f=\int_a^b \alpha\,dx$ etc.

Corolar 3. *Fie* $f:[a,\ b]\to\mathbb{R}$ *o funcție etajată și* $(J_i)_{i=\overline{1,n}}$ *o partiție a lui* $[a,\ b]$ *formată cu intervale a.î.* f *este egală cu* α_i *pe* $\mathring{J}_i\ (i=\overline{1,\ n})$. *Atunci* $\int_a^b f=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i|J_i|$.

Dem. Renumerotînd indicii putem presupune că $a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b$ a.î. $\mathring{J}_i=(x_{i-1},\ x_i)$, $(\forall)\ i=\overline{1,\ n}$. Cum $f(x)=\alpha_i$, $(\forall)\ x\in\mathring{J}_i$, avem (Cor. 2) $\int_{x_{i-1}}^{x_i} f=\alpha_i(x_i-x_{i-1})$, deci

$$\int_a^b f=\sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i} f=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(x_i-x_{i-1})=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i|J_i|$$

Exemplul 1. *Să se calculeze integrala* $\int_0^n (x-[x]_*)\,dx$.

Fie $f(x)=x-[x]_*$, $x\in[0,\ n]$. Evident f este continuă pe $[0,\ n]\setminus\{1,\ 2,\ldots,n\}$. Dacă $k-1\leqslant x<k$, avem $f(x)=x-k-1$, deci primitiva lui pe intervalul $[k-1,\ k)$ este $\frac{x^2}{2}-(k-1)x$. Atunci

$$\int_0^n f=\sum_{k=1}^{n}\int_{k-1}^{k} f=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{x^2}{2}-(k-1)x\right)\Big|_{k-1}^{k}=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k^2}{2}-k(k-1)-\frac{(k-1)^2}{2}+(k-1)^2\right)=n^2-n+\frac{1}{2}.$$

Exemplul 2. *Să se calculeze integrala* $\int_0^n [x^2]_*\,dx$.

Fie $f(x)=[x^2]_*$, $x\in[0,\ n]$. Evident f este continuă pe $[0,\ n]\setminus\{1,\sqrt{2},\ldots,\sqrt{n}\}$, că $\sqrt{k-1}\leqslant x<\sqrt{k}$, avem $f(x)=k-1$, deci f este etajată și atunci avem :

$$\int_0^n f=\sum_{k=1}^{n}\int_{\sqrt{k-1}}^{\sqrt{k}} f=\sum_{k=1}^{n}(k-1)(\sqrt{k}-\sqrt{k-1})$$

Exemplul 3. *Să se calculeze* $\int_{-1}^{1} f$, *unde* $f:[-1,\ 1]\to\mathbb{R}$ *este definită astfel* $=x+1$, *dacă* $x\in[-1,\ 0]$ *și* $f(x)=x^2$, *dacă* $x\in(0,\ 1]$.

Evident f este continuă pe $[-1, 1]\setminus\{0\}$; 0 este discontinuitate de prima speță. Deoarece primitiva lui f pe $(-1, 0)$ este $\frac{x^2}{2} + x$, iar primitiva lui f pe $(0, 1)$ este $\frac{x^3}{3}$, avem:

$$\int_0^1 f = \left(\frac{x^2}{2} + x\right)\Big|_{-1}^{0} + \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = -\frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}.$$

9.3.4. Teoremă (Integrarea prin părți). *Fie $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ două funcții derivabile cu derivata integrabilă, în particular f și g de clasă $\mathcal{C}^1$. Atunci are loc relația:*

$$\int_a^b (fg') = fg\Big|_a^b - \int_a^b (f'g).$$

Dem. f și g fiind derivabile, rezultă că fg este derivabilă și avem $(fg)' = f'g + fg'$ (1). Cum f, f', g, g' sînt integrabile, rezultă (T.9.2.6.) că $f'g$ și fg' sînt integrabile, deci $(fg)'$ este integrabilă. Din (T.9.3.2.) rezultă

$$\int_a^b (fg)' = (fg)(b) - (fg)(a) = (fg)\Big|_a^b, \tag{2}$$

iar din (1) rezultă

$$\int_a^b (fg)' = \int_a^b (f'g) + \int_a^b (fg') \tag{3}$$

Din (2) și (3) deducem:

$$\int_a^b (fg') = \int_a^b (fg)' - \int_a^b (f'g) = fg\Big|_a^b - \int_a^b (f'g).$$

Observația 1. Relația demonstrată $\int_a^b (fg') = (fg)\Big|_a^b - \int_a^b (f'g)$ numită *formula de integrare prin părți*, poate fi transcrisă astfel.

$$\boxed{\int_a^b f(x)\, g'(x)\ \mathrm{d}x = (fg)\Big|_a^b - \int_a^b g(x)\ f'(x)\ \mathrm{d}x} \tag{1}$$

Funcția f fiind derivabilă, este diferențiabilă (P 6.6.2.) și avem $\mathrm{d}f(x) = f'(x)\mathrm{d}$ $(\forall)\ x \in [a, b]$ (aici x este un punct curent, iar $\mathrm{d}x$ este aplicația identică pe $\mathbb{R}$. Datorită acestui fapt se identifică *expresia formală* $f'(x)\,\mathrm{d}x$ prin $\mathrm{d}f(x)$ și analo $g'(x)\,\mathrm{d}x$ prin $\mathrm{d}g(x)$, deci putem scrie

$$\boxed{\int_a^b f(x)\mathrm{d}g(x) = (fg)\Big|_a^b - \int_a^b g(x)\ \mathrm{d}f(x)}$$

sau încă sub forma

$$\boxed{\int_a^b f\ \mathrm{d}g = (fg)\Big|_a^b - \int_a^b g\ \mathrm{d}f}$$

sau cu notațiile convenționale :

$$\boxed{\int_a^b u\,dv = (uv)\Big|_a^b - \int_a^b v\,du}$$

Observația 2. În mod practic formula de integrare prin părți se aplică astfel. Avem de calculat $\int_a^b f(x)\,dx$; se pune f sub forma $f(x)=u(x)v'(x)$, unde $u, v' : [a, b]\to\mathbf{R}$ *sînt cunoscute și se impun în mod natural din context*, analizînd atent expresia lui f; se calculează apoi v prin antiderivare : $v(x) = \int_a^b v'(x)\,dx$, $\forall\ x \in [a, b]$; se calculează u', apoi se utilizează relația

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \underbrace{u(x)}_{u}\ \underbrace{v'(x)dx}_{dv} = uv\Big|_a^b - \int_a^b \underbrace{v(x)}_{v}\ \underbrace{u'(x)dx}_{du}$$

vident formula se aplică în general, în cazul în care integrala $\int_a^b v(x)\ u'(x)dx$ ste mai ușor de calculat decît integrala $\int_a^b f(x)\,dx$ iar u' și v se deduc și ele ușor.

Exemplul 1. *Să se calculeze integrala* $\int_1^2 \ln x\,dx$

$$\int_1^2 \underbrace{\ln x}_{u}\ \underbrace{dx}_{dv} = x\ln x\Big|_1^2 - \int_1^2 x\cdot\frac{1}{x}\,dx = 2\ln 2 - \int_1^2 dx = 2\ln 2 - 1$$

Exemplul 2. *Să se calculeze* $L_n := \int_0^1 x^n e^x\,dx$ $(n \in \mathbf{N})$

$$\int_0^1 \underbrace{x^n}_{u}\ \underbrace{e^x\,dx}_{dv} = x^n e^x\Big|_0^1 - n\int_0^1 x^{n-1}e^x\,dx,$$

ci $L_n = e - nL_{n-1}$, $(\forall)\ n \in \mathbf{N}$. Cum $L_0 = e-1$, deducem succesiv $L_1 = e - L_0 = e - (e-1) = 1$, $L_2 = e - 2L_1 = e - 2$ etc.

9.3.5. Teoremă (Schimbarea de variabilă). *Fie* $f:[a, b]\to\mathbf{R}$ *funcție continuă. Atunci* $(\forall)\ \varphi:[\alpha, \beta]\to[a, b]$ *o funcție derivabilă cu* φ' *integrabilă, în particular* φ *de clasă* $\mathcal{C}^1$, *avem relația* : $\int_\alpha^\beta (f\circ\varphi)\cdot\varphi' = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f.$

Dem. Fie $F:[a, b]\to\mathbf{R}$ o primitivă a lui f i.e. F derivabilă cu $F' = f$. Pe o parte avem :

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f = F(\varphi(\alpha)) - F(\varphi)(\beta)) \tag{1}$$

de altă parte, funcțiile F și φ fiind derivabile, rezultă că funcția $\varphi:[\alpha, \beta]\to\mathbf{R}$ este derivabilă și avem (T.6.1.10) :

$$(F\circ\varphi)' = (F'\circ\varphi)\cdot\varphi' = (f\circ\varphi)\cdot\varphi'$$

Funcția $f \circ \varphi$ fiind continuă, deci integrabilă iar φ' fiind prin ipoteză integrabilă, rezultă (T.9.2.7.) că $(f \circ \varphi) \cdot \varphi'$ este integrabilă, deci $(F \circ \varphi')'$ este integrabilă. Cum $(F \circ \varphi)'$ are evident primitive, rezultă (T.9.2.3.) relația :

$$\int_\alpha^\beta (f \circ \varphi) \cdot \varphi' = (F \circ \varphi)\Big|_\alpha^\beta = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) \qquad (2$$

Din (1) și (2) obținem relația $\int_\alpha^\beta (f \circ \varphi)\varphi' = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f$.

Corolar 1. *Fie* $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ *o funcție continuă. Atunci* $(\forall)$ $\varphi : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ *o funcție bijectivă, derivabilă cu* φ' *integrabilă, în particular* φ *de clas* $\mathcal{C}^1$, *avem relația :* $\int_a^b f = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} (f \circ \varphi) \cdot \varphi'$.

Dem. φ fiind bijectivă și continuă, este strict monotonă (T.5.5.19. Cor.2 deci $\varphi(\alpha) = a$ și $\varphi(\beta) = b$ sau $\varphi(\alpha) = b$ și $\varphi(\beta) = a$. Aplicăm mai departe formula demonstrată „citită" de la dreapta la stînga.

Observația 1. Relația $\int_\alpha^\beta (f \circ \varphi) \cdot \varphi' = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f$ poate fi scrisă astfel

$$\boxed{\int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\mathrm{d}t = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\ \mathrm{d}x} \qquad (F$$

și poartă numele de *Prima formulă* (*Formula* 1) de schimbare de variabilă integrale. Dacă $\varphi(\alpha) = a$ și $\varphi(\beta) = b$ și „citim" formula (F_1) de la dreapta stînga, obținem relația :

$$\boxed{\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,\mathrm{d}t} \qquad (F$$

Dacă $\varphi : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ este bijectivă, formula (F_1') se scrie

$$\boxed{\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \pm\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t} \qquad (F$$

cu semnul $+$(resp.$-$) dacă φ este strict crescătoare (resp. strict descrescătoa i.e. dacă $\alpha = \varphi^{-1}(a)$ și $\beta = \varphi^{-1}(b)$ (resp. $\alpha = \varphi^{-1}(a)$ și $\beta = \varphi^{-1}(a)$).

Notînd expresia formală $\varphi'(t)\ \mathrm{d}t$ prin $\mathrm{d}\varphi(t)$, putem scrie relația

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\ \mathrm{d}\varphi(t) = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\ \mathrm{d}x \text{ etc.}$$

În formula (F_1) reducem calculul integralei din stînga la cea din dreap Formula (F_1') este de fapt formula (F_1) în care reducem calculul integralei dreapta la cea din stînga.

Corolar 2.

Fie $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ *o funcție continuă. Atunci* $(\forall)$ $\varphi : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ *o fun bijectivă a.î.* φ^{-1} *este derivabilă cu* $(\varphi^{-1})'$ *integrabilă, în particular* φ^{-1} *de lasă avem relația :* $\int_\alpha^\beta f \circ \varphi = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(\varphi^{-1})'$.

Dem. Funcția $\varphi^{-1}:[a, b]\to[\alpha, \beta]$ fiind continuă și bijectivă, este omeomorfă (T.5.5.19.Cor.2), deci φ este continuă și deci $f\circ\varphi:[\alpha, \beta]\to\mathbb{R}$ este continuă. Aplicăm mai departe Cor.1 pentru funcțiile $f\circ\varphi:[\alpha, \beta]\to\mathbb{R}$ și $\psi := \varphi^{-1}:[a, b]\to[\alpha, \beta]$; obținem:

$$\int_\alpha^\beta f\circ\varphi = \int_{\psi^{-1}(\alpha)}^{\psi^{-1}(\beta)} ((f\circ\varphi)\circ\psi)\cdot\psi' = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f\circ(\varphi^{-1})',$$

Observația 1. Relația $\int_\alpha^\beta f\circ\varphi = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f\cdot(\varphi^{-1})'$ poate fi scrisă astfel

$$\boxed{\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\mathrm{d}t = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,(\varphi^{-1})'(x)\mathrm{d}x} \qquad (\mathrm{F}_2)$$

i poartă numele de *A doua formulă* (*Formula* 2) de schimbare de variabilă în ntegrale. Dacă $\varphi(\alpha) = a$ și $\varphi(\beta) = b$ i.e. φ este strict crescătoare, obținem relația:

$$\boxed{\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(x)\ (\varphi^{-1})'(x)\mathrm{d}x} \qquad (\mathrm{F}'_2)$$

otînd expresia formală $(\varphi^{-1})'(x)\ \mathrm{d}x$ prin $\mathrm{d}\varphi^{-1}(x)$, putem scrie

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\mathrm{d}t = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\mathrm{d}\varphi^{-1}(x) \text{ etc.}$$

Observația 2. Toate formulele schimbării de variabilă sînt valabile în zul particular cînd funcția $\varphi:[\alpha, \beta]\to[a, b]$ este un $\mathcal{C}^1$-*difeomorfism*.

Observația 3. În mod practic formulele „schimbării de variabilă" se utilează astfel.

I *Metodă*. Avem de calculat $\boxed{L = \int_\alpha^\beta g(t)\ \mathrm{d}t}$. Presupunem că am pus

tegrala dată sub forma $\boxed{\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t}$. Mai precis avem $g(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$,

) $t\in I$, unde funcțiile $[\alpha, \beta]\xrightarrow{\varphi}[a, b]\xrightarrow{f}\mathbb{R}$ au proprietățile: φ este derivabilă, $\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$ și f este *continuă*. Facem apoi înlocuirile formale: $\boxed{\varphi(t)}\leftrightarrow$ $\boxed{x}$, $\boxed{\varphi'(t)\mathrm{d}t}\leftrightarrow\boxed{\mathrm{d}x}$, $[\alpha, \beta]\to[a, b]$ și obținem $L = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

II *Metodă*. Avem de calculat $\boxed{L = \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x}$. Reprezentăm pe x sub for- $x = \varphi(t)$. Mai precis, determinăm o funcție $\varphi:[\alpha, \beta]\to[a, b]$ *derivabilă* cu φ' egrabilă și a.î. $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$. Apoi facem înlocuirile formale. $x\leftrightarrow\varphi(t)$, $\leftrightarrow\varphi'(t)\mathrm{d}t$, $[a, b]\leftrightarrow[\alpha, \beta]$ și obținem $L = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t$. (Am utilizat (F'_1)).

III *Metodă.* Avem de calculat $\boxed{L = \int_\alpha^\beta g(t)\mathrm{d}t}$. Presupunem că am pus integrala dată sub forma $\boxed{\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\mathrm{d}t}$. Mai precis avem $f(t) = g(\varphi(t))$, $(\forall)\ t \in$ $\in [\alpha, \beta]$, unde funcțiile $[\alpha, \beta] \xrightarrow{\varphi} [a, b] \xrightarrow{f} \mathbf{R}$ au proprietățile : φ *inversabilă*, φ^{-1} *derivabilă* cu $(\varphi^{-1})'$ *integrabilă*, $\varphi(\alpha) = a$ și $\varphi(\beta) = b$, iar g este *continuă*. Apo facem înlocuirile formale : $\boxed{\varphi(t)} \leftrightarrow \boxed{x}$, $\boxed{\mathrm{d}t} \leftrightarrow \boxed{(\varphi^{-1})'(t)\mathrm{d}t}$, $\boxed{[\alpha, \beta]} \leftrightarrow \boxed{[a, b]}$ ș obținem $\boxed{L = \int_a^b g(x)(\varphi^{-1})'(x)\mathrm{d}x}$ (Am utilizat formula (F_2'')).

Funcția φ în fiecare din formulele utilizate se impune în mod natural di context, analizînd atent expresia lui f. În primul rînd se pune în evidență o funcție elementară $x = \varphi(t)$. Dificultatea constă în a determina u interval $[a, b] \subseteq R_\varphi$ sau un interval $[\alpha, \beta] \subseteq D_\varphi$ în așa fel încît φ să aplic $[\alpha, \beta]$ pe $[a, b]$ și să aibă proprietățile din enunț ; în particular este suficien ca φ să aplice $\mathcal{C}^1$ — difeomorf $[\alpha, \beta]$ pe $[a, b]$. Funcția φ se numește *substituție*.

Observația 4. A doua metodă este un caz particular al primei metode anume cînd φ este *bijectivă*. A treia metodă poate fi obținută din a doua, dac în integrala $\int_\alpha^\beta g(\varphi(t))\mathrm{d}t$ facem substituția $t = \varphi^{-1}$, $(\forall)\ x \in [a, b]$. Așadar dem mirile de „prima formulă" și „a doua formulă" sînt pur convenționale. În fa nu avem decît o singură formulă de schimbare de variabilă și mai multe m duri de aplicare a ei.

Exemplul 1. *Să se calculeze integrala* $L = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t\ \mathrm{d}t}{\sqrt{1 + \sin t}}$

Evident avem $L = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1 + \sin t)'\,\mathrm{d}t}{\sqrt{1 + \sin t}}$. Facem substituția $\varphi(t) = 1 + \sin$ $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Evident, avem $\varphi(0) = 1$ și $\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$, deci

$$L = \int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}\Big|_1^2 = 2(\sqrt{2} - 1)$$

Exemplul 2. *Să se calculeze integrala* $L = \int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\ \mathrm{d}x$.

Facem substituția $x = \varphi(t) = \sin t$. Așadar, încercăm să determinăm interval $[\alpha, \beta] \subseteq \mathbf{R}$ a.î. funcția $[\alpha, \beta] \ni t \xrightarrow{\varphi} \sin t \in [0, 1]$ să fie derivabilă să avem $\varphi(\alpha) = 0$ și $\varphi(\beta) = 1$. Evident putem lua $[\alpha, \beta] = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ s

$\left[2\pi, \frac{5\pi}{2}\right]$ etc. Atunci

$$L = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin^2 t} \cdot \cos t \, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \, dt = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t) \, dt$$

$$= \frac{1}{2} \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}.$$

Exemplul 3. *Să se calculeze integrala* $I = \int_0^2 \frac{1 - \sqrt{t}}{1 + \sqrt{t}} dt$.

Se impune substituția $\varphi(t) = \sqrt{t}$, $t \in [0, 2]$. Evident φ injectivă și $\varphi([0, 2]) = [0, \sqrt{2}]$. Cum $\varphi^{-1} : [0, \sqrt{2}] \to [0, 2]$ este derivabilă și avem $\varphi^{-1}(x) = x^2$ $(\forall)$ $x \in [0, \sqrt{2}]$, deci $(\varphi^{-1})'(x) = 2x$, rezultă că

$$I = \int_0^{\sqrt{2}} \frac{1 - x}{1 + x} \cdot 2x \, dx = 2 \int_0^{\sqrt{2}} \left(2 - x - \frac{2}{1 + x} \right) dx =$$

$$= 2 \left(2x - \frac{x^2}{2} - 2 \ln (1 + x) \right) \Big|_0^{\sqrt{2}} = 2 (2\sqrt{2} - 1 - 2 \ln (1 + \sqrt{2}))$$

9.4. Exemple și contraexemple. Inegalități integrale Complemente

9.4.1. Exemple și contraexemple.

Exemplul 1. *Fie* $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ *o funcție definită astfel* $f(x) = 1$, *dacă* $x \in (0, 1]$ *și* $f(0) = 1$. *Atunci* f *este integrabilă și nu are proprietatea Darboux, deci nu admite primitive* : $\int_0^1 f = 1$.

f este mărginită pe $[0, 1]$, continuă pe $(0, 1]$ și discontinuă în 0, deci (T.9.1.14.) f este integrabilă. Evident f nu are proprietatea lui Darboux, deoarece $\frac{1}{2} \in [f(0), (f(1)]$ și $f(x) \neq \frac{1}{2}$ $(\forall)$ $x \in (0, 1)$. Cum $\mathcal{A}([0, 1]) \subseteq \mathcal{D}_0([0, 1])$, rezultă că f nu are primitive.

Cum $f = 1$ a.p.t., avem $\int_0^1 f = \int_0^1 1 = 1$.

Corolar 1.

1° $\mathcal{R}[0, 1] \setminus \mathcal{A}[0, 1] \neq \emptyset$, *deci există funcții integrabile care nu au primitive*;

2° $\mathcal{R}[0, 1] \setminus \mathcal{D}_0[0, 1] \neq \emptyset$, *deci există funcții integrabile care nu au proprietatea Darboux.*

Exemplul 2. *Fie* $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ *o funcție definită astfel:*

$$f(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} \cos \frac{1}{x^2}, & x \in (0, 1] \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Atunci f *admite primitive și nu este integrabilă* i.e. $\mathcal{A}[0, 1] \setminus \mathcal{R}[0, 1] \neq \emptyset$.

Într-adevăr, fie $F(x) = x^2 \sin \frac{1}{x^2}$, dacă $x \in (0, 1]$ și $F(0) = 0$, Evident F este derivabilă pe $(0, 1]$ și avem:

$$F'(x) = 2x \sin \frac{1}{x^2} - x^2 \cdot \frac{2}{x^5} \cos \frac{1}{x^2}, \quad (\forall)\, x \in (0, 1]$$

Mai departe avem:

$$\lim_{x \to 0} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x^2} = 0,$$

deci F este derivabilă în 0 și $F'(0) = 0 = f(0)$.
Așadar F este derivabilă și $F' = f$, deci f admite primitive.

Funcția f nu este mărginită. Într-adevăr fie $x_n := \frac{1}{2n\pi} \in [0, 1]$ $(n \geqslant 1)$ evident $x_n \to 0$ și $f(x_n) = -4\pi n \to -\infty (n \to \infty)$, deci $\sup_{x \in [0,1]} |f(x)| \geqslant \sup_{n \geqslant 1} |f(x_n)| = \infty$ și deci f este nemărginită. Din P.9.1.10. rezultă că f nu este integrabilă.

Corolar 1. *Fie $F : [0, 1] \to \mathbb{R}$ o funcție definită astfel $F(x) = x^2 \sin \frac{1}{x^2}$ dacă $x \in (0, 1]$ și $F(0) = 0$. Atunci F este derivabilă și derivata sa F' este neintegrabilă.*

Exemplul 3. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funcția lui Dirichlet. Atunci f nu este integrabilă pe nici un interval $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ cu $a < b$.

Presupunem f integrabilă și fie $L = \int_a^b f$ cu $a, b \in \mathbb{R}$ fixați. Atunci pentru $\varepsilon = \frac{b - a}{2}$, $(\exists)\, \eta > 0$ a.î.

$$|\sigma_f(\Delta, \xi_\Delta) - L| < \varepsilon, \quad (\forall)\, \Delta \in \mathfrak{T}, \ \nu(\Delta) < \eta \wedge \xi_\Delta \in \Xi_\Delta$$

Fixăm $\Delta = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n\} \in \mathfrak{T}$ cu $\nu(\Delta) < \eta$ și $\xi_\Delta \in \Xi_\Delta$. Dacă $\xi_\Delta \subseteq \mathbb{Q}$ (resp. $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$), rezultă că $f(\xi_i) = 1$ (resp. 0), $(\forall)\, i = \overline{1, n}$, deci

$$\sigma_f(\Delta, \xi_\Delta) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1}) = b - a \text{ (resp. } 0)$$

și deci $|b - a - L| < \varepsilon$ și $|0 - L| < \varepsilon$, de unde rezultă că $b - a < 2\varepsilon$, absurd.
Rămîne că f nu este integrabilă.

De asemenea, putem utiliza teorema lui Darboux (T.9.1.8.). Fie deci $\Delta = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n\} \in \mathfrak{T}$ fixat. Evident avem $m_i = \inf f([x_{i-1}, x_i]) = 0$ și $M_i = \sup f([x_{i-1}, x_i]) = 1$, $(\forall)\, i = \overline{1, n}$, deci

$$s_f(\Delta) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) = 0 \text{ și } S_f(\Delta) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) = b - a.$$

Atunci $\underline{\int}_a^b f = 0$ și $\overline{\int}_a^b = b - a$, încît f nu este integrabilă Darboux etc.

În fine, să utilizăm teorema lui Lebesgue (T. 9.1.14.). Funcția f este mărginită și mulțimea discontinuităților lui f coincide cu $[0,1]$, care nu este evident de măsură Lebesgue nulă, prin urmare f nu este integrabilă.

Corolar 1. *Fie* $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *funcția lui Dirichlet. Atunci* $(\forall)\ a, b \in \mathbf{R},\ a < b$, *funcția* $f|_{[a,b]}$ *este nulă a.p.t. și neintegrabilă.*

Exemplul 4. *Să se arate plecînd de la definiția că funcția* $f(x) = x^2,\ x \in [0,1]$ *este integrabilă Riemann și să se calculeze integrala sa.*

Fie $\Delta := \{0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = 1\} \in \mathfrak{T} = \mathfrak{T}_{[0,1]}$ o diviziune arbitrară și $\xi_\Delta = (\xi_i)_{i=\overline{1,n}}$ o mulțime de puncte intermediare asociată lui Δ, fixate. Fie mai departe $F(x) = \dfrac{x^3}{3},\ x \in [0,1]$, o primitivă particulară a lui f. Evident avem:

$$\frac{x_i^3}{3} - \frac{x_{i-1}^3}{3} = c_i^2(x_i - x_{i-1}),\ c_i \in (x_{i-1},\ x_i)$$

Atunci

$$\sigma_f(\Delta, \xi_\Delta) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2(x_i - x_{i-1}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (\xi_i^2 - c_i^2)(x_i - x_{i-1}) + \sum_{i=1}^{n} c_i^2(x_i - x_{i-1}).$$

Cum avem

$$\sum_{i=1}^{n} c_i^2(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i^3}{3} - \frac{x_{i-1}^3}{3}\right) = \frac{1}{3}$$

și

$$|\xi_i^2 - c_i^2| = |\xi_i + c_i| \cdot |\xi_i - c_i| \leqslant (1+1) \cdot |x_i - x_{i-1}| \leqslant 2\nu(\Delta),$$

rezultă

$$\left|\sigma_f(\Delta, \xi_\Delta) - \frac{1}{3}\right| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |\xi_i^2 - c_i^2| \cdot (x_i - x_{i-1}) \leqslant$$

$$\leqslant 2\nu(\Delta) \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) = 2\nu(\Delta)$$

Așadar $(\forall)\ \varepsilon > 0$, $(\exists)\ \eta := \dfrac{\varepsilon}{2}$ a.î.

$$\left|\sigma_f(\Delta, \xi_\Delta) - \frac{1}{3}\right| < \varepsilon,\ (\forall)\ \Delta \in \mathfrak{T},\ \nu(\Delta) \wedge \xi_\Delta \in \Xi_\Delta$$

Prin urmare f este integrabilă Riemann și $\int_0^1 f = \dfrac{1}{3}$.

Exemplul 5. *Să se calculeze cu ajutorul sumelor Riemann integralele:* $1^\circ \int_0^1 x^2\,dx$; $2^\circ \int_0^1 x^3\,dx$.

1° Funcția $f(x) = x^2,\ x \in [0,1]$, fiind continuă, este integrabilă (T.9.1.14. Cor. 5). Atunci (T. 9.1.4. Cor. 2.) avem: $\int_0^1 f = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\dfrac{k}{m}\right)$,

deci

$$\int_0^1 x^2 \mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{1}{3}$$

2° Raționînd ca în 1° avem :

$$\int_0^1 x^3 \, \mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{k^3}{n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^4} \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 = \frac{1}{4}$$

Exemplul 6. *Să se calculeze cu ajutorul teoremei lui Darboux integrala* $\int_0^1 x^2 \, \mathrm{d}x$.

$(\forall)\ n \geqslant 1$, fie Δ_n diviziunea echidistantă $\left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots 1\right\}$ a lui $[0,1]$; evident avem $\nu(\Delta_n) \to 0$ $(n \to \infty)$. Deoarece f este strict crescătoare, rezultă :

$$m_k = \inf f\left(\left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]\right) = \frac{(k-1)^2}{n^2}, \quad M_k = \sup f\left(\left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]\right) = \frac{k^2}{n^2},$$

deci

$$S_f(\Delta_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \cdot \frac{k^2}{n^2} = \frac{1}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \to \frac{1}{3} \ (n \to \infty)$$

Analog $s_f(\Delta_n) = S_f(\Delta_n) + \frac{1}{n} \to \frac{1}{3}$ $(n \to \infty)$

Fie acum ξ_{Δ_n} o mulțime arbitrară de puncte intermediare asociată lui Δ_n. Atunci

$$s_f(\Delta_n) \leqslant \sigma_f(\Delta_n, \xi_{\Delta_n}) \leqslant S_f(\Delta_n), \ (\forall)\ n \geqslant 1,$$

deci (P. 2.3.10.) $\lim_{n\to\infty} \sigma_f(\Delta_n, \xi_{\Delta_n}) = \frac{1}{3}$. Prin urmare (T. 9.1.8.Cor.3(2°)) f este integrabilă și avem (T. 9.1.4. Cor. 2) : $\int_0^1 f = \frac{1}{3}$.

Exemplul 7. *Fie* $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *funcția lui Riemann. Atunci* f *este local integrabilă însă nu admite primitive.*

Avem $0 \leqslant f \leqslant 1$, deci f este mărginită. Am arătat că f este continuă pe $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}^*$, deci f este continuă a.p.t. și deci (P. 9.2.4.) f este local integrabilă.

Presupunem că f admite primitive, deci (P. 8.1.8.) f are proprietatea lui Darboux. Cum evident $f(\mathbf{R}) \subseteq \mathbf{Q}$, ar rezulta (P. 4.3.5.) că f este constantă, absurd. Rămîne că f nu admite primitive.

Corolar 1. *Fie* $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *funcția lui Riemann. Atunci* $(\forall)\ a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$, *funcția* $f|_{[a,b]}$ *este integrabilă și nu admite primitive.*

Exemplul 8. *Fie* $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ *o funcție definită astfel* $f(x) = 1$, *dacă* $x \in [0,1] \setminus \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\right\}$ *și* $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}$, $(\forall)\ n \geqslant 2$. *Atunci* f *este integrabilă și* $\int_0^1 f = 1$.

Evident f este continuă pe $[0,1] \setminus A$, unde $A = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\right\}$. Cum A este numerabilă, rezultă (P. 9.1.12. (3°)) că este neglijabilă, deci f este continuă

a.p.t. Deoarece $0 < f \leqslant 1$, rezultă că f este mărginită, deci (T. 9.1.14.) f este integrabilă. Mai departe avem $f = 1$ a.p.t. și 1 este continuă, deci (P. 9.2.13. Cor. 5) $\int_0^1 f = \int_0^1 1 = 1$.

Exemplul 9. *Fie* $A \subseteq [0,1]$ *mulțimea triadică a lui Cantor și* $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ *funcția caracteristică a mulțimii* A. *Atunci*: 1° A *este compactă neglijabilă și nenumerabilă*; 2° f *este integrabilă și are mulțimea discontinuităților nenumărabilă.*

Mulțimea A se definește astfel. Împărțim intervalul $[0, 1]$ în trei intervale: $\left[0, \frac{1}{3}\right], \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right), \left[\frac{2}{3}, 1\right]$; intervalul deschis $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ să-l notăm cu G_1^1. Împărțim apoi fiecare din intervalele $\left[0, \frac{1}{3}\right]$ și $\left[\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right]$ în cîte trei intervale: $\left[0, \frac{1}{9}\right] \left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right), \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right]$ și respectiv $\left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right], \left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right), \left[\frac{8}{9}, 1\right)$; intervalele deschise $\left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right), \left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)$ le notăm cu G_1^2, G_2^2 respectiv (fig. 43).

Continuăm acest procedeu indefinit. Atunci:

$$A := [0,1] \setminus (G_1^1 \cup (G_1^2 \cup G_2^2) \cup (G_1^3 \cup G_2^3 \cup G_3^3 \cup G_4^3) \cup \dots)$$

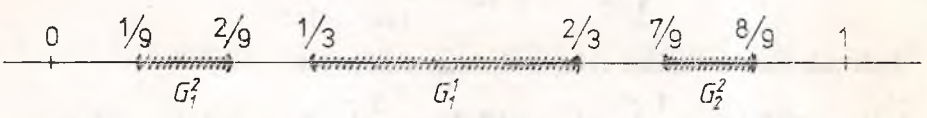


Fig. 43

Mulțimile G_i^j fiind deschise și $[0, 1]$ închisă, rezultă A închisă, deci (T. 5.2.6.) A compactă. Cum avem $|G_1^1| + (|G_1^2| + |G_2^2|) + \dots = \sum_{n \geqslant 1} \frac{2^{n-1}}{3^n} = 1$, rezultă imediat A de măsură Jordan nulă, deci neglijabilă.

Evident mulțimea $(0,1) \setminus A$ este deschisă și $f(x) = 0$, $(\forall)\ x \in (0,1) \setminus A$, deci (P. 5.5.9. Cor. 1) f este continuă pe $(0, 1) \setminus A$ și deci f este continuă a.p.t., prin urmare (T. 9.1.14.) f este integrabilă.

Se poate arăta că $A = \left\{ x \in [0,1];\ x = \sum_{n \geqslant 1} \frac{\alpha_n}{2^n},\ \alpha_n = 0 \text{ sau } 2 \right\}$, apoi că mulțimea tuturor șirurilor de numere care au două valori este echipotentă cu $\mathbf{R}$, deci $A \sim \mathbf{R}$ și deci A este nenumărabilă.

Corolar 1. 1° *Există mulțimi neglijabile și nenumărabile*; 2° *Există funcțiuni integrabile și care au mulțimea discontinuităților nenumărabilă.*

Exemplul 10. *Să se calculeze integrala* $\int_a^b (x-a)^m (b-x)^n \, dx$.

Notăm cu L_{mn} integrala dată. Integrînd prin părți avem:

$$\int_a^b \underbrace{(x-a)^m}_{u} \underbrace{(b-x)^n \, dx}_{dv} = -\frac{1}{n+1} (x-a)^m (b-x)^{n+1} \Big|_a^b +$$

$$+ \frac{m}{n+1} \int_a^b (x-a)^{m-1} (b-x)^{n+1} \, dx,$$

deci

$$I_{m,n} = \frac{m}{n+1} I_{m-1,n+1}, \quad (\forall)\ m, n \in \mathbf{N}$$

Atunci

$$I_{m,n} = \frac{m}{n+1} \cdot \frac{m-1}{n+2} \cdots \frac{1}{n+m} I_{0,m+n}$$

și deoarece

$$I_{0,m+n} = \int_a^b (b-x)^{m+n}\,dx = \frac{(b-a)^{m+n+1}}{m+n+1},$$

deducem

$$I_{m,n} = \frac{m}{n+1} \cdot \frac{m-1}{n+2} \cdots \frac{1}{n+m} \cdot \frac{(b-a)^{m+n+1}}{m+n+1} = \frac{n!\,m!\,(b-a)^{m+n+1}}{(n+m+1)!}$$

Corolar 1.

$$\int_0^1 x^m (1-x)^n\,dx = \frac{n!\,m!}{(n+m+1)!}$$

Corolar 2.

$$\int_0^1 (1-x^2)^n\,dx = \frac{(n!)^2\,2^{2n}}{(2n+1)!}$$

Într-adevăr, utilizînd relația de mai sus avem .

$$\int_0^1 (1-x^2)^n\,dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^1 (1-x^2)^n\,dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^1 (x+1)^n (1-x)^n\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{(n!)^2\,2^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Corolar 3. *Șirul* $a_n := \int_0^1 (1-x^2)^n\,dx\ (n \geqslant 1)$ *este strict descrescător și are limita* 0.

Ținem seama că $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2(2n+3)} \to 0\ (n \to \infty)$

Exemplul 11. *Să se calculeze integralele* : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx, \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx, (n \geqslant 1).$

Fie $I_n := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx$. Am arătat (P. 8.5.6.(1°)) relația recursivă :

$$\int \sin^n x\,dx = -\frac{1}{n}\sin^n x \cos x + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} x\,dx, \quad (\forall)\ n \geqslant 2,$$

deci $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-1} (\forall)\ n \geqslant 2$. Cum evident $I_0 = \frac{\pi}{2}$ și $I_2 = 1$, deducem :

$$I_{2k} = \frac{2k-1}{2k} \cdot \frac{2k-3}{2k-2} \cdots \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\frac{\pi}{2}$$

$$I_{2k+1} = \frac{2k}{2k+1} \cdot \frac{2k-2}{2k-1} \cdots \frac{4}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}.$$

Pentru calculul celei de a doua integrale facem schimbarea de variabilă $x = \frac{\pi}{2} - t$, $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ obținem :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \, dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \cos^n \left(\frac{\pi}{2} - t\right)(-1)\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t \, dt,$$

deci cele două integrale sînt egale.

Corolar 1. *Fie* $L_n := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx$ $(n \geqslant 1)$. *Atunci* $0 < L_n < L_{n-1}$ *și* $n L_{n-1} L_n = \frac{\pi}{2}$, $(\forall)$ $n \geqslant 2$, *deci* $\lim_{n\to\infty} L_n = 0$.

Se vede imediat că $L_{2k+1} < L_{2k} < L_{2k-1}$, $(\forall)$ $k \geqslant 2$ deci $(L_n)_{n\geqslant 1}$ este strict descrescător și evident minorat de 0 ; fie L limita sa. Trecînd la limită, $n \to \infty$, în relația $L_{n-1} \cdot L_n = \frac{\pi}{2n}$, obținem $L^2 = 0$, deci $L = 0$.

Exemplul 12. *Să se calculeze integrala* $L_n := \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^n x \, dx$ $(n \geqslant 1)$.

Am arătat (P. 8.5 6. (3°)) relația recursivă :

$$\int \operatorname{tg}^n x \, dx = \frac{1}{n-1} \operatorname{tg}^{n-1} x - \int \operatorname{tg}^{n-2} x \, dx + C, \quad (\forall) \quad n \geqslant 2,$$

deci

$$L_n = \frac{1}{n-1} - L_{n-2}, \quad (\forall) \quad n \geqslant 2 \tag{1}$$

(i) $\boxed{n = 2k}$. Din (1) rezultă

$$L_2 = \frac{1}{2-1} - L_0$$

$$L_4 = \frac{1}{4-1} - L_2$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$L_{2k} = \frac{1}{2k-1} - L_{2k-2}$$

Înmulțind prima relație cu 1, a doua cu -1, a treia, cu 1, ..., ultima cu $(-1)^{k-1}$, apoi adunăm ținînd cont că $L_0 = \frac{\pi}{4}$; obținem relația :

$$L_{2k} = (-1)^{k-1}\left(\frac{1}{2-1} - \frac{1}{4-1} - \cdots \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} - \frac{\pi}{4}\right)$$

(ii) $\boxed{n = 2k+1}$. Din (1) rezultă

$$L_3 = \frac{1}{3-1} - L_1$$

$$L_5 = \frac{1}{5-1} - L_3$$

. . . . . .

$$L_{2k+1} = \frac{1}{2k} - L_{2n-1}.$$

Înmulțim prima relație cu 1, a doua cu -1, a treia cu $1, \ldots$, ultima cu $(-1)^{k+1}$, apoi adunăm ținînd cont că $L_1 = -\ln\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \ln\sqrt{2}$; obținem relația:

$$L_{2k+1} = (-1)^{k-1}\left(\frac{1}{3-1} - \frac{1}{5-1} + \ldots + \frac{(-1)^{k+1}}{2k} - \ln\sqrt{2}\right)$$

9.4.2. Propoziție (Inegalitatea lui Cebîșev). *Fie* $f, g : [a, b] \to \mathbf{R}$ *două funcții monotone și de sens contrar. Atunci* $\int_a^b fg \leqslant \frac{1}{b-a}\left(\int_a^b f\right)\left(\int_a^b g\right)$

Dem. Înlocuind eventual f și g cu $-f$ și $-g$ respectiv, putem presupune f monoton crescătoare și g monoton descrescătoare. Punem $\alpha := \frac{1}{b-a}\int_a^b f$. Din T. 9.2.10. rezultă $f(a) \leqslant \alpha \leqslant f(b)$. Fie $c = \{\sup x \in [a, b]; f(x) \leqslant \alpha\}$. Atunci $(\forall)\ x \in [a, c]$ avem $\alpha \geqslant f(x)$ și $g(x) \geqslant g(c)$, deci (fig. 44)

$$(\alpha - f(x))g(x) \geqslant (\alpha - f(x))g(c) \qquad (1)$$

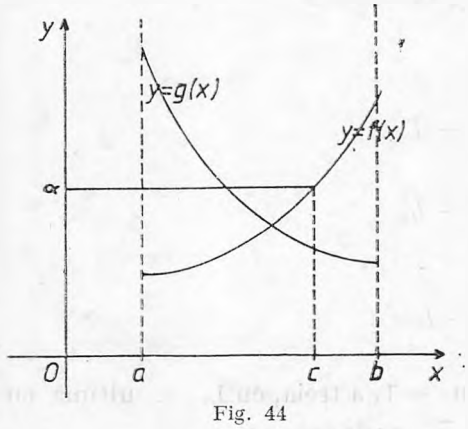


Fig. 44

Analog $(\forall)\ x \in [c,b]$, avem $\alpha \leqslant f(x)$ și $g(x) \leqslant g(c)$, deci

$$(\alpha - f(x))g(x) \geqslant (\alpha - f(x))g(c) \qquad (2)$$

Din (1) și (2) rezultă

$$\int_a^b (\alpha - f)g = \int_a^c (\alpha - f)\, g + \int_c^b (\alpha - f)\, g \geqslant$$

$$\geqslant \int_a^c (\alpha - f)\, g(c) + \int_c^b (\alpha - f)\, g(c) =$$

$$= g(c)\int_c^b (\alpha - f) = g(c)\left(\alpha(a-b) - \int_a^b f\right) = 0$$

Așadar

$$\int_a^b (\alpha - f)g \geqslant 0 \Leftrightarrow \int_a^b g \geqslant \int_a^b (fg)$$

9.4.3. Propoziție (Inegalitatea lui Young). *Fie* $f: \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ *o funcție continuă, strict crescătoare a.î.* $f(0)=0$. *Atunci* $(\forall)\ a \in \mathbf{R}_+$ *și* $b \in f(\mathbf{R}_+)$, *avem inegalitatea* :

$$ab \leqslant \int_0^a f(x)\,dx + \int_0^b f^{-1}(y)\,dy$$

Dem : Să dăm o justificare geometrică inegalității din enunț. Fie G_f graficul lui f și S_1 (resp. S_2) porțiunile din plan cuprinse între G_f, axa $0x$ și dreapta $x = a$ (resp. G_f, axa $0y$ și dreapt a $y = b$) (fig. 45). Evident avem :

$$ab \leqslant \text{aria } S_1 + \text{aria } S_2$$

Cum aria $S_1 = \int_0^a f$ și aria $S_2 = \int_0^b f^{-1}$, inegalitatea dată este adevărată.

Corolar 1. *Fie* $a, b \in \mathbf{R}$ *și* $p, q > 0$ *a.î.* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. *Atunci avem*

$$|ab| \leqslant \frac{|a|^p}{p} + \frac{|b|^q}{q}$$

Dem. Înlocuind a și b prin $|a|$ și $|b|$, respectiv, putem presupune $a \geqslant 0$ și $b \geqslant 0$. Fie $\alpha > 0$ fixat și $f: \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$ o funcție definită astfel $f(x) = x^\alpha$. Evident f este continuă, strict crescătoare și $f(0) = 0$. Atunci, fixînd a și $b \geqslant 0$, avem :

$$ab \leqslant \int_0^a x^\alpha\,dx + \int_0^b y^{1/\alpha}\,dy = \frac{a^{\alpha+1}}{\alpha+1} \frac{b^{\frac{1}{\alpha}+1}}{\frac{1}{\alpha}+1} \qquad (1)$$

Cum $\frac{1}{p} < 1$ și $\frac{1}{q} < 1$, rezultă $p > 1$ și $q > 1$, deci pentru $\alpha := p - 1$ avem $\frac{1}{\alpha} + 1 = \frac{1}{p-1} + 1 = \frac{p}{p-1} = q$ și deci din (1) deducem $ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$.

9.4.4. Propoziție (Inegalitatea lui Hölder). *Fie* $f, g: [a, b] \to \mathbf{R}$ *două funcții integrabile și* $p, q \in \mathbf{R}_+^*$ *cu* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. *Atunci avem inegalitatea* :

$$\int_a^b |fg| \leqslant \left(\int_a^b |f|^p\right)^{1/p} \cdot \left(\int_a^b |g|^q\right)^{1/q} \qquad (1)$$

Dem. Dacă $\int_a^b |f|^p = 0$ sau $\int_a^b |g|^q = 0$, atunci (P. 9.2.13. Cor. 3) $|f| = 0$ a.p.t. sau $|g| = 0$ a.p.t., deci $|fg| = 0$ a.p.t. și deci (P.9.2.13.) $\int_a^b |fg| = 0$, prin urmare inegalitatea (1) este evidentă.

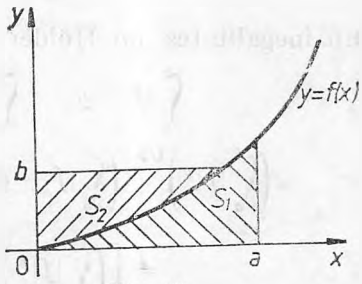


Fig. 45

23—C. 234 22

Presupunem $\int_a^b |f|^p > 0$ şi $\int_a^b |g|^q > 0$ şi fie $\alpha := \frac{|f|}{\left(\int_a^b |f|^p\right)^{1/p}}$ şi $\beta := \frac{|g|}{\left(\int_a^b |g|^q\right)^{1/q}}$. Utilizînd inegalitatea $\alpha\beta \leqslant \frac{\alpha^p}{p} + \frac{\beta^q}{q}$, obţinem :

$$\frac{|f| \cdot |g|}{\left(\int_a^b |f|^p\right)^{1/p} \left(\int_a^b |g|^q\right)^{1/q}} \leqslant \frac{|f|^p}{p\int_b^b |f|^p} + \frac{|g|^q}{q\int_a^b |g|^q},$$

de unde prin integrare, rezultă

$$\frac{\int_a^b |fg|}{\left(\int_a^b |f|^p\right)^{1/p} \left(\int_a^b |g|^q\right)^{1/q}} \leqslant \frac{\int_a^b |f|^p}{p\int_a^b |f|^p} + \frac{\int_a^b |g|^q}{q\int_a^b |g|^q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

prin urmare

$$\int_a^b |fg| \leqslant \left(\int_a^b |f|^p\right)^{1/p} \cdot \left(\int_a^b |g|^q\right)^{1/q}$$

Corolar 1 (Inegalitatea lui Buniakovski).

$$\left(\int_a^b |fg|\right)^2 \leqslant \left(\int_a^b |f|^2\right) \cdot \left(\int_a^b |g|^2\right)$$

Corolar 2.

$$\int_a^b |f| \leqslant (b-a)^{1/q} \left(\int_a^b |f|^p\right)^{1/p}.$$

9.4.5. Propoziţie (Inegalitatea lui Minkowski). *Fie* $f, g: [a, b] \to \mathbf{R}$ *două funcţii integrabile şi* $p \geqslant 1$. *Atunci avem inegalitatea* :

$$\left(\int_a^b |f+g|^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\int_a^b |f|^p\right)^{1/p} + \left(\int_a^b |g|^p\right)^{1/p} \tag{1}$$

Dem. Dacă $p = 1$ sau $\int_a^b |f+g|^p = 0$, inegalitatea (1) este evidentă. Presupunem deci $p > 1$ şi $\int_a^b |f+g|^p > 0$. Evident avem :

$$|f+g|^p \leqslant |f| \cdot |f+g|^{p-1} + |g| \cdot |f+g|^{p-1}$$

Din inegalitatea lui Hölder (P.9.4.4.) rezultă

$$\int_a^b |f+g|^p \leqslant \int_a^b |f| \cdot |f+g|^{p-1} + \int_a^b |g| \cdot |f+g|^{p-1} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int_a^b |f|^p\right)^{1/p} \cdot \left(\int_a^b |f+g|^{(p-1)q}\right)^{1/q} + \left(\int_a^b |g|^p\right)^{1/p} \cdot \left(\int_a^b |f+g|^{(p-1)q}\right)^{1/q} =$$

$$= \left[\left(\int_a^b |f|^p\right)^{1/p} + \left(\int_a^b |g|^p\right)^{1/p}\right] \cdot \left(\int_a^b |f+g|^p\right)^{1/q}$$

(Am utilizat relația $(p-1)q=p$). Prin împărțire cu $\left(\int_a^b |f+g|^p\right)^{1/q}$, obținem:

$$\left(\int_a^b |f+g|^p\right)^{1-1/q} \leqslant \left(\int_a^b |f|^p\right)^{1/p} + \left(\int_a^b |g|^p\right)^{1/p}$$

Ținem mai departe seama că $1-\frac{1}{q}=\frac{1}{p}$.

Corolar 1.

$$\left(\int_a^b |f+g|^2\right)^{1/2} \leqslant \left(\int_a^b |f|^2\right)^{1/2} + \left(\int_a^b |g|^2\right)^{1/2}$$

9.4.6. Propoziție. *Fie* $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ *o funcție integrabilă. Atunci* $(\forall)\ 1\leqslant p<s<+\infty$, *avem inegalitatea:*

$$\left(\int_a^b |f|^r\right)^{1/r} \leqslant (b-a)^{\frac{1}{r}-\frac{1}{s}}\left(\int_a^b |f|^s\right)^{1/s}$$

Dem. $(\forall)\ p,q>1$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, avem (P. 9.4.4. Cor. 2):

$$\int_a^b |f|^r \leqslant (b-a)^{\frac{1}{q}}\left(\int_a^b |f|^{rp}\right)^{1/p}$$

Ridicînd la puterea $\frac{1}{r}$, obținem:

$$\left(\int_a^b |f|^r\right)^{1/r} \leqslant (b-a)^{\frac{1}{qr}}\left(\int_a^b |f|^{rp}\right)^{1/rp}$$

Dacă $p=\frac{s}{r}$, rezultă $\frac{1}{qr}=\left(1-\frac{1}{p}\right)\frac{1}{r}=\frac{1}{r}-\frac{1}{s}$, deci

$$\left(\int_a^b |f|^r\right)^{1/r} \leqslant (b-a)^{\frac{1}{r}-\frac{1}{s}}\left(\int_a^b |f|^s\right)^{1/s}$$

Corolar 1. *Fie* $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ *o funcție integrabilă. Atunci funcția* $[1,\infty)\ni p\mapsto\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b |f|^p\right)^{1/p}$, *este monoton crescătoare.*

Dem. Fie $1\leqslant r\leqslant s$ fixați. Atunci (P. 9.4.5.) avem:

$$\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b |f|^r\right)^{\frac{1}{r}} = (b-a)^{-\frac{1}{r}}\left(\int_a^b |f|^r\right)^{1/r} \leqslant$$

$$\leqslant (b-a)^{-\frac{1}{r}}\cdot(b-a)^{\frac{1}{r}-\frac{1}{s}}\left(\int_a^b |f|^s\right)^{1/s} = \left(\frac{1}{b-a}\int_a^b |f|^s\right)^{1/r} \text{ etc.}$$

Corolar 2. *Fie* $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ *o funcție integrabilă. Dacă* $0<b-a\leqslant 1$, *atunci funcția* $[1,\infty)\ni p\mapsto\left(\int_a^b |f|^p\right)^{1/p}$, *este monoton crescătoare.*

Dem. Fie $1\leqslant r<s+\infty$ fixați. Deoarece $(b-a)^{\frac{1}{r}-\frac{1}{s}}\leqslant 1$, avem (P.9.4.6.) $\left(\int_a^b |f|^r\right)^{1/r}\leqslant 1.\ \left(\int_a^b |f|^s\right)^{1/s}$ etc.

9.4.7. Propoziție (Inegalitatea lui Jensen). *Fie* $f:[a,b]\to[\alpha,\beta]$ *o funcție integrabilă și* $\varphi:[\alpha,\beta]\to\mathbf{R}$ *o funcție convexă continuă. Atunci*

$$\varphi\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f\right)\leqslant\frac{1}{b-a}\int_a^b\varphi\circ f.$$

Dem. Funcția f fiind integrabilă și φ continuă, rezultă că $\varphi\circ f$ este integrabilă. Atunci (T.9.1.4. Cor. 2) avem :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(a+\frac{k}{n}(b-a)\right)\to\frac{1}{b-a}\int_a^b f\ (n\to\infty)\tag{1}$$

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\varphi\circ f)\left(a+\frac{k}{n}(b-a)\right)\to\frac{1}{b-a}\int_a^b\varphi\circ f\ \ (n\to\infty)\tag{2}$$

Pe de altă parte φ fiind convexă, avem (P.7.1.3.) :

$$\varphi\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(a+\frac{k}{n}(b-a)\right)\right)\leqslant\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\varphi\circ f)\left(a+\frac{k}{n}(b-a)\right),\ \ (\forall)\ \ n\geqslant 1$$

Din (3) prin trecere la limită, $n\to\infty$, rezultă ținînd seama de (1), (2) și de faptul că φ este continuă, inegalitatea

$$\varphi\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f\right)\leqslant\frac{1}{b-a}\int_a^b\varphi\circ f.$$

Corolar 1. *Fie* $I,J\subseteq\mathbf{R}$ *două intervale,* $f:I\to J$ *o funcție local integrabilă, în particular* f *continuă, și* $\varphi:J\to\mathbf{R}$ *o funcție convexă continuă. Atunci* $(\forall)$ $a,b\in I$, $a<b$, *avem* $\varphi\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f\right)\leqslant\frac{1}{b-a}\int_a^b\varphi\circ f$.

Corolar 2. *Fie* $I,J\subseteq\mathbf{R}$ *două intervale,* $f:I\to J$ *o funcție local integrabilă, în particular* f *continuă și* $\varphi:J\to\mathbf{R}$ *o funcție de două ori derivabilă cu* $\varphi''\geqslant 0$ (*resp.* $\varphi''\leqslant 0$). *Atunci* $(\forall)$ $a,b\in I$, $a<b$, *avem* :

$$\varphi\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f\right)\leqslant(\text{resp. }\geqslant)\frac{1}{b-a}\int_a^b\varphi\circ f$$

Dem. Din P.7.1.3. rezultă φ convexă (resp. concavă). Aplicăm mai departe Cor. 1.

Corolar 3. *Fie* $I\subseteq\mathbf{R}$ *un interval și* $f:I\to\mathbf{R}$ *o funcție local integrabilă strict pozitivă. Atunci* $(\forall)$ $a,b\in I$, $a<b$, *avem* $\frac{1}{b-a}\int_a^b\ln f\leqslant\ln\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f\right)$ și $\int_a^b\frac{1}{f}\geqslant(b-a)^2\left(\int_a^b f\right)^{-1}$

Dem. Aplicăm Cor. 2 pentru f și funcția concavă (resp. convexă) $\varphi(x)=\ln x$, $x\in\mathbf{R}_+^*$ $\left(\text{resp. }\varphi(x)=\frac{1}{x},\ x\in\mathbf{R}_+^*\right)$.

Corolar 4. *Fie* $I\subseteq\mathbf{R}$ *un interval și* $f:I\to\mathbf{R}$ *o funcție local integrabilă nenegativă. Atunci* $(\forall)$ $a,b\in I$, $a<b$ și $1<p<+\infty$ (*resp.* $0<p<1$), *avem* $\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f\right)^p\leqslant(\text{resp.}\geqslant)\frac{1}{b-a}\int_a^b f^p$.

Dem. Aplicăm Cor. 2 pentru f și funcția concavă (resp. convexă) $\varphi(x)=x^p$, $x\in\mathbf{R}_+^*$, unde $1<p<\infty$ (resp. $0<p<1$).

9.4.8. Propoziție. Fie $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ *o funcție continuă. Atunci*

$$\lim_{p\to\infty} \left(\int_a^b |f|^p\right)^{1/p} = \max_{x\in[a,\,b]} |f(x)|$$

Dem. Fie $M := \max_{x\in[a,\,b]} |f(x)|$. Evident avem $|f(x)| \leqslant M$, $(\forall)\ x \in [a, b]$, deci

$$\left(\int_a^b |f|^p\right)^{1/p} \leqslant M\left(\int_a^b \mathrm{d}x\right)^{1/p} = M(b-a)^{1/p},\ (\forall)\ p \geqslant 1$$

Presupunem mai departe $M > 0$ și fie $0 < \lambda < M$ fixat. Evident $(\exists)\ x_0 \in [a, b]$ cu $|f(x_0)| > \lambda$, deci $(\exists)\ c, d \in [a, b]$, $c < d$, a.î. $|f(x)| > \lambda$, $(\forall)\ x \in [c, d]$ și deci

$$\left(\int_a^b |f|^p\right)^{1/p} \geqslant \left(\int_c^d |f|^p\right)^{1/p} \geqslant \lambda(d-c)^{1/p},\ (\forall)\ p \geqslant 1.$$

Așadar,

$$\lambda(d-c)^{1/p} \leqslant \left(\int_a^b |f|^p\right)^{1/p} \leqslant M(b-a)^{1/p},\ (\forall)\ p \geqslant 1 \tag{1}$$

Deoarece $\lim\limits_{p\to\infty} (d-c)^{1/p} = \lim\limits_{p\to\infty} (b-a)^{1/p} = 1$, din (1) rezultă

$$\lambda \leqslant \varliminf_{p\to\infty} \left(\int_a^b |f|^p\right)^{1/p} \leqslant \varlimsup_{p\to\infty} \left(\int_a^b |f|^p\right)^{1/p} \leqslant M \tag{2}$$

Cum $\lambda < M$ a fost arbitrar, din (2) rezultă

$$\varliminf_{p\to\infty} \left(\int_a^b |f|^p\right)^{1/p} = \varlimsup_{p\to\infty} \left(\int_a^b |f|^p\right)^{1/p} = M,$$

prin urmare (P.5.5.12.(4°)) $\lim\limits_{p\to\infty} \left(\int_a^b |f|^p\right)^{1/p} = M$

Corolar 1. *Fie* $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ *o funcție continuă. Atunci*

1° $$\lim_{p\to\infty} \left(\frac{1}{b-a}\int_a^b |f|^p\right)^{1/p} = \max_{x\in[a,\,b]} |f(x)|;$$

2° $$\lim_{p\to\infty} \left(\frac{1}{b-a}\int_a^b |f|^p\right)^{1/p} = \min_{x\in[a,\,b]} |f(x)|,\ \textit{dacă}\ f > 0$$

Dem. 1° Aplicăm P.9.4.8. ținînd sema că $\lim\limits_{p\to\infty} (b-a)^{1/p} = 1$

2° $$\lim_{p\to\infty} \left(\int_a^b |f|^p\right)^{1/p} = \lim_{q\to\infty} \left(\int_a^b |f|^{-q}\right)^{-1/q} =$$

$$= \left(\lim_{q\to\infty} \left(\int_a^b \left(\frac{1}{|f|}\right)^q\right)^{1/q}\right)^{-1} = \max_{x\in[a,\,b]} \frac{1}{|f(x)|} = \min_{x\in[a,\,b]} |f(x)|.$$

Observația 1. Se poate arăta o afirmație mai generală. *Fie* $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ *o funcție integrabilă; atunci*

$$\lim_{p\to\infty} \left(\int_a^b |f|^p\right)^{1/p} = \operatorname{vrai\,max} |f|,$$

unde $\operatorname{vrai\,max} |f| := \inf \{ \sup_{x\in[a,\,b]\setminus A} |f(x)| ;\ A \subseteq [a, b],\ A$ *neglijabilă*$\}$.

9.4.9. Propoziţie. *Fie* $\alpha \in (0, \infty]$ *şi* $f : (-\alpha, \alpha) \to \mathbb{R}$ *o funcţie continuă. Atunci avem :*

1° $\int_a^b f(-x)\,dx = \int_{-b}^{-a} f(x)\,dx$, $(\forall)$ $a, b \in (-\alpha, \alpha)$

În particular $\int_0^a f(-x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx$, $(\forall)$ $a \in (-\alpha, \alpha)$

2° f *pară* $\Leftrightarrow \int_{-a}^{0} f = \int_0^a f$, $(\forall)$ $a \in (0, \alpha)$ (*resp.* $a \in (-\alpha, \alpha)$;

3° f *impară* $\Leftrightarrow \int_{-a}^{a} f = 0$, $(\forall)$ $a \in (0, \alpha)$ (*resp.* $a \in (-\alpha, \alpha)$).

Dem. 1° Fie $a, b \in (-\alpha, \alpha)$, $a \leqslant b$, fixaţi. Cu substituţia $x = \varphi(t)$, $t \in [-b, -a]$, obţinem :

$$\int_a^b f(-x)\,dx = \int_{-a}^{-b} f(t) \cdot (-1) \cdot dt = \int_{-a}^{-b} f(t)\,dt.$$

2° ($\Rightarrow$). Dacă f este pară, avem $f(x) = f(-x)$ $(\forall)$ $x \in (-\alpha, \alpha)$, deci

$$\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(-x)\,dx \overset{1°}{=} \int_{-a}^{0} f(x)\,dx, \quad (\forall)\ a \in (0, \alpha)$$

($\Leftarrow$). Presupunem că $\int_0^a f = \int_{-a}^{0} f$, $(\forall)$ $a \in (0, \alpha)$. Atunci

$$\int_0^a (f(x) - f(-x))\,dx = \int_0^a f(x)\,dx - \int_0^a f(-x)\,dx \overset{1°}{=} \int_0^a f - \int_{-a}^{0} f = 0, \ (\forall)\ a \in (0, \alpha),$$

de unde rezultă $\int_a^b (f(x) - f(x))\,dx = 0$, $(\forall)$ $a, b \in (0, \alpha)$ şi deci (P.9.2.13.) $f(x) - f(-x) = 0$, $(\forall)$ $x \in (0, a)$. Dacă $x \in (-\alpha, 0)$, avem $-x \in (0, \alpha)$, deci $f(-x) - f(-(-x)) = 0$ şi deci $f(x) = f(-x)$, $(\forall)$ $x \in (-\alpha, \alpha)$ etc.

3° ($\Rightarrow$). Dacă f este imapră, rezultă că $f(x) + f(-x) = 0$, $(\forall)$ $x \in (-\alpha, \alpha)$, deci $(\forall)$ $a \in (0, \alpha)$ avem

$$\int_{-a}^{a} f = \int_{-a}^{0} f + \int_0^a f \overset{1°}{=} \int_0^a (f(-x) + f(x))\,dx = 0$$

($\Leftarrow$) Fie $a, b \in (-\alpha, \alpha)$, $a < b$, fixaţi. Cf. ipotezei avem : $\int_{-a}^{a} f = \int_{-b}^{b} f = 0$. Cum însă (T.9.2.2.) :

$$\int_b^a f = \int_b^{-b} f + \int_{-b}^{-a} f + \int_{-a}^{a} f \text{ şi } \int_{-b}^{-a} f(x)\,dx \overset{1°}{=} \int_a^b f(-x)\,dx,$$

rezultă că $\int_b^a f(x)\,dx = \int_a^b f(-x)\,dx$, deci $\int_a^b (f(-x) + f(x))\,dx = 0$ şi deci (P.9.2.13.) $f(-x) + f(x) = 0$, $(\forall)$ $x \in (-\alpha, \alpha)$. Prin urmare f este impară.

Corolar 1. *Fie* $\alpha \in (0, \infty]$ *şi* $f : (-\alpha, \alpha) \to \mathbf{R}$ *o funcţie continuă şi pară. Atunci* $\int_{-a}^{a} f = 2\int_{0}^{a} f$, $(\forall)$ $a \in (-\alpha, \alpha)$.

Dem. Dacă f este pară, avem $f(x) = f(-x)$, $(\forall)$ $x \in (-\alpha, \alpha)$, deci

$$\int_{-a}^{a} f = \int_{-a}^{0} f + \int_{0}^{a} f = \int_{-a}^{0} f(-x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)dx \overset{1^\circ}{=} 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

Corolar 2. *Fie* $\alpha \in (0, \alpha]$ *şi* $f : (\alpha, \alpha) \to \mathbf{R}$ *o funcţie continuă. Atunci :*

1° *f pară* $\Rightarrow \int_{-a}^{a} xf(x)\,dx = 0$, $(\forall)$ $a \in (-\alpha, \alpha)$;

2° *f impară* $\Rightarrow \int_{-a}^{a} xf(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} xf(x)\,dx$, $(\forall)$ $a \in (-\alpha, \alpha)$;

3° *f arbitrară* $\Rightarrow \int_{-a}^{a} f(x^2)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x^2)\,dx$ *şi* $\int_{-a}^{a} xf(x^2)dx = 0$, $(\forall)$ $a \in (-\alpha, \alpha)$.

Dem. 1° Dacă f este pară rezultă că funcţia xf este impară, deci (P. 9.4.9. (3°)) $\int_{-a}^{a} xf(x)\,dx = 0$, $(\forall)$ $a \in (-\alpha, \alpha)$.

2° Se procedează ca în 1°.

3° Rezultă din 1° şi 2° ţinînd seama că funcţia $f(x^2)$ (resp. $xf(x^2)$) este pară (resp. impară).

Aplicaţie. $(\forall)$ $a \in \mathbf{R}$, avem $\int_{-a}^{a} \cos x\,dx = 2\int_{0}^{a} \cos x\,dx$, $\int_{-a}^{a} \sin x\,dx = 0$, $\int_{-a}^{a} x^{2n+1} \cos x\,dx = 0$ etc.

9.4.10. Propoziţie. *Fie* $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *o funcţie continuă. Atunci avem :*

1° *f periodică de perioadă* $T \Leftrightarrow \int_{x}^{x+T} f = c(const)$, $(\forall)$ $x \in \mathbf{R}$;

2° *a) Orice primitivă a lui T este periodică de perioadă* $T \Leftrightarrow$ *b) f este periodică de perioadă* $T \Leftrightarrow$ *c)* $\int_{x}^{x+T} f = 0$, $(\forall)$ $x \in \mathbf{R}$.

Dem. 1° ($\Rightarrow$). Prin ipoteză $f(x \dotplus T) = f(x)$, $(\forall)$ $x \in \mathbf{R}$. Evident avem

$$\int_{x}^{x+T} f(t)\,dt = \int_{x}^{0} f(t)\,dt + \int_{0}^{T} f(t)\,dt + \int_{T}^{x+T} f(t)\,dt,\ (\forall)\ x \in \mathbf{R} \qquad (1)$$

Cu schimbarea de variabilă $t = \theta \dotplus T$, $\theta \in [0, T]$, ultima integrală devine :

$$\int_{T}^{x+T} f(t)\,dt = \int_{0}^{x} f(\theta \dotplus T)\,d\theta = \int_{0}^{x} f(\theta)\,d\theta,\ (\forall)\ x \in \mathbf{R} \qquad (2)$$

Din (1) şi (2) rezultă

$$\int_{x}^{x+T} f = \int_{x}^{0} f \dotplus \int_{0}^{T} f \dotplus \int_{0}^{x} f = \int_{0}^{T} f,\ (\forall)\ x \in \mathbf{R}$$

($\Leftarrow$). Presupunem că $\int_x^{x+T} f = c$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$ și fie F o primitivă a lui f. Atunci (T. 9.3.2.) $c = F(x + T) - F(x)$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$, deci prin derivare obținem:

$$f(x + T) - f(x) = F'(x + T) - F'(x) = 0, \quad (\forall)\ x \in \mathbf{R},$$

prin urmare f este periodică de perioadă T.

2° Să observăm că, orice primitivă a lui f este periodică de perioadă $T \Leftrightarrow$ $(\exists)\ g$ o primitivă a lui f, periodică de perioadă $T \Leftrightarrow$ funcția $F(x) = \int_0^x f$, $x \in \mathbf{R}$ este periodică de perioadă T.

a) $\Rightarrow$c). Dacă a) este adevărat, atunci F este periodică de perioadă T, deci (T. 9.3.2.) avem:

$$\int_x^{x+T} f(t)\mathrm{d}t = F(x + T) - F(x) = 0, \quad (\forall)\ x \in \mathbf{R}$$

c) $\Rightarrow$ b). Rezultă din 1°.

b) $\Rightarrow$ a). Dacă f este periodică de perioadă T avem

$$(F(x + T) - F(x))' = f(x + T) - f(x) = 0, \quad (\forall)\ x \in \mathbf{R}$$

deci (T. 6.3.5.) $(\exists)\ c \in \mathbf{R}$ a.î. $F(x + T) - F(x) = c$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$. Atunci

$$c = F(0 + T) - F(0) = \int_0^T f = 0, \text{ deci } F(x + T) = F(x), \quad (\forall)\ x \in \mathbf{R}$$

și deci F este periodică de perioadă T.

9.4.11. Propoziție. *Fie $f: \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$ o funcție continuă și periodică de perioadă T. Atunci*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t f = \frac{1}{T}\int_0^T f.$$

Dem. $(\forall)\ t \in \mathbf{R}^+$, $(\exists)\ n = n(t) \in \mathbf{N}$ și $a = a(t) \in [0, T]$ a.î. $t = nT + a$, deci $\int_0^t f = \int_0^{nT} f + \int_{nT}^t f$. Evident avem $\int_0^{nT} f = \sum_{k=0}^{n} \int_{kT}^{(k+1)T} f$, deci cu schimbarea de variabilă $x = \theta + kT$, $\theta \in [0, T]$, deducem:

$$\int_{kT}^{(k+1)T} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^T f(\theta + kT)\,\mathrm{d}\theta = \int_0^T f(\theta)\,\mathrm{d}\theta,$$

deci $\int_0^{nT} f = n\int_0^T f$. În fine, cu schimbarea de variabilă $x = \theta + nT$, $\theta \in [0, T]$, deducem:

$$\int_{nT}^t f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{t-nT} f(\theta + nT)\,\mathrm{d}\theta = \int_0^a f(\theta)\,\mathrm{d}\theta,$$

deci

$$\frac{1}{t}\int_0^t f = \frac{n(t)}{t}\int_0^T f + \frac{1}{T}\int_0^{a(t)} f. \tag{1}$$

Cum avem:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{n(t)}{t} = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{T + \frac{a(t)}{n(t)}} = \frac{1}{T} \tag{2}$$

și

$$\frac{1}{t}\left|\int_0^{a(t)} t\right| \leqslant \frac{1}{t}\int_0^{a(t)} |f| \leqslant \frac{1}{t}\int_0^{T} |f|, \quad (\forall)\ t \in \mathbf{R}_+^*,$$

rezultă $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^{a(t)} f = 0$ (3). Din (1), (2), (3) conchidem că $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^{t} f = \frac{1}{T}\int_0^{T} f$.

Corolar 1. *Fie* $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *o funcție continuă și periodică de perioadă* T. *Atunci* $\lim\limits_{t\to\infty} \int_a^b f(xt)\,dx = \frac{b-a}{T}\int_a^T f, (\forall)\ a, b \in \mathbf{R}$.

Dem. Punem $xt = y$ și obținem:

$$\int_b^a f(xt)\,dx = \frac{1}{t}\int_{at}^{tt} f(y)\,dy = b\left(\frac{1}{tb}\int_0^{tb} f\right) - a\left(\frac{1}{ta}\int_0^{ta} f\right)$$

Trecem mai departe la limită, $t \to \infty$, ținînd cont de P. 9.4.11.

9.4.12. Propoziție (Variantă a Iformule de medie). *Fie* $f:[a, b]\to\mathbf{R}$ *o funcție integrabilă cu proprietatea Darboux. Atunci* $(\exists)\ c \in (a, b)$ *a.î.* $\int_a^b f = (b-a) f(c)$.

Dem. Fie $\alpha := \frac{1}{b-a}\int_a^b f$. Evident avem $\int_a^b (f-\alpha) = 0$. Deoarece f are proprietatea Darboux, rezultă că $f-\alpha$ are proprietatea Darboux. Atunci dacă $f(x)-\alpha \neq 0$, $(\forall)\ x \in (a, b)$, avem $f(x)-\alpha > 0$, $(\forall)\ x \in (a, b)$ sau $f(x)-\alpha < 0$, $(\forall)\ x \in (a, b)$; presupunem că sîntem în primul caz și fie $\bar{f}: [a, b] \to \mathbf{R}$ o funcție definită astfel. $\bar{f}(a) = \bar{f}(b) = \alpha$ și $\bar{f}(x) = f(x)$ $(\forall)\ x \in (a, b)$. Evident $\bar{f}-\alpha$ este integrabilă, $\bar{f}-\alpha \geqslant 0$ și $\bar{f}(x)-\alpha > 0$ $(\forall)\ x \in [c, d] \subseteq (a, b)$, deci (P. 9.2.13. Cor. 4) $\int_a^b (\bar{f}-\alpha) > 0$ și deci $\int_a^b (f-\alpha) = \int_a^b (\bar{f}-\alpha) > 0$

absurd. Rămîne că $(\exists)\ c \in (a, b)$ cu $f(c) = \alpha \Leftrightarrow \int_a^b f = (b-a) f(c)$.

Corolar 1. *Fie* $f: [a, b] \to \mathbf{R}$ *o funcție continuă. Atunci* $(\exists)\ c \in (a, b)$ *a.î.* $\int_b^a f = (b-a)\ f(c)$ *i.e.* $\mu[f] = f(c)$.

9.4.13. Propoziție. *Fie* $I \subseteq \mathbf{R}$ *un interval și* $f: I \to \mathbf{R}$ *o funcție continuă. Atunci* $(\forall)\ J \subseteq \mathbf{R}$ *un interval și* $\varphi, \psi: J \to I$ *două funcții derivabile, rezultă că funcția* $F(x) = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f$, $x \in J$, *este derivabilă și avem relația:*

$$F'(x) = f(\psi(x))\psi'(x) - f(\varphi(x))\varphi'(x)\ \ (\forall)\ x \in J$$

Dem. Fie $g(y) := \int_a^y f$, $y \in I$, unde a este fixat în I. Atunci g este derivabilă și avem $g'(y) = f(y)$, $(\forall)\ y \in I$. Evident putem scrie

$$F(x) = \int_{\varphi(x)}^{a} f + \int_a^{\psi(x)} f = -g(\varphi(x)) + g(\psi(x)),\ \ (\forall)\ x \in J,$$

deci

$$F'(x) = -g'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) + g'(\psi(x)) \cdot \psi'(x) =$$
$$= -f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) + f(\psi(x)) \cdot \psi'(x),\ (\forall)\ x \in J$$

Corolar 1. *Fie* $I \subseteq \mathbf{R}$ *un interval şi* $f : I \to \mathbf{R}$ *o funcţie continuă. Atunci* $(\forall)\ J \subseteq \mathbf{R}$ *un interval şi* $\varphi : J \to I$ *o funcţie derivabilă, rezultă că funcţia* $F(x) = \int_a^{\varphi(x)} f$, $x \in J$, *este derivabilă şi avem* $F'(x) = f(\varphi(x))\,\varphi'(x)$, $(\forall)\ x \in J$.

9.4.14. Propoziţie (R i e m a n n). *Fie* $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ *o funcţie integrabilă. Atunci*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x) \sin nx\, dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x) \cos nx = 0$$

Dem. Fie $\varepsilon > 0$ fixat. Cf. P. 9.2.14. Cor. 3 $(\exists)\ g : [a, b] \to \mathbf{R}$ o funcţie de clasă $\mathcal{C}^\infty$ a.î. $\int_a^b |f - g| \leqslant \varepsilon/2$. Evident avem :

$$\left|\int_a^b f(x) \sin nx\, dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x) - g(x)|\,|\sin nx|\, dx + \left|\int_a^b g(x) \sin nx\, dx\right| \qquad (1)$$

Să majorăm prima integrală :

$$\int_a^b |f(x) - g(x)|\,|\sin nx|\, dx \leqslant \int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx \leqslant \frac{\varepsilon}{2},\ (\forall)\ n \geqslant 1 \qquad (2)$$

Pentru a doua integrală se obţine :

$$\int_a^b \underbrace{g(x)}_{u}\ \underbrace{\sin nx\, dx}_{dv} = -\frac{1}{n} g(x) \cos nx \Big|_a^b + \frac{1}{n}\int_a^b g'(x) \cos nx\, dx.$$

Evident însă avem :

$$|g(x) \cos nx\Big|_a^b| \leqslant 2\|g\|_\infty,\ \left|\int_a^b g'(x) \cos nx\, dx\right| \leqslant (b - a)\,\|g'\|_\infty,$$

deci

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} g(x) \cos nx\Big|_a^b = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\int_a^b g'(x) \cos nx\, dx = 0$$

şi deci $\lim_{n\to\infty} \int_a^b g(x) \sin nx\, dx = 0$. Atunci $(\exists)\ n_\varepsilon \geqslant 1$ a.î. $\left|\int_a^b g(x) \sin nx\, dx\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$, $(\forall)\ n > n_\varepsilon$ (3). Din (1), (2) şi (3) deducem că

$$\left|\int_a^b f(x) \sin nx\, dx\right| \leqslant \varepsilon,\ (\forall)\ n \geqslant n_\varepsilon \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x) \sin nx\, dx = 0$$

9.4.15. Propoziţie. *Fie* $I \subseteq \mathbf{R}$ *un interval,* $f : I \to \mathbf{R}$ *o funcţie local integrabilă şi* $\tilde{f} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *cu* $\tilde{f}(x) = f(x)$, $(\forall)\ x \in I$ *şi* $\tilde{f}(x) = 0$, $(\forall)\ x \notin I$. *Atunci* f *admite o primitivă* $\Leftrightarrow (\forall)\ x \in I$, $\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_x^{x+h} \tilde{f} = f(x)$.

Dem. $(\Rightarrow)$. Fie F o primitivă a lui f, deci $F' = f$. Atunci $(\forall) x \in I$ şi $[x - \eta,\ x + \eta] \subseteq I$, avem :

$$\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f = \frac{1}{h}(F(x + h) - F(x)),\ (\forall)\ 0 < |h| < \eta,$$

deci

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f = \lim_{\substack{h\to 0\\ 0<|h|<\eta}}\frac{1}{h}\left(F(x+h)-F(x)\right) = F'(x) = f(x)$$

Raţionament analog dacă $x_0 = \inf I$ şi $x_0 \in I$ (resp. $x_0 = \sup I$ şi $x_0 \in I$).

($\Leftarrow$) Fie $a \in I$ fixat şi $F(x) = \int_a^x f$, $x \in I$. Atunci avem :

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \frac{1}{h}\left(\int_a^{x+h} f - \int_a^x f\right) = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f, \ (\forall)\ x, x+h \in I,$$

de unde cf. ipotezei, rezultă

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f = f(x), \ (\forall)\ x \in I,$$

deci F este derivabilă în $x \in I$ şi $F'(x) = f(x)$, prin urmare f admite o primitivă.

9.4.16. Propoziţie (Poisson). *Să se calculeze integrala* $\int_0^{\pi} \ln(1-2r\cos x + r^2)\,dx$, *pentru* $|r| \neq 1$.

Dem. Deoarece avem $f(x) = 1 - 2r\cos x + r^2 \geqslant (1-|r|)^2 > 0$, pentru $|r| \neq 1$ şi $x \in [0, \pi]$, rezultă că funcţia f este corect definită şi este continuă, deci integrala dată există. Punem $\sigma_n = \sigma_f(\Delta_n, \xi_{\Delta_n})$, unde $\Delta_n = \left(\frac{k\pi}{n}\right)_{k=\overline{0,n}}$ şi $\xi_{\Delta_n} = \left(\frac{k\pi}{n}\right)_{k=\overline{1,n}}$.

Ţinînd seama de expresia celor $2n$ rădăcini ale ecuaţiei $z^{2n} - 1 = 0$ (v. P.2.6.3.), obţinem identitatea:

$$z^{2n} - 1 = \prod_{k=-n}^{n-1}\left(z - \cos\frac{k\pi}{n} - i\sin\frac{k\pi}{n}\right) = (z^2-1)\prod_{k=1}^{n-1}\left(1 - 2z\cos\frac{k\pi}{n} + z^2\right),$$

deci

$$\frac{\pi}{n}\ln\frac{r^{2n}-1}{r^2-1} = \frac{\pi}{n}\ln\left(\prod_{k=1}^{n}\left(1-2r\cos\frac{k\pi}{n}+r^2\right)\right) = \sigma_n, \ (n \geqslant 1)$$

(i) Dacă $|r| < 1$, avem $\lim_{n\to\infty} r^{2n} = 0$, deci (T. 9.1.4. Cor. 1):

$$\int_0^{\pi} f = \lim_{n\to\infty}\sigma_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\pi}{n}\ln\frac{r^{2n}-1}{r^2-1}\right) = 0$$

(ii) Dacă $|r| > 1$, avem $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{r^{2n}} = 0$, deci

$$\int_0^{\pi} f = \lim_{n\to\infty}\sigma_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\pi}{n}\ln\left(\frac{r^{2n}-1}{r^{2n}}\cdot\frac{1}{r^2-1}\right) + 2\pi\ln|r|\right) = 2\pi\ln|r|$$

În încheierea acestui capitol să prezentăm sumar o generalizare a formulei Leibniz-Newton, publicată de autor în 1978.

9.4.17. Definiţie ([3]). Fie $I \subseteq \mathbf{R}$ un interval şi $f : I \to \mathbf{R}$ o funcţie. Se numeşte *primitivă generalizată* o funcţie $F : I \to \mathbf{R}$ cu proprietăţile : 1° F este continuă pe I ; 2° $(\exists)\ A \subseteq I$ cel mult numerabilă a.î. F este derivabilă pe $I \setminus A$ şi avem $F'(x) = f(x)$, $(\forall)\ x \in I \setminus A$.

Exemplul 1. *Fie* $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *funcţia signum. Atunci funcţia* $F(x) = |x|$, $x \in \mathbf{R}$, *este o primitivă generalizată a lui* f.

Într-adevăr F este continuă pe $\mathbf{R}$, derivabilă pe $\mathbf{R}^*$ și $F'(x) = f(x)$, $(\forall) x \in \mathbf{R}$.

Exemplul 2. Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *funcția parte întreagă* $f(x) = E(x)$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$. *Atunci funcția* $F(x) = \frac{1}{2}(2x - 1 - E(x))$, $x \in \mathbf{R}$ *este o primitivă generalizată a lui* f.

Într-adevăr F este continuă pe $\mathbf{R}$, derivabilă pe $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$ și avem $F'(x) = f(x)$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$.

9.4.18. Propoziție. 1° *Orice funcție etajată* $f : I \to \mathbf{R}$ *admite primitive generalizate*;

2° *Orice două primitive generalizate ale unei funcții* $f : I \to \mathbf{R}$, *diferă între ele printr-o constantă*;

3° *Orice funcție* $f : I \to \mathbf{R}$ *local integrabilă care are o mulțime cel mult numerabilă de discontinuități, în particular f riglată, admite primitive generalizate* (cf.T.9.3.1.Cor 1).

Dem. 2° rezultă din P.9.4.19.

9.4.19. Propoziție. *Fie* $I \subseteq \mathbf{R}$ *un interval și* $f : I \to \mathbf{R}$ *o funcție continuă pe* I *și derivabilă la dreapta pe* $I \setminus A$, *unde* A *este cel mult numerabilă. Atunci* $(\forall)$ $a, b \in I$, $a < b$, *avem inegalitatea*:

$$\inf_{x \in (a,b) \setminus A} f'_d(x) \leqslant \frac{F(b) - F(a)}{b - a} \leqslant \sup_{x \in (a,b) \setminus A} f'_d(x)$$

Dem. Aplicăm T. 5.1.2. Cor. 3 din [24].

9.4.20. Teoremă ([26]). *Fie* $I \subseteq \mathbf{R}$ *un interval și* $f : I \to \mathbf{R}$ *o funcție local integrabilă și care admite primitive generalizate. Atunci* $(\forall)$ $F : I \to \mathbf{R}$ *o primitivă generalizată a lui* f, *are loc formula Leibniz-Newton*: $\int_a^b f = F(b) - F(a)$, $(\forall)\ a, b \in I$.

Dem. Fie $a, b \in I$, $a < b$, fixați și $\Delta : = \{x_0 = a < x_1 < \ldots < x_n = b\}$ o diviziune a lui $[a, b]$. Dacă $f : I \to \mathbf{R}$ este o primitivă generalizată a lui f, ea este continuă pe I și $(\exists)$ $A \subseteq I$ cel mult numerabilă a.î. $F'(x) = f(x)$, $(\forall)\ x \in I \setminus A$. Punem $J_i : = [x_{i-1}, x_i]$, $(i = \overline{1, n})$; din P. 9.4.19. rezultă

$$\inf_{x \in J_i \setminus A} F'(x) \leqslant \frac{F(x_i) - F(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} \leqslant \sup_{x \in J_i \setminus A} F'(x) \tag{1}$$

Evident avem:

$$\left.\begin{aligned} M_i = \sup_{x \in J_i} f(x) \geqslant \sup_{x \in J_i \setminus A} f(x) = \sup_{x \in J_i \setminus A} F'(x) \\ m_i : = \inf_{x \in J_i} f(x) \leqslant \inf_{x \in J_i \setminus A} f(x) = \inf_{x \in J_i \setminus A} F'(x) \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Din (1) și (2) deducem:

$$m_i(x_i - x_{i-1}) \leqslant F(x_i) - F(x_{i-1}) \leqslant M_i(x_i - x_{i-1}),\ (i = \overline{1, n})$$

Sumînd după i, $i = \overline{1, n}$, obținem după reducerea termenilor asemenea, relația:

$$s_f(\Delta) \leqslant F(b) - F(a) \leqslant S_f(\Delta)$$

Luînd marginea superioară, resp. inferioară, după $\Delta \in \mathfrak{T}_{[a,b]}$, din (3) rezultă

$$\underline{I}(f) = \sup_{\Delta} s_f(\Delta) \leqslant F(b) - F(a) \leqslant \inf_{\Delta} S_f(\Delta) = \bar{I}(f) \tag{4}$$

Cum f este integrabilă, avem (T.9.1.8.) că $\underline{I}(f) = \overline{I}(f) = \int_a^b f$, de unde cf. (4) con-

chidem că $\int_a^b f = F(b) - F(a)$ și teorema este arătată.

Corolar 1. *Fie $I \subseteq \mathbf{R}$ un interval și $f : I \to \mathbf{R}$ o funcție riglată. Atunci f admite primitive generalizate și $(\forall)$ $F : I \to \mathbf{R}$ o primitivă generalizată a lui f are loc formula Leibniz-Newton* : $\int_a^b f = F(b) - F(a)$, $(\forall)$ $a, b \in I$.

Observația 1. Din demonstrația dată T.9.4.20. rezultă că formula Leibniz-Newton rămîne adevărată dacă luăm drept definiție a primitivei lui f o funcție $F : I \to \mathbf{R}$ cu proprietatea :

$$\inf f([a, b]) \leqslant \frac{F(a) - F(b)}{a - b} \leqslant \sup f([a, b]),\ (\forall)\ a, b \in I,\ a < b \qquad (1)$$

În această ultimă definiție să presupunem f continuă. Atunci (T. 5.5.15. (3°)) oscilația lui f în fiecare punct x din I este nulă, deci $\sup f([a, b]) - \inf f([a, b])$ poate fi făcut oricît de mic, dacă $b - a$ este suficient de mic și din (1) deducem că

$$\lim_{a \to x, b \to x} \frac{F(a) - F(b)}{a - b} = f(x),$$

prin urmare F este o primitivă (în sens clasic) a lui f.

Observația 2. *Există funcții integrabile și care nu admit primitive de nici un fel.*

Într-adevăr, fie A mulțimea triadică a lui Cantor și $f : [0, 1] \to \mathbf{R}$ funcția caracteristică a lui A. Am văzut (9.4.1. Exemplul 9) că f nu este integrabilă. Presupunem că f admite o primitivă generalizată F. Atunci (T. 9.4.20.) avem $\int_0^x f = F(x) - F(0)$, $(\forall)$ $x \in [0, 1]$. Funcția f fiind nulă a.p.t. și integrabilă, avem (P. 9.2.13.) $\int_0^x f = 0$, $(\forall)$ $x \in [0, 1]$, deci F este constantă. Pe de altă parte, F fiind primitivă generalizată a lui f, există $A_0 \subseteq [0, 1]$ cel mult numerabilă a.î. $F'(x) = f(x)$, $(\forall)$ $x \in [0,1] \setminus A_0$, deci $f(x) = 0$, $(\forall)$ $x \in [0, 1] \setminus A_0$.

Cum $f|_A = 1$ și $f|_{[0,1] \setminus A} = 0$, rezultă $[0, 1] \setminus A_0 \subseteq [0, 1] \setminus A$, deci $A \subseteq A_0$, absurd, deoarece A este nenumerabilă în timp ce A_0 este numerabilă.

Prin urmare f nu admite primitive generalizate.

CAPITOLUL 10

APLICAȚII ALE CALCULULUI INTEGRAL

Problema definirii riguroase a ariilor mulțimilor plane, a ariilor suprafețelor în spațiu, ca și a volumelor unor corpuri în spațiu, este o problemă complexă și ține de așa-numita „teorie a măsurii", care depășește cadrul volumului de față.

Pentru a putea da unele aplicații imediate ale calculului integral, vom face aici cîteva sumare considerații privind teoria măsurii mulțimilor în $\mathbf{R}^2$ și $\mathbf{R}^3$, strict necesare pentru calculul ariilor unor mulțimi plane particulare ca și a ariilor suprafețelor și volumelor unor corpuri particulare cum sînt cele de rotație.

10.1. Calculul ariilor

10.1.1. Definiție. Se numește interval 2 — *dimensional* o mulțime din $\mathbf{R}^2$ de forma $I_1 \times I_2$, unde I_1 și I_2 sînt intervale în $\mathbf{R}$ (intervale 1 — *dimensionale*). Intervalul 2 — dimensional $I_1 \times I_2$ se numește *mărginit*, *deschis*, *închis* etc. dacă I_1 și I_2 sînt mărginite, deschise, închise etc. Se numește *mulțime elementară* în $\mathbf{R}^2$, o mulțime $A \subseteq \mathbf{R}^2$ care poate fi scrisă ca o reuniune finită de intervale 2—dimensionale mărginite; notăm cu $\mathcal{E}$ familia mulțimilor elementare din $\mathbf{R}^2$. Fie $A \in \mathcal{E}$, $A = \bigcup_{k=1}^{n} (I_k \times J_k)$, fixată unde mulțimile $I_k \times J_k (k = \overline{1, n})$ sînt disjuncte două cîte două; se numește *arie* (*măsură*) a lui A numărul $\sum_{k=1}^{n} |I_k| \cdot |J_k|$, notat cu $|A|$. Fie acum $A \subseteq \mathbf{R}^2$ o mulțime fixată arbitrară; punem $\mu_-(A) := \sup \{|E|;\ E \in \mathcal{E},\ E \subseteq A\}$ și $\mu_+(A) := \inf \{|E|;\ E \in \mathcal{E},\ E \supseteq A\}$; vom spune că A *are arie* (este *măsurabilă Jordan*), dacă $\mu_-(A) = \mu_+(A)$, iar numărul $\mu_-(A) = \mu_+(A)$ se numește *aria* (*măsura Jordan*) a lui A.

a) Dacă $A \subseteq \mathbf{R}^2$, atunci aria (A) este unic determinată de A.

b) Dacă $A \subseteq \mathbf{R}^2$ este o mulțime elementară, atunci aria (A) coincide cu $|A|$, deci aria unei mulțimi este extensiunea naturală a ariei unui dreptunghi.

c) Aria este o funcție *aditivă de mulțime*, i.e. $(\forall)$ $A, B \subseteq \mathbf{R}^2$ două mulțimi disjuncte care au arie, rezultă că $A \cup B$ are arie și avem și aria $(A \cup B) =$ $=$ aria(A) + aria(B).

10.1.2. Propoziție. *Fie $A \subseteq \mathbf{R}^2$ o mulțime mărginită. Atunci A are arie* $\Leftrightarrow (\exists)$ $(A_n)_{n \geq 1}$ *și* $(B_n)_{n \geq 1}$ *două șiruri de mulțimi elementare* în $\mathbf{R}^2$, *primul*

monoton crescător, al doilea monoton descrescător a.î. $A_n \subseteq A \subseteq B_n$, $(\forall)\ n \geqslant 1$ *și* $\lim\limits_{n\to\infty} |A_n| = \lim\limits_{n\to\infty} |B_n|$. *In acest caz avem*: aria $(A) = \lim\limits_{n\to\infty} |A_n| = \lim\limits_{n\to\infty} |B_n|$.

Dem. ($\Rightarrow$) Presupunem că A are arie și fie $\alpha := \text{aria } A$. Atunci din P.2.2.6. Cor. 1. rezultă : $(\forall)\ n \geqslant 1$, $(\exists)\ E_n, F_n \in \mathcal{E}$ a.î. $E_n \subseteq A \subseteq F_n$ și $|E_n| \geqslant \alpha - \frac{1}{n}$, $|F_n| \leqslant \alpha + \frac{1}{n}$. Punem mai departe $A_n := \bigcup\limits_{k=1}^{n} E_k$ și $B_n := \bigcap\limits_{k=1}^{n} F_k (n \geqslant 1)$. Atunci avem :

$$A_n \subseteq A \subseteq B_n,\ |A_n| \geqslant |E_n| \geqslant \alpha - \frac{1}{n},\ |B_n| \leqslant |F_n| \leqslant \alpha + \frac{1}{n},\ (\forall)\ n \geqslant 1$$

Cum avem evident $|A_n| \leqslant \text{aria}\,(A) \leqslant |B_n|$, $(\forall)\ n \geqslant 1$, rezultă

$$\alpha - \frac{1}{n} \leqslant |A_n| \leqslant |B_n| \leqslant \alpha + \frac{1}{n},\ (\forall)\ n \geqslant 1$$

Prin urmare (P 2.3.18.) $\lim\limits_{n\to\infty} |A_n| = \lim\limits_{n\to\infty} |B_n| = \alpha$ etc.

În mod analog se definesc mulțimile măsurabile Jordan în $\mathbf{R}^3$, i.e. mulțimile care *au volum* etc.

10.1.3. Teoremă. *Fie* $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ *o funcție continuă nenegativă și* $A := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 ; a \leqslant x \leqslant b, 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$. *Atunci* A *are arie și avem* :

$$\boxed{\text{aria}(A) = \int_a^b f}$$

Dem. Fie $(\Delta_n)_{n\geqslant 1}$ un șir monoton crescător de diviziuni ale lui $[a, b]$ cu $\nu(\Delta_n) \to 0$, fixat.

Suma Darboux inferioară $s_f(\Delta_n)$ (resp. suma Darboux superioară $S_f(\Delta_n)$) este evident egală cu aria unei mulțimi elementare A_n (resp. B_n) (fig. 47).

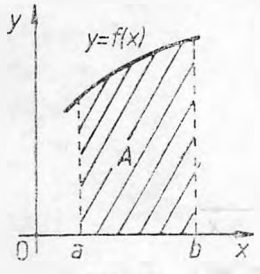
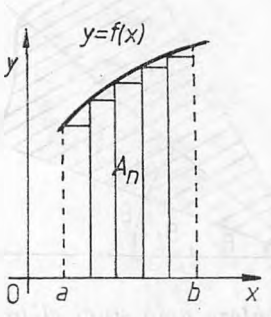


Fig. 46



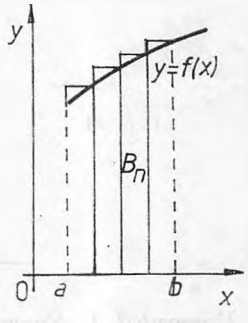


Fig. 47

Este clar că $A_n \subseteq A \subseteq B_n$, $(\forall)\ n \geqslant 1$ și deoarece șirul $(\Delta_n)_{n\geqslant 1}$ este monoton crescător, rezultă imediat că șirul $(A_n)_{n\geqslant 1}$ (resp. $(B_n)_{n\geqslant 1}$) este monoton crescător (resp. monoton descrescător).

Din T.9.1.8. Cor. 2 rezultă $S_f(\Delta_n) - s_f(\Delta_n) \to 0 (n \to \infty)$, iar din P.9.1.6. rezultă că șirul $(s_f(\Delta_n))_{n\geqslant 1}$ este monoton crescător și majorat de șirul $(S_f(\Delta_n))_{n\geqslant 1}$, care este monoton descrescător. Atunci (T. 2.3.21.(2°)) șirurile $(s_f(\Delta_n))_{n\geqslant 1}$ și $(S_f(\Delta_n))_{n\geqslant 1}$ sînt convergente și au aceeași limită.

Așadar sîntem în cadrul P.10.1.2., de unde deducem că A are arie și avem :

$$\text{aria } A = \lim_{n\to\infty} |A_n| = \lim_{n\to\infty} |B_n|,$$

deci

$$\text{aria } A = \lim_{n\to\infty} s_f(\Delta_n) = \lim_{n\to\infty} S_f(\Delta_n) \tag{1}$$

În fine, deoarece avem (T.9.1.8.) :

$$s_f(\Delta_n) \leqslant \underline{\int}_a^b f = \int_a^b f = \overline{\int}_a^b f \leqslant S_f(\Delta_n),\ (\forall)\ n \geqslant 1,$$

prin trecere la limită, $n \to \infty$, obținem :

$$\lim_{n\to\infty} s_f(\Delta_n) = \lim_{n\to\infty} S_f(\Delta_n) = \int_a^b f \tag{2}$$

Din (1) și (2) conchidem că aria $(A) = \int_a^b f$. (v. fig. 46).

Corolar 1. *Fie* f, g : $[a, b] \to \mathbf{R}$ *două funcții continue a.î.* $f \geqslant g \geqslant 0$ *și fie* $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2;\ x \in [a, b],\ f(x) \leqslant y \leqslant g(x)\}$. *Atunci* A *are arie și avem* aria(A) $= \int_a^b (f - g)$.

10.1.4. Teoremă. *Fie* $f : [\theta_1, \theta_2] \to \mathbf{R}$ *o funcție continuă nenegativă și* $A := \{(\theta, \rho) \in \mathbf{R}^2;\ \theta_1 \leqslant \theta \leqslant \theta_2,\ 0 \leqslant \rho \leqslant f(\theta)\}$ (fig. 48). *Atunci A are arie și avem* :

$$\text{aria } \boxed{(A) = \frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} f^2(\theta)\,\mathrm{d}\theta}$$

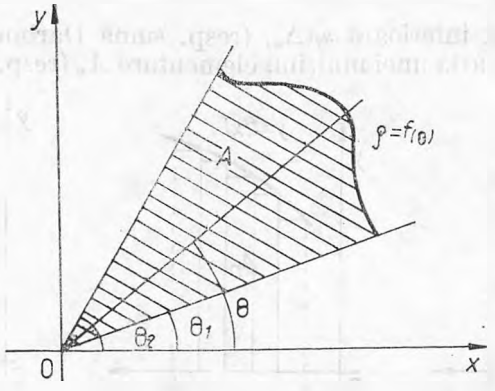


Fig. 48

Exemplul 1. Să se calculeze aria unei elipse (fig. 49).

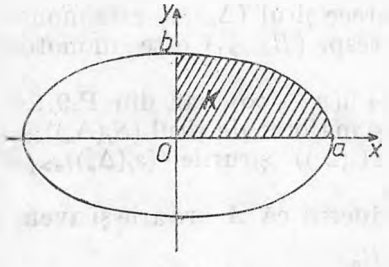


Fig. 49

Ecuația elipsei (E) în coordonate cartezien se scrie $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, de unde pentru $x \geqslant 0$ $y \geqslant 0$ obținem : $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$, $x \in [0, a]$.

$$\text{aria}(E) = 4\ \text{aria}(K) = 4\,\frac{b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x$$

Facem substituția $x = a \sin t$, $0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$. Atunci avem :

$$\text{aria}(E) = \frac{4b}{a}\int_0^{\pi/2} a^2 \cos^2 t \, dt = 4ab\int_0^{\pi/2} \frac{1 + \cos^2 t}{2} \, dt = \pi ab$$

Exemplul 2. Să se calculeze aria cardioidei.

Ecuația cardioidei în coordonate polare se scrie $\rho(\theta) = a(1 - \cos\theta)$, $-\pi \leqslant \theta \leqslant \pi$. (fig. 50).

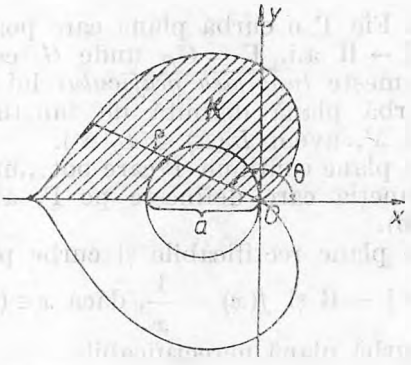


Fig. 50

Atunci avem :

$$\text{aria}(C) = 2\,\text{aria}(K) = 2\left(\frac{1}{2}\int_0^{\pi} \rho^2(\theta)\, d\theta\right) =$$

$$= \int_0^{\pi} a^2(1 - \cos\theta)^2 d\theta = a^2\int_0^{\pi} (1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta)\, d\theta =$$

$$= a^2\pi - 0 + a^2\int_0^{\pi} \frac{1 + \cos 2\theta}{2}\, d\theta = \frac{3\pi a^2}{2}.$$

10.2. Calculul lungimilor

10.2.1. Definiție. Fie Γ o curbă plană (D.7.3.17.) definită de funcția $f = (f_1, f_2)$, unde $f_1, f_2 : [a, b] \to \mathbf{R}$. Dacă $\Delta = \{a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b\} \in \in \mathfrak{T} = \mathfrak{T}_{[a,b]}$, notăm cu $L_f(\Delta)$ lungimea liniei poligonale care trece prin punctele $P_i(f_1(t_i), f_2(t_i))$ $(i = \overline{1, n})$ (fig. 51) i.e.

$$L_f(\Delta) = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(f_1(t_{i-1}) - f_2(t_{i-1}))^2 + (f_1(t_i) - f_2(t_i))^2}$$

Vom spune că Γ este *rectificabilă* (are lungime), dacă $l(\Gamma) := \sup_{\Delta \in \mathfrak{T}} L_f(\Delta) < + \infty$; numărul $l(\Gamma)$ se numește *lungimea lui* Γ. Curba Γ se numește *continuă* (resp. de *clasă* $\mathcal{C}^n (n \geqslant 1)$), dacă funcțiile f_1 și f_2 (componentele lui f) sînt continue (resp. de clasă $\mathcal{C}^n$)

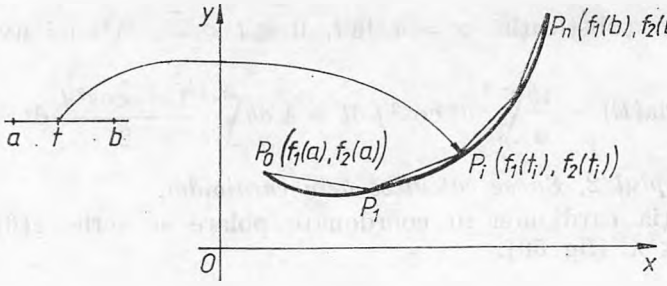


Fig. 51

10.2.2. Definiție. Fie Γ o curbă plană care poate fi reprezentată cartezian; i.e. $(\exists)\ f : [a, b] \to \mathbf{R}$ a.î. $\Gamma = G_f$, unde G_f este graficul lui f. Atunci lungimea lui Γ se numește *lungimea graficului* lui f și se notează cu $l(G_f)$.

(a) Fie Γ o curbă plană definită de funcția $f : [a, b] \to \mathbf{R}^2$. Atunci $(\forall)\ \Delta, \Delta' \in \mathfrak{T}_{[a,b]}$, $\Delta \subseteq \Delta'$, avem $L_f(\Delta) \leq L_f(\Delta')$.

(b) Există curbe plane continue Γ care pot „umple" un pătrat, i.e. dacă $f : [a, b] \to \mathbf{R}^2$ este funcția care definește pe Γ, atunci $f([a, b]) = [0, 1] \times [0, 1]$ (curbe Peano).

(c) Există curbe plane rectificabile și curbe plane nerectificabile. Spre exemplu, dacă $f : [0, 1] \to \mathbf{R}$ și $f(x) = \dfrac{1}{x}$, dacă $x \in (0, 1]$, iar $f(0) = 0$, atunci graficul lui f este o curbă plană nerectificabilă.

10.2.3. Propoziție. *Fie Γ o curbă plană rectificabilă definită de funcția $f : [a, b] \to \mathbf{R}^2$. Atunci $(\exists)\ (\Delta_n)_{n\geq 1} \subseteq \mathfrak{T}_{[a,b]}$ cu $\nu(\Delta_n) \to 0$ a.î. $L_f(\Delta_n) \to l(\Gamma)$.*

Dem. Din definiția marginii superioare rezultă că $(\exists)\ (\Delta'_n)_{n\geq 1} \subseteq \mathfrak{T} := \mathfrak{T}_{[a,b]}$ a.î. $L_f(\Delta'_n) \to l(\Gamma)$. Pentru Δ'_1, $(\exists)\ \Delta_1 \in \mathfrak{T}$ cu $\Delta_1 \supseteq \Delta'_1$ și $\nu(\Delta_1) \leq \dfrac{1}{1}$; apoi $(\exists)\ \Delta_2 \in \mathfrak{T}$ cu $\Delta_2 \supset \Delta_1 \cup \Delta'_2$ și $\nu(\Delta_2) \leq \dfrac{1}{2}$. Prin inducție construim un șir $(\Delta_n)_{n\geq 1} \subseteq \mathfrak{T}$ cu $\Delta_n \supseteq \Delta_1 \cup \ldots \cup \Delta_{n-1} \cup \Delta'_n$ și $\nu(\Delta_n) \leq \dfrac{1}{n}$, $(\forall)\ n \geq 1$. Este clar că $\nu(\Delta_n) \to 0$ și avem:

$$L_f(\Delta'_n) \leq L_f(\Delta_n) \leq l(\Gamma),\ (\forall)\ n \geq 1,$$

de unde prin trecere la limită, $n \to \infty$, obținem $L_f(\Delta_n) \to l(\Gamma)$.

10.2.4. Teoremă. *Fie Γ o curbă plană definită de funcția $f = (f_1, f_2)$, unde $f_1, f_2 : [a, b] \to \mathbf{R}$ sînt derivabile cu derivata integrabilă. Atunci Γ este rectificabilă și avem:*

$$l(\Gamma) = \int_a^b \sqrt{f_1'^2(t) + f_2'^2(t)}\, dt.$$

Dem. Fie $\Delta := \{a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b\} \in \mathfrak{T} := \mathfrak{T}_{[a,b]}$ fixată. Evident aplicînd T.6.3.4. avem:

$$L_f(\Delta) = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(f_1(t_i) - f_1(t_{i-1}))^2 + (f_2(t_i) - f_2(t_{i-1}))^2} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (t_i - t_{i-1}) \sqrt{f_1'^2(\zeta_i) + f_2'^2(\eta_i)},\ (\zeta_i, \eta_i \in (t_{i-1}, t_i))$$

Funcțiile f_1' și f_2' fiind integrabile, sînt mărginite (P.9.1.10.), deci $\|f_1'\|_\infty < +\infty$ și $\|f_2'\|_\infty < +\infty$ și deci

$$L_f(\Delta) \leqslant \sum_{i=1}^{n} (t_i - t_{i-1}) \cdot (\|f_1'\|_\infty + \|f_2'\|_\infty) = (b-a)(\|f_1'\|_\infty + \|f_2'\|_\infty)$$

Așadar $\sup_{\Delta \in \mathfrak{T}} L_f(\Delta) < +\infty$, deci Γ este rectificabilă.

Punem mai departe $F := \sqrt{f_1'^2 + f_2'^2}$ și $\xi_\Delta := (\xi_i)_{i=\overline{1,n}}$ unde $\xi_i (i = \overline{1, n})$ au fost obținute mai sus. Funcțiile f_1' și f_2' fiind integrabile, rezultă (T.9.2.6 și T.9.2.7) că F este integrabilă. Ținînd seama de expresia lui $L_f(\Delta)$, avem :

$$|L_f(\Delta) - \sigma_F(\Delta, \xi_\Delta)| =$$

$$= \left| \sum_{i=1}^{n} (t_i - t_{i-1}) \left(\sqrt{f_1'^2(\xi_i) + f_2'^2(\eta_i)} - \sqrt{f_1'^2(\xi_i) + f_2'^2(\xi_i)} \right) \right| \overset{*)}{\leqslant}$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{n} (t_i - t_{i-1}) |f_2'(\eta_i) - f_2'(\xi_i)| \leqslant S_{f_2'}(\Delta) - s_{f_2'}(\Delta).$$

Așadar

$$|L_f(\Delta) - \sigma_F(\Delta, \xi_\Delta)| \leqslant S_{f_2'}(\Delta) - s_{f_2'}(\Delta), \ (\forall)\ \Delta \in \mathfrak{T} \tag{1}$$

Din P.10.2.3. rezultă că $(\exists)\ (\Delta_j)_{j \geqslant 1} \subset \mathfrak{T}$ cu $\nu(\Delta_j) \to 0$ și $L_f(\Delta_j) \to l(\Gamma)$. Punem în (1) $\Delta = \Delta_j (j \geqslant 1)$ și trecem la limită, $j \to \infty$. Funcțiile f_2' și F fiind integrabile, rezultă (T.9.1.8. Cor.2 și T.9.1.4. Cor. 1) :

$$S_{f_2'}(\Delta_j) - s_{f_2'}(\Delta_j) \to 0 \ (j \to \infty),\ \sigma_F(\Delta_j, \xi_{\Delta_j}) \to \int_a^b F \ (j \to \infty)$$

Atunci $L_f(\Delta_j) \to \int_a^b F (j \to \infty)$ și deoarece limita este unică conchidem că $l(\Gamma) = \int_a^b F$.

Corolar 1. *Fie* $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ *o funcție derivabilă cu derivata integrabilă. Atunci* G_f, *graficul lui* f, *este o curbă rectificabilă și avem :*

$$l(G_f) = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)}\, dx$$

Dem. Aplicăm T.10.2.4. pentru funcția $[a, b] \ni x \mapsto (x, f(x)) \in \mathbf{R}^2$.

10.2.5. Teoremă. *Fie* Γ *o curbă plană reprezentată în coordonate polare :* $\rho = f(\theta),\ \theta \in [\theta_1, \theta_2]$. *Atunci* Γ *este rectificabilă și avem :*

$$l(\Gamma) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{f^2(\theta) + f'^2(\theta)}\, d\theta$$

Dem. Deoarece $\rho = f(\theta),\ \theta \in [\theta_1, \theta_2]$, este reprezentarea lui Γ în coordonate polare, avem pentru Γ următoarea reprezentare parametrică :

$$x = f(\theta) \cos \theta,\ y = f(\theta) \sin \theta,\ \theta \in [\theta_1, \theta_2],\ \text{(fig. 52).}$$

Atunci

$$x'(\theta) = f'(\theta) \cos \theta - f(\theta) \sin \theta,\ y'(\theta) = f'(\theta) \sin \theta + f(\theta) \cos \theta,$$

*) $\sqrt{(a-a_1)^2 + (b-b_1)^2} \leqslant |a - a_1| + |b - b_1|,\ (\forall)\ a, b, a_1, b_1 \in \mathbf{R}$

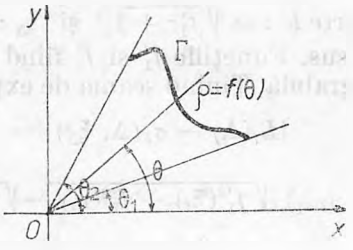
deci

$$x'^2(\theta) + y'^2(\theta) = f'^2(\theta) + f^2(\theta),\ (\forall)\ \theta \in [\theta_1, \theta_2]$$

Aplicînd T.10.2.2. deducem :

$$l(\Gamma) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{x'^2(\theta) + y'^2(\theta)}\,d\theta = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{f'^2(\theta) + f^2(\theta)}\,d\theta$$

Fig. 52



Exemplul 1. Să se calculeze lungiea unui cerc.

1° Reprezentăm semicercul superior în coordonate carteziene $f(x) = +\sqrt{r^2 - x^2}$, $x \in [-r, r]$. Atunci avem :

$$l = 4\int_0^r \sqrt{1 + f'^2(x)}\,dx = 4\int_0^r \sqrt{1 + \left(\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}\right)^2}\,dx =$$

$$= 4r\int_0^r \frac{dx}{\sqrt{r^2 - x^2}} = 4r \arcsin\frac{x}{r}\Big|_0^r = 2\pi r.$$

2° Reprezentăm cercul în coordonate polare :

$$\rho(\theta) = r,\ (\forall)\ \theta \in [0, 2\pi].$$

Atunci avem :

$$l = 4\int_0^{\pi/2} \sqrt{\rho^2(\theta) + \rho'^2(\theta)}\,d\theta = 4\int_0^{\pi/2} r\,d\theta = 2\pi r.$$

3° Reprezentăm cercul parametric :

$$x = r\cos t;\ y = r\sin t,\ t \in [0, 2\pi]$$

Atunci avem :

$$l = 4\int_0^{\pi/2} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\,dt = 4\int_0^{\pi/2} \sqrt{r^2\sin^2 t + r^2\cos^2 t}\,dt = 4\int_0^{\pi/2} r\,dt = 2\pi r.$$

Exemplul 2. Să se determine lungimea elipsei

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,\ \textit{unde}\ a > b > 0$$

Reprezentarea parametrică a elipsei (E), în primul cadran, se scrie

$$x = a\cos t,\ y = a\sin t,\quad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],$$

deci

$$x'^2(t) + y'^2(t) = a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t = a^2(1 - \varepsilon^2\sin^2 t),\ (\forall)\ t \in \left[0\,\frac{\pi}{2}\right],$$

unde „excentricitatea elipsei" $e := \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}} \in (0, 1)$. Atunci

$$\frac{1}{4} l(E) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\, dt = a \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - e^2 \sin^2 t}\, dt$$

Deoarece $0 \leqslant e^2 \sin^2 t \leqslant e^2 < 1$, $(\forall)\, t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, putem aplica formula binomială (T.12.5.9. Cor.1) şi obţinem :

$$\sqrt{1 - e^2 \sin^2 t} = 1 - \frac{1}{2} e^2 \sin^2 t - \ldots - \frac{(2n-3)!!}{(2n)!!} e^{2n} \sin^{2n} t - \ldots \qquad (1)$$

Seria (1) fiind evident normal convergentă, o putem integra termen cu termen (T.12.1.6.) şi obţinem :

$$\frac{1}{4} l(E) = a \int_0^{\pi/2} dt - \frac{1}{2} e^2 \int_0^{\pi/2} \sin^2 t\, dt - \ldots - \frac{(2n-3)!!}{(2n)!!} e^{2n} \int_0^{\pi/2} \sin^{2n} t\, dt \ldots$$

Cum avem (3.4.1. Exemplul 11) $\int_0^{\pi/2} \sin^{2n} t\, dt = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{\pi}{2}$, rezultă

$$\frac{1}{4} l(E) = \frac{a\pi}{2} \left(1 - \frac{1}{4} e^2 - \ldots \frac{((2n-1)!!)^2}{((2n)!!)^2} \cdot \frac{1}{2n-1} e^{2n} - \ldots\right)$$

Din ultima relaţie putem deduce cu orice aproximaţie valoarea lui $l(E)$.

10.3. Calculul volumelor corpurilor de rotaţie

Vom presupune aici că fiecare cilindru are volum şi el este egal cu $\pi r^2 \times h$, unde $2r$ este diametrul cilindrului şi h înălţimea sa.*)

10.3.1. Teoremă. *Fie $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ o funcţie continuă. Atunci corpul K obţinut prin rotirea graficului lui f în jurul axei Ox, are volum şi avem*

$$\boxed{\text{vol}(K) = \pi \int_a^b f^2}.$$

Dem. Fixăm $(\Delta_n)_{n \geqslant 1}$ un şir monoton crescător de diviziuni ale lui $[a, b]$, cu $\nu(\Delta_n) \to 0$. Atunci suma Darboux inferioară $s_{\pi f^2}(\Delta_n)$ (resp. suma Darboux superioară $S_{\pi f^2}(\Delta_n)$) reprezintă volumul unui corp A_n (resp. B_n) care are volum (fig. 53). Corpul A_n (resp. B_n) are volum, deoarece este o reuniune finită de cilindri, care am presupus că au volum ; aplicăm apoi P.10.1.2. (varianta în $\mathbf{R}^3$).

Este clar că $A_n \subseteq K \subseteq B_n$ $(\forall)$ $n \geqslant 1$ şi deoarece şirul $(\Delta_n)_{n \geqslant 1}$ este monoton crescător, rezultă imediat că şirul $(A_n)_{n \geqslant 1}$ (resp. $(B_n)_{n \geqslant 1}$) este monoton crescător (resp. monoton descrescător). Din T.9.1.8. Cor.2 rezultă $S_{\pi f^2}(\Delta_n) - s_{\pi f^2}(\Delta_n) \to 0$ $(n \to \infty)$, iar din P.9.1.6. rezultă că şirul $(s_{\pi f^2}(\Delta_n))$ este monoton crescător şi majorat de şirul $(S_{\pi f^2}(\Delta_n))_{n \geqslant 1}$. Atunci (T.2.3.21.(2°)) şirurile $(s_{\pi f^2}(\Delta_n))_{n \geqslant 1}$ şi $S_{\pi f^2}(\Delta_n))_{n \geqslant 1}$ sînt convergente şi au aceeaşi limită ; să o notăm cu α.

*) Presupunerea făcută este rezonabilă şi poate fi demonstrată în mod riguros.

Aşadar sîntem în cadrul P.10.1.2. (varianta în $\mathbf{R}^3$), de unde deducem că corpul K are volum şi avem :

$$\text{vol}(K) = \lim_{n\to\infty} \text{vol}(A_n) = \lim_{n\to\infty} \text{vol}(B_n),$$

deci $\text{vol}(K) = \lim_{n\to\infty} s_{\pi f^2}(\Delta_n) = \alpha$. Se continuă ca în T.10.1.3. şi se obţine :

$$\text{vol}(K) = \int_a^b (\pi f^2).$$

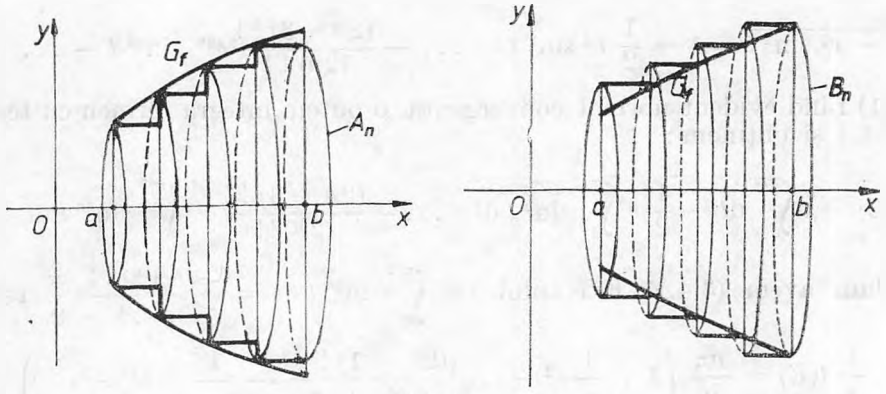


Fig. 53

10.3.2. Teoremă (P a p p u s-G u l d i n). *Fie* $f, g : [a, b] \to \mathbf{R}$ *două funcţii continue a.î.* $0 \leqslant f \leqslant g$ *şi fie* $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 ; x \in [a, b], f(x) \leqslant y \leqslant g(x)\}$. *Atunci volumul corpului obţinut prin rotaţia lui* A *în jurul unei axe de coordonate, este egal cu aria lui* A, *înmulţită cu lungimea circumferinţei obţinută prin rotaţia centrului de greutate a lui* A.

Exemplul 1. *Să se calculeze volumul corpului obţinut prin rotaţia unei elipse în jurul uneia din axele sale (elipsoid)* (fig. 54).

Ecuaţia elipsei fiind $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, avem

$$\text{vol}(K) = \pi \int_{-a}^{a} [f(x)]^2 \, dx, \text{ unde } f(x) = +\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}, \; x \in [-a, a],$$

deci

$$\text{vol}(K) = 2\pi \int_0^a [f(x)]^2 \, dx = 2\pi \frac{b^2}{a^2} \int_0^a (a^2 - x^2) \, dx = \frac{4\pi a b^2}{3}.$$

$$\boxed{\text{vol}(K) = \frac{4\pi a b^2}{3}}$$

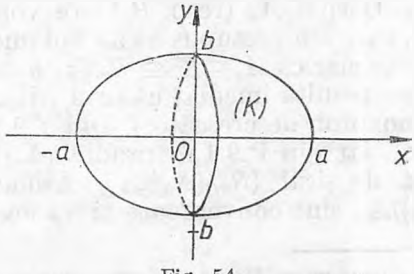


Fig. 54

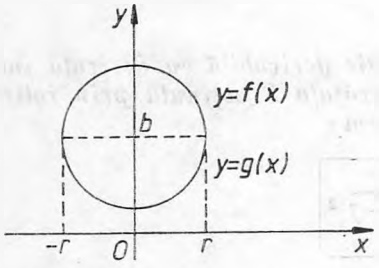
Corolar 1. *Volumul unei sfere (bile) de rază r este egal cu* $\frac{4\pi r^3}{3}$.

Exemplul 2. Să se calculeze volumul unui tor.

Torul este obținut prin rotația unui cerc din planul xOy și care nu intersectează axele de coordonate în jurul uneia din axele Ox sau Oy.

Fie γ cercul $(x-a)^2+(y-b)^2 \leqslant r^2$ (fig. 55), pe care să-l rotim în jurul axei Ox. Evident volumul corpului K obținut rămîne același dacă punem $a=0$ și avem :

$$\mathrm{vol}(K) = \pi \int_{-r}^{r} \{[f(x)]^2 - [g(x)]^2\}\, dx, \text{ unde}$$



$$\begin{cases} f(x) = b + \sqrt{r^2 - x^2}, & x \in [-r, r] \\ g(x) = b - \sqrt{r^2 - x^2}, & x \in [-r, r] \end{cases}$$

Fig. 55

Așadar $\mathrm{vol}(K) = 2\pi \int_0^r [(b+\sqrt{(r^2-x^2)})^2 - (b-\sqrt{(r^2-x^2)})^2]\, dx =$

$= 8\pi b \cdot \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\ dx$, deci cu substituția $x = r \sin\theta$ obținem :

$$\mathrm{vol}(K) = 8\pi b \int_0^{\pi/2} r^2 \cos^2\theta\, d\theta = 2\pi^2 r^2 b.$$

Observație. $\mathrm{vol}(K) = (\pi r^2) \times (2\pi b)$, deci este egal cu *aria lui* γ *înmulțită cu lungimea circumferinței descrisă de centrul de greutate a lui* γ (caz particular al th. Pappus-Guldin).

10.4. Calculul ariilor suprafețelor de rotație

Vom presupune aici că suprafața laterală a fiecărui trunchi de con are arie și ea este egală cu $\pi h(R+r)$, unde r, R sînt razele celor două cercuri ale trunchiului de con și h este lungimea generatoarei sale. De aici rezultă că suprafața obținută prin rotația graficului unei funcții poligonale $f : [a, b] \to \mathbf{R}$, are arie (presupunem că aria unei suprafețe este o funcție aditivă de mulțime).

10.4.1. Definiție. Fie $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ o funcție $G = G_f$ graficul lui f, $\Delta := \{a = x_0 < x_1 \ldots < x_n = b\} \in \mathfrak{T} = \mathfrak{T}_{[a,b]}$ o diviziune a lui $[a, b]$ fixată și f_Δ funcția poligonală definită pe $[a, b]$, care trece prin punctele $(x_i, f(x_i))$ $(i = \overline{1, n})$. (fig. 56). Notăm cu S (resp. S_Δ) suprafața obținută prin rotirea graficului lui f (resp. f_Δ) în jurul axei Ox. Dacă $\alpha := \sup_{\Delta \in \mathfrak{T}} (\text{aria } (S_\Delta)) < +\infty$, vom spune că S *are arie* și ea este egală cu α, în scris aria $(S) = \alpha$.

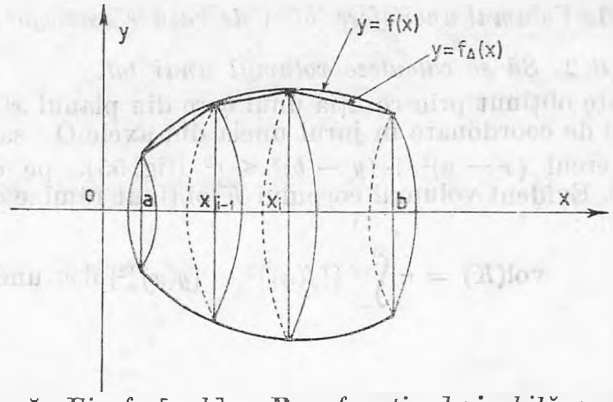


Fig. 56

10.4.2. Teoremă. *Fie $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ o funcție derivabilă cu derivata integrabilă, în particular f de clasă $\mathcal{C}^1$. Atunci suprafața S obținută prin rotirea graficului lui f în jurul axei Ox, are arie și avem :*

$$\boxed{\text{aria}(S) = 2\pi \int_a^b f\sqrt{1 + f'^2}}$$

Dem. Fie $\Delta \in \mathfrak{T} := \mathfrak{T}_{[a,b]}$, $f_\Delta : [a, b] \to \mathbf{R}$ și S_Δ suprafața de rotație, definită în D.10.4.1. Atunci avem (fig. 56) :

$$\text{aria}(S_\Delta) = \sum_{i=1}^{n} \pi(f(x_i) + f(x_{i-1}))\sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}$$

Din T.6.3.4. rezultă : $(\forall)\ i = \overline{1, n}$, $(\exists)\ \xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$ a.î.

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = (x_i - x_{i-1}) f'(\xi_i),$$

deci

$$\text{aria}(S_\Delta) = \pi \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) + f(x_{i-1}))\sqrt{1 + f'^2(\xi_i)} \cdot (x_i - x_{i-1}) \tag{1}$$

și deci

$$\text{aria}(S_\Delta) \leqslant \pi \sum_{i=1}^{n} 2\|f\|_\infty \sqrt{1 + \|f'\|^2}\,(x_i - x_{i-1}) \leqslant 2\pi(b - a)\|f\|_\infty \sqrt{1 + \|f'\|^2} < +\infty$$

Așadar $\sup_{\Delta \in \mathfrak{T}} (\text{aria}(S_\Delta)) < +\infty$, deci S are arie ; fie $\alpha := \text{aria}(S)$.

Punem mai departe $F := 2\pi f\sqrt{1 + f'^2}$ și $\xi_\Delta := (\xi_i)_{i=\overline{1,n}}$, unde ξ_i $(i = \overline{1, n}$ au fost deduse mai sus. Din definiția sumei Riemann avem :

$$\sigma_F(\Delta, \xi_\Delta) = \sum_{i=1}^{n} 2\pi f(\xi_i)\sqrt{1 + f'^2(\xi_i)}\ (x_i - x_{i-1}) \tag{2}$$

Din (1) și (2) rezultă

$$|\text{aria}(S_\Delta) - \sigma_F(\Delta, \xi_\Delta)| \leqslant$$

$$\leqslant \pi \sum_{i=1}^{n} (|f(x_i) - f(\xi_i)| + |f(x_{i-1}) - f(\xi_i)|)\sqrt{1 + f'^2(\xi_i)}\,(x_i - x_{i-1}) \tag{3}$$

Funcția f fiind continuă, este uniform continuă (T.5.7.8.), deci $(\forall)\ \varepsilon > 0$ $(\exists)\ \eta > 0$ a.î.

$$|f(x) - f(x')| \leqslant \varepsilon,\ (\forall)\ x, x' \in [a, b],\ |x - x'| < \eta \tag{4}$$

Dacă $\nu(\Delta) < \eta$, din (3) și (4) rezultă imediat

$$|\operatorname{aria}(S_\Delta) - \sigma_F(\Delta, \xi_\Delta)| \leqslant 2\pi\varepsilon(b-a)\sqrt{1+\|f'\|_\infty^2} \tag{5}$$

Ca și în P.10.2.3. deducem că $(\exists)\ (\Delta_j)_{j\geqslant 1}$ cu $\nu(\Delta_j) \to 0$ și aria $(S_{\Delta_j}) \to$ $\to$ aria (S). Dacă punem acum în (5) $\Delta = \Delta_j$, $(j \geqslant 1)$ și trecem la limită, $j \to \infty$, rezultă

$$\operatorname{aria}(S_{\Delta_j}) - \sigma_F(\Delta_j, \xi_{\Delta_j}) \to 0 \quad (j \to \infty)$$

deci $\sigma_F(\Delta_j, \xi_{\Delta_j}) \to \operatorname{aria}(S)$. Cum funcția F este integrabilă (T.9.2.6. și T.9.2.7.), rezultă (T.9.1.4.Cor.1) $\sigma_F(\Delta_j, \xi_{\Delta_j}) \to \int_a^b F (j \to \infty)$, prin urmare

$$\operatorname{aria}(S) = \int_a^b F = 2\pi\int_a^b f\sqrt{1+f'^2}$$

Exemplul 1. Să se calculeze aria sferei.

Suprafața S a unei sfere cu centrul în origine și de rază r se obține prin rotația graficului funcției $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$, $x \in [-r, r]$ în jurul axei $0x$ (fig. 57). Atunci :

$$\operatorname{aria}(S) = 2\pi\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2-x^2}\sqrt{1+\frac{x^2}{r^2-x^2}}\,dx = 2\pi r\int_{-r}^{r} dx = 4\pi r^2.$$

$$\boxed{\operatorname{aria}(S) = 4\pi r^2}$$

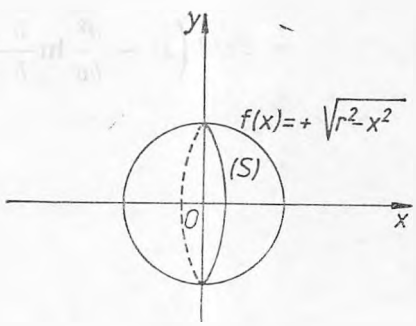


Fig. 57

Exemplul 2. Să se calculeze aria suprafeței obținută prin rotația unei lipse în jurul uneia din axele sale (elipsoid).

Ecuația elipsei fiind $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, aria suprafeței obținută prin rotația lipsei în jurul axei $0x$ este :

$$\operatorname{aria}(S) = 2\pi\int_{-a}^{a} f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx,$$

nde

$$f(x) = \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2},$$

eci

$$\operatorname{aria}(S) = \frac{2\pi b}{a^2}\int_{-a}^{a}\sqrt{a^4-(a^2-b^2)x^2}\,dx.$$

1° Dacă $a > b$, atunci $a^2 - b^2 = c^2$, deci

$$\text{aria}(S) = \frac{2\pi bc}{a^2}\int_{-a}^{a}\sqrt{\left(\frac{a^2}{c}\right)^2 - x^2}\,dx =$$

$$= \frac{2\pi bc}{a^2}\left(\frac{x}{2}\sqrt{\frac{a^4}{c^2} - x^2} + \frac{a^4}{2c^2}\arcsin\frac{cx}{a^2}\right)\Bigg|_{-a}^{a} =$$

$$= \frac{4\pi bc}{a^2}\left(\frac{a}{2}\sqrt{\frac{a^4}{c^2} - a^2} + \frac{a^4}{2c^2}\arcsin\frac{c}{a}\right) = 2\pi b^2\left(1 + \frac{a^2}{bc}\arcsin\frac{c}{a}\right).$$

2° Dacă $a < b$, atunci $a^2 - b^2 = -c^2$, deci

$$\text{aria}(S) = \frac{2\pi bc}{a^2}\int_{-a}^{a}\sqrt{\left(\frac{a^2}{c}\right)^2 + x^2}\,dx =$$

$$= \frac{2\pi bc}{a^2}\left(\frac{x}{2}\sqrt{\frac{a^4}{c^2} + x^2} + \frac{a^4}{2c^2}\ln\left(x + \sqrt{\frac{a^4}{c^2} + x^2}\right)\right)\Bigg|_{-a}^{a} =$$

$$= \frac{4\pi bc}{a^2}\cdot\frac{a}{2}\sqrt{\frac{a^4}{c^2} + a^2} + \frac{a^2 b}{c}\ln\frac{a + \sqrt{\frac{a^4}{c^2} + a^2}}{-a + \sqrt{\frac{a^4}{c^2} + a^2}} =$$

$$= 2\pi b^2\left(1 + \frac{a^2}{bc}\ln\frac{b + c}{b - c}\right).$$

CAPITOLUL 11

INTEGRALE IMPROPRII

Am definit în Cap. 9 noțiunea de integrală pentru funcții definite pe intervale compacte și am arătat că funcțiile integrabile (Riemann) sînt mărginite. Noțiunea de integrală se extinde în mod natural la cazul funcțiilor arbitrare, mărginite sau nemărginite, și definite pe intervale arbitrare, mărginite sau nemărginite, închise sau neînchise. O serie de proprietăți ale funcțiilor integrabile se transmit la funcțiile integrabile în sens generalizat.

11.1. Integrale improprii. Proprietăți generale

11.1.1. Definiție. Fie $-\infty < a < b \leqslant +\infty$ și $f : [a, b) \to \mathbf{R}$ o funcție local integrabilă. Perechea de funcții $\left(f, \left([a, b) \ni t \mapsto \int_a^t f\right)\right)$ se numește *integrala improprie* (*integrala generalizată*) din f pe $[a, b)$ și se notează cu $\int_{[a,b)} f$, $\int_a^{b-} f$ (dacă $b < +\infty$) sau simplu $\int_a^b f$. Dacă $L := \lim_{t \nearrow b} \int_a^t f$ există și este finită, vom spune că f este *integrabilă impropriu* (*generalizat*) sau că integrala improprie $\int_a^b f$ este *convergentă* și este egală cu L și vom scrie $\int_a^b f = L$. Dacă integrala improprie $\int_a^b f$ nu este convergentă, ea se numește *divergentă*; dacă $\lim_{t \nearrow b} \int_a^t f = +\infty$ (resp. $-\infty$), vom spune că integrala improprie $\int_a^b f$ este *divergentă* și *egală* cu $+\infty$ (resp. $-\infty$) și vom scrie $\int_a^b f = +\infty$ (resp. $-\infty$). Vom spune că integrala improprie este : *absolut convergentă*, dacă integrala improprie $\int_a^b |f|$ este convergentă ; *semiconvergentă*, dacă este convergentă și nu este absolut convergentă.

În mod analog se definește integrala improprie din funcții f definite pe intervale de forma $(a, b]$, unde $-\infty \leqslant a < b < +\infty$; dacă intervalul dat este de forma (a, b), unde $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, atunci integrala improprie

$\int_a^b f$ se definește astfel $\int_a^b f := \int_a^c f + \int_c^b f$, dacă există $c \in (a, b)$ a.î. integralele improprii $\int_a^c f$ și $\int_c^b f$ sînt convergente sau mai general, dacă suma lor are sens în $\overline{\mathbf{R}}$. În fine, să considerăm cazul și mai general: fie $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, fie $a < c_1 < c_2 < \ldots < c_n < b$ și $f : \mathbf{R} \cap [a, b] \setminus \{c_1, \ldots c_n\} \to \mathbf{R}$ o funcție local integrabilă; dacă integralele improprii $\int_a^{c_1} f, \int_{c_1}^{c_2} f, \ldots, \int_{c_n}^{b} f$, sînt convergente (respectiv o parte din ele sînt divergente însă suma lor are sens în $\overline{\mathbf{R}}$), atunci

$$\int_a^b f := \int_a^{c_1} f + \int_{c_1}^{c_2} f + \ldots + \int_{c_n}^b f.$$

În cele ce urmează vom studia integrale improprii din funcții f definite numai pe intervale de forma $[a, b)$, unde $-\infty < a < b \leqslant +\infty$. Rezultatele care se obțin admit formulări analoage evidente și în celelalte cazuri de integrale improprii.

Observația 1. Fie $I \subseteq \mathbf{R}$ un interval și $f : I \to \mathbf{R}$ o funcție. Dacă f este local mărginită, în particular f mărginită, atunci (P.9.2.4.Cor. 1) avem: f local integrabilă $\Leftrightarrow f$ continuă a.p.t.

Exemple.

1) *Integralele improprii* $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$, $\int_0^\infty e^{-x}\,dx$ *și* $\int_0^1 \ln x\,dx$ *sînt convergente*

$$\lim_{t \searrow 0} \int_t^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{t \searrow 0} 2\sqrt{x}\Big|_t^1 = 2;$$

$$\lim_{t \to \infty} \int_0^t e^{-x}\,dx = \lim_{t \to \infty} (1 - e^{-t}) = 1;$$

$$\lim_{t \searrow 0} \int_t^1 \ln x\,dx = \lim_{t \searrow 0} (x \ln x - x)\Big|_t^1 = -1.$$

2) *Integralele improprii* $\int_0^\infty \sin x\,dx$, $\int_0^\infty [x]\,dx$, $\int_0^{\pi/2} \operatorname{tg} x\,dx$ *și* $\int_0^\infty \ln x\,d$ *sînt divergente.*

$$\int_0^t \sin x\,dx = \cos x - 1, \quad (\forall)\ t \in \mathbf{R}_+ \text{ și cos nu are limită la } +\infty;$$

$$\int_0^t [x]\,dx \geqslant n - 1, \quad (\forall)\ t \geqslant n, \text{ deci } \lim_{t \to \infty} \int_0^t [x]\,dx = +\infty;$$

$$\lim_{t \nearrow \frac{\pi}{2}} \int_0^t \operatorname{tg} x\,dx = \lim_{t \nearrow \frac{\pi}{2}} (-\ln(\cos t))\Big|_0^t = +\infty;$$

$$\lim_{t \to \infty} \int_1^t \ln x\,dx = \lim_{t \to \infty} (x(\ln x - 1))\Big|_1^t = \lim_{t \to \infty} (x \ln(ex))\Big|_1^t = \infty,$$

deci $\int_1^\infty \ln x\,dx$ este divergentă și deci $\int_0^\infty \ln x\,dx$ este divergentă.

Să observăm că funcțiile $\mathbf{R}_+ \ni x \mapsto \sin x$ și $\mathbf{R} \ni t \mapsto \int_0^t \sin x \, dx$ sînt mărginite și integrala impropie $\int_0^\infty \sin x \, dx$ este divergentă.

11.1.2. Propoziție. 1° *Fie* $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$ *și* $p \in \mathbf{R}_+^*$. *Atunci integralele improprii* $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^p}$ *și* $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^p}$ *sînt convergente, dacă* $0 < p < 1$ *și divergente, dacă* $1 \leqslant p < +\infty$.

2° *Fie* $a, p \in \mathbf{R}_+^*$. *Atunci integrala improprie* $\int_a^\infty \frac{dx}{x^p}$ *este convergentă, dacă* $p > 1$ *și divergentă, dacă* $0 < p \leqslant 1$.

Dem. 1° Fie $p \in \mathbf{R}_+^* \setminus \{1\}$ fixat. Evident $(\forall)\, t \in [a, b)$, avem :

$$\int_a^t \frac{dx}{(b-x)^p} = -\frac{1}{-p+1}(b-x)^{-p+1}\Big|_1^t = \frac{1}{-p+1}[(b-a)^{-p+1} - (b-t)^{-p+1}],$$

deci

$$\int_a^{b-} \frac{dx}{(b-x)^p} := \lim_{t \nearrow b} \int_a^t \frac{dx}{(b-x)^p} = \begin{cases} \frac{1}{-p+1}(b-a)^{-p+1}, & 0 < p < 1 \\ -\infty, & p > 1 \end{cases}$$

Dacă $p = 1$, avem :

$$\int_a^{b-} \frac{dx}{b-x} := \lim_{t \nearrow b} \int_a^t \frac{dx}{b-x} = \lim_{t \nearrow b} (\ln(b-a) - \ln(b-t)) = -\infty$$

Prin urmare $\int_a^{b-} \frac{dx}{(b-x)^p}$ este convergentă, dacă $p \in (0, 1)$ și divergentă, dacă $p \in [1, \infty)$.

2 Evident avem :

$$\int_a^\infty \frac{dx}{x} := \lim_{t \nearrow \infty} \int_a^t \frac{dx}{x} = \lim_{t \nearrow \infty} (\ln x - \ln a) = +\infty,$$

deci integrala improprie $\int_a^\infty \frac{dx}{x}$ este divergentă.

Dacă $p \in \mathbf{R}_+^* \setminus \{1\}$, avem :

$$\int_a^t \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{1-p}(t^{1-p} - a^{1-p}),\ (\forall)\, t \in \mathbf{R}_+^*,$$

deci $\lim_{t \nearrow b} \int_a^t \frac{dx}{x^p} = -\frac{a^{1-p}}{1-p}$, dacă $p > 1$ (resp. $= +\infty$, dacă $0 < p < 1$) etc.

Corolar 1. $(\forall)\ p \in \mathbf{R}_+^*$ *integrala improprie* $\int_0^\infty \frac{dx}{x^p}$ *este divergentă.*

Observația 1. Fie $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$, $p \in (0, 1)$ și $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ o funcție definită astfel $f(x) = \frac{1}{(b-x)^p}$, dacă $x \in [a, b)$ și $f(b)$ arbitrar în $\mathbf{R}$. Atunci

integrala improprie $\int_a^{b-} f$ este convergentă, deși f nu este mărginită pe $[a, b)$, deci f nu este integrabilă (propriu) pe $[a, b]$.

Observația 2. Fie $a, b, c \in \overline{\mathbf{R}}$, $a < c < b$ și $f : (a, b) \setminus \{c\} \to \mathbf{R}$ o funcție local integrabilă. Atunci integrala improprie $\int_a^b f$ poate fi divergentă (spre exemplu $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x}$ este divergentă), totuși $\lim_{\varepsilon \searrow 0} \left(\int_a^{c-\varepsilon} f + \int_{c+\varepsilon}^{b} f \right)$ poate să existe și să fie finită; în acest caz această limită se notează cu $vp(f)$ și se numește *valoarea principală* a lui f. Spre exemplu $vp\left(\frac{1}{x}\right) = 0$. Așadar *integrala improprie* dintr-o funcție și *valoarea principală* din acea funcție sînt concepte diferite.

11.1.3. Propoziție. *Fie* $-\infty < a < b \leqslant +\infty$ *și* $f : [a, b) \to \mathbf{R}$ *o funcție local integrabilă. Atunci condițiile* 1°—3° *sînt echivalente*:

1° $\int_a^{b-} f$ *este convergentă*;

2° $(\forall)$ $c \in [a, b)$, *rezultă* $\int_c^{b-} f$ *este convergentă*;

3° $(\exists)$ $c \in [a, b)$ *a.î.* $\int_c^{b-} f$ *este convergentă.*

Dem. Să arătăm, spre exemplu, că 1° $\Leftrightarrow$ 3°.

$$\int_a^t f = \int_a^c f + \int_c^t f, \ (\forall) \ t \in [a, b),$$

deci

1° $\Leftrightarrow \lim_{t \nearrow b} \int_a^t f$ există și este finită $\Leftrightarrow \lim_{t \nearrow b} \int_c^t f$ există și este finită $\Leftrightarrow$ 3°.

Observație. În enunțul P.11.1.3. putem înlocui peste tot cuvîntul *convergentă* prin *divergentă* (resp. *divergentă și egală cu infinit*).

11.1.4. Propoziție. *Fie* $-\infty < a < b \leqslant +\infty$ *și* $f : [a, b) \to \mathbf{R}_+$ *o funcție local integrabilă. Atunci condițiile* 1°—5° *sînt echivalente*: 1° $\int_a^{b-} f$ *este convergentă*

2° $(\forall)$ $(b_n)_{n \geqslant 1} \subseteq [a, b)$, $b_n \to b$, *șirul* $\left(\int_a^{b_n} f \right)_{n \geqslant 1}$ *este convergent*; 3° $(\exists)$ $(b_n)_{n \geqslant 1}$ $\subseteq [a, b)$, $b_n \to b$, *a.î. șirul* $\left(\int_a^{b_n} f \right)_{n \geqslant 1}$ *este convergent*; 4° $\sup_{t \in [a, b)} \int_a^t f < +\infty$

5° $\sup_{[c, d] \subseteq [a, b)} \int_c^d f < +\infty$.

Dem. Considerăm funcția $F(t) = \int_a^t f$, $t \in [a, b)$. Cum $f \geqslant 0$, rezultă că F este monoton crescătoare, deci (T.5.5.18.) $F(b-) := \lim_{t \nearrow b} F(t)$ există, finită sau egală cu $+\infty$. Atunci avem:

$$\int_a^{b-} f \text{ convergentă} \Leftrightarrow F(-b) < +\infty \Leftrightarrow (\forall) \ (b_n)_{n \geqslant 1} \subseteq [a, b), \ b_n \to b,$$

rezultă că șirul $(F(b_n))_{n\geq 1}$ este convergent $\Leftrightarrow$ $(\exists)$ $(b_n)_{n\geq 1} \subseteq [a, b)$ a.î. șirul $(F(b_n))_{n\geq 1}$ este convergent $\Leftrightarrow$ F mărginită $\Leftrightarrow$ $\sup\limits_{t\in[a,b)} F(t) < +\infty$.

De aici rezultă echivalența condițiilor 1°—4°.

Cum evident 5° $\Rightarrow$ 4°, rămîne să arătăm că 4° $\Rightarrow$ 5°.

Fie în acest scop $M := \sup\limits_{t\in[a,b)} \int_a^t f$. Deoarece avem :

$$\int_c^d f = \int_a^d f - \int_a^c f \leq \int_a^d f \leq M, \ (\forall)\ [c, d] \subseteq [a, b),$$

rezultă că $\sup\limits_{[c,d]\subseteq[a,b)} \int_c^d f \leq M < +\infty \Leftrightarrow 5°$.

11.1.5. Propoziție. *Fie $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$, și $f : [a, b) \to \mathbf{R}$ o funcție mărginită, local integrabilă (resp. f continuă a.p.t.). Atunci f este integrabilă și avem* $\int_a^{b-} f = \int_a^b \tilde{f}$, *unde* $\tilde{f}(x) = f(x)$, *dacă* $x \in [a, b]$ *și* $\tilde{f}(b)$ *arbitrar în* $\mathbf{R}$.

Dem. f fiind mărginită, avem (P. 9.2.4.Cor.1) f local integrabilă $\Leftrightarrow$ f continuă a.p.t. Atunci $\tilde{f}$ este continuă a.p.t. și evident mărginită, deci $\tilde{f}$ este integrabilă (T.9.1.14.) ; fie $L := \int_a^b \tilde{f}$. Mai departe, din P.9.2.9. și T.9.2.2. rezultă

$$\left| L - \int_a^t f \right| = \left| \int_a^t \tilde{f} + \int_t^b \tilde{f} - \int_a^t f \right| = \left| \int_t^b \tilde{f} \right| \leq (b - t)\|\tilde{f}\|_\infty, \ (\forall)\ t \in [a, b),$$

de unde prin trecere la limită, $t \nearrow b$, deducem că $\lim\limits_{t\nearrow b} \int_a^t f = L$, deci $\int_a^{b-} f$ este convergentă și este egală cu L.

Corolar 1. *Fie $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$ și $f : [a, b) \to \mathbf{R}$ o funcție local integrabilă resp. continuă) a.î. $f(b-)$ există și este finită. Atunci $\int_a^{b-} f$ este convergentă și avem* $\int_a^{b-} f = \int_a^b \tilde{f}$, *unde* $\tilde{f}(x) = f(x)$, $(\forall)$ $x \in [a, b)$ *și* $\tilde{f}(b)$ *arbitrar în* $\mathbf{R}$.

Dem. Deoarece $f(b-)$ există și este finită, $(\exists)$ $c \in (a, b)$ a.î. $|f(x) - f(b-)| \leq 1$, $(\forall)$ $x \in (c, b)$, de unde rezultă f mărginită pe (c, b). Cum f este integrabilă pe $[a, c]$, este mărginită (P.9.1.10.). Prin urmare f este mărginită. Aplicăm mai departe P. 11.1.5.

Corolar 2. *Fie $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$ și $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ o funcție integrabilă (resp. continuă). Atunci integrala improprie $\int_a^{b-} f$ este convergentă și avem $\int_a^{b-} f = \int_a^b f$.*

Exemple. Integralele improprii $\int_0^a \frac{\sin x}{x}\,dx\ (a \in \mathbf{R}^*)$; $\int_0^a \frac{\operatorname{tg} x}{x}\,dx \left(a \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)\right)$; $\frac{\ln(1+x)}{x}$ $(a \in \mathbf{R}_+^*)$, *sînt convergente.*

Într-adevăr, funcția $\mathbf{R}^* \ni x \mapsto \frac{\sin x}{x}$, este continuă și are limită finită, egală cu 1, în $x = 0$ etc.

11.1.6. Propoziție. *Fie* $f : [a, \infty) \to \mathbf{R}$ *o funcție local integrabilă, integrabilă impropriu și care are limită la* $+\infty$. *Atunci* $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$.

Dem. Fie $l := \lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ și să presupunem $l \neq 0$, spre exemplu $l > 0$. Atunci $(\exists)\ c \in [a, \infty)$ a.î. $f(x) \geqslant \frac{l}{2}$, $(\forall)\ x \in [c, \infty)$. Deoarece integrala $\int_a^\infty f$ este convergentă, rezultă (P. 11.1.3.) că integrala $\int_c^\infty f$ este convergentă. Însă $\sup\limits_{t\in[c,\infty)} \int_c^t f \geqslant \sup\limits_{t\in[c,\infty)} \int_c^t \frac{l}{2}\,dx = +\infty$, deci (P. 11.1.4.(4°)) $\int_c^\infty f$ este divergentă, absurd. Rămîne că $l = 0$.

Corolar 1. *Fie* $f : [a, \infty) \to \mathbf{R}$ *o funcție local integrabilă a.î.* $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ *există și este nenulă. Atunci integrala improprie* $\int_a^\infty f$ *este divergentă.*

Observație. Fie $f : [a, \infty) \to \mathbf{R}$ o funcție local integrabilă, nenegativă a.î. $\int_a^\infty f$ este convergentă. De aici nu rezultă numaidecît că f are limită la $+\infty$.

Contraexemplu. Fie $f : [1, \infty) \to \mathbf{R}$ o funcție definită astfel $f(x) = \frac{1}{x^2}$, dacă $x \in [1, \infty) \setminus \mathbf{N}$ și $f(n) = n\ \forall\ n \in \mathbf{N}$. Atunci $\int_1^\infty f = 1$ și $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ nu există.

11.1.7. Propoziție. *Fie* $-\infty < a < b \leqslant +\infty$ *și* $f, g : [a, b) \to \mathbf{R}$ *două funcții local integrabile a.î.* $\int_a^{b-} f$ *și* $\int_a^{b-} g$ *sînt convergente. Atunci* $\int_a^{b-} (f \pm g)$ *este convergentă și avem relația :* $\int_a^{b-} (f \pm g) = \int_a^{b-} f \pm \int_a^{b-} g$.

Dem. Prin ipoteză $\lim\limits_{t\nearrow b} \int_a^t f \left(\text{resp. } \lim\limits_{t\nearrow b} \int_a^t g\right)$ există și este finită ; să o notăm cu L_1 (resp. L_2). Evident însă

$$\int_a^t (f \pm g) = \int_a^t f \pm \int_a^t g,\ (\forall)\ t \in [a, b),$$

de unde prin trecere la limită, $t \nearrow b$, obținem :

$$\int_a^{b-} (f \pm g) = \lim_{t\nearrow b} \int_a^t f \pm \lim_{t\nearrow b} \int_a^t g = \int_a^{b-} f \pm \int_a^{b-} g.$$

Corolar 1. *Fie* $-\infty < a < b \leqslant +\infty$ *și* $\mathcal{R}([a, b))$ *mulțimea funcțiunilo* $f : [a, b) \to \mathbf{R}$ *local integrabile și care sînt integrabile impropriu. Atunci* $\mathcal{R}([a, b)$ *este un* $\mathbf{R}$*-spațiu vectorial, iar aplicația* $\mathcal{R}([a, b)) \ni f \mapsto \int_a^{b-} f$ *este liniară.*

Dem. Dacă $f \in \mathcal{R}([a, b))$ și $\lambda \in \mathbf{R}$, se arată ca în P. 11.1.7. că $\lambda f \in \mathcal{R}([a, b$ și $\int_a^{b-} (\lambda f) = \lambda \int_a^{b-} f$ etc.

11.1.8. Teoremă (Formula Leibniz-Newton). *Fie* $-\infty < a < b \leqslant +\infty$ *și* $f : [a, b) \to \mathbf{R}$ *o funcție local integrabilă care admite primitive*

fie F o primitivă a lui f. Atunci $\int_a^{b-} f$ *este convergentă (resp. egală cu* $\pm\infty$*)* $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow F(b-)$ *există și este finită (resp. egală cu* $\pm\infty$*). În acest caz avem relația :*

$$\int_a^{b-} f = F(b-) - F(a).$$

Dem. Fie $t \in [a, b)$ fixat. Din ipoteză rezultă că $f|_{[a,t]}$ este integrabilă, admite primitive și $F|_{[a,t]}$ este o primitivă a sa. Din T. 9.3.2. avem :

$$\int_a^t f = \int_a^t f|_{[a,t]} = F|_{[a,t]}(t) - F|_{[a,t]}(a) = F(t) - F(a)$$

Așadar $\int_a^t f = F(t) - F(a)$, $(\forall)\, t \in [a, b)$, de unde prin trecere la limită, $t \nearrow b$, obținem :

$\int_a^{b-} f$ convergentă $\Leftrightarrow$ $(\exists)\ \lim\limits_{t \nearrow b} \int_a^t f$ finită $\Leftrightarrow$ $(\exists)\ \lim\limits_{t \nearrow b} F(t) - F(a))$ finită $\Leftrightarrow$ $(\exists) F(b-)$ finită.

În cazul în care integrala: $\int_a^{b-} f$ este convergentă (resp. egală cu $\pm\infty$), avem relația : $\int_a^{b-} f = F(b-) - F(a)$.

Corolar 1. *Fie* $-\infty < a < b \leqslant +\infty$ *și* $f : [a, b) \to \mathbf{R}$ *o funcție continuă. Atunci* $(\forall)$ $F : [a, b) \to \mathbf{R}$ *o primitivă a lui f, rezultă :* $\int_a^{b-} f$ *este convergentă (resp. egală cu* $\pm\infty$*)* $\Leftrightarrow F(b-)$ *există și este finită (resp. egală cu* $\pm\infty$*). În acest caz avem relația :* $\int_a^{b-} f = F(b-) - F(a)$.

11.1.9. Teoremă (Formula de integrare prin părți). *Fie* $-\infty < a < b \leqslant +\infty$ *și* $f, g : [a, b) \to \mathbf{R}$ *două funcții de clasă* $\mathcal{C}^1$ *a.î.* $(fg)(b-)$ *există și este finită, iar* $\int_a^{b-} (gf')$ *este convergentă. Atunci* $\int_a^{b-} (fg')$ *este convergentă și avem relația :*

$$\int_a^{b-} (fg') = (fg)|_a^{b-} - \int_a^{b-} (gf')$$

Dem. Din T.9.3.4. rezultă relația :

$$\int_a^t (fg') = (fg)|_a^t - \int_a^t (gf'), \quad (\forall)\, t \in [a, b),$$

de unde prin trecere la limită, $t \nearrow b$, deducem :

$$\lim_{t \nearrow b} \int_a^t (fg') = (fg)(b-) - (fg)(a) - \int_a^{b-} (gf').$$

Prin urmare $\int_a^{b-} (fg')$ este convergentă și avem relația :

$$\int_a^{b-} (fg') = (fg)|_a^{b-} - \int_a^{b-} (gf')$$

11.1.10. Teoremă (Schimbarea de variabilă). *Fie* $-\infty < a < b \leqslant +\infty$ *şi* $f : [a, b) \to \mathbf{R}$ *o funcţie continuă; fie* $-\infty < \alpha < \beta \leqslant +\infty$ *şi* $\varphi : [\alpha, \beta) \to [a, b)$ *o funcţie bijectivă de clasă* $\mathcal{C}^1$. *Atunci* f *este integrabilă impropriu* $\Leftrightarrow (f \circ \varphi)\varphi'$ *este integrabilă impropriu. In acest caz avem relaţia*

$$\int_\alpha^\beta (f \circ \varphi) \cdot \varphi' = \int_a^{b-} f.$$

Dem. φ fiind continuă şi bijectivă, este omeomorfă şi strict monotonă (T. 5.5.19.Cor.2). Se vede imediat că $\varphi(\alpha) = a$ şi $\varphi(\beta-) = b$. Din T.9.3.5. rezultă

$$\int_\alpha^t (f \circ \varphi) \cdot \varphi' = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(t)} f = \int_a^{\varphi(t)} f, \ (\forall)\ t \in [\alpha, \beta) \tag{1}$$

Atunci $(f \circ \varphi) \cdot \varphi'$ este integrabilă impropriu $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\exists) \lim\limits_{t \nearrow \beta} \int_\alpha^t (f \circ \varphi) \cdot \varphi'$ finită $\Leftrightarrow (\exists) \lim\limits_{t \nearrow \beta} \int_a^{\varphi(t)} f$ finită $\Leftrightarrow (\exists) \lim\limits_{x \nearrow b} \int_a^x f$ finită $\Leftrightarrow f$ este integrabilă impropriu.

În acest caz, din (1) prin trecere la limită, obţinem

$$\int_\alpha^{\beta-} (f \circ \varphi) \cdot \varphi' = \lim_{t \nearrow \beta} \int_\alpha^t (f \circ \varphi) \cdot \varphi' = \lim_{t \nearrow \beta} \int_a^{\varphi(t)} f = \lim_{x \nearrow b} \int_a^x f = \int_a^{b-} f$$

Corolar 1. *Fie* $-\infty < a < b \leqslant +\infty$ *şi* $f : [a, b) \to \mathbf{R}$ *o funcţie continuă; fie* $-\infty < \alpha < \beta \leqslant \infty$ *şi* $\varphi : [\alpha, \beta) \to [a, b)$ *o funcţie bijectivă cu* φ^{-1} *de clasă* $\mathcal{C}^1$. *Atunci* $f \circ \varphi$ *este integrabilă impropriu* $\Leftrightarrow f \circ (\varphi^{-1})'$ *este integrabilă impropriu. In acest caz avem relaţia :* $\int_\alpha^{\beta-} (f \circ \varphi) = \int_a^{b-} f \cdot (\varphi^{-1})'$.

Dem. Analoagă cu demonstraţia dată în T. 9.3.5. Cor. 2.

Observaţie. T.11.1.10. şi Cor.1 au loc, în particular, pentru funcţii $\mathcal{C}^1$ difeomorfe $\varphi : [\alpha, \beta) \to [a, b)$. Este clar că în toate cazurile considerate intervalul $[\alpha, \beta)$ poate fi de forma $(\alpha, \beta]$, unde $-\infty \leqslant \alpha < \beta < +\infty$, în care caz avem $\varphi(\beta) = a$ *şi* $\varphi(\alpha+) = b$.

Exemplul 1. *Să se calculeze integrala improprie* $\int_0^{1-} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$

Facem schimbarea de variabilă $\varphi : \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \to [0, 1)$, unde $x = \varphi(t) = \sin t$. Atunci avem :

$$\int_0^{1-} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}-} \frac{\cos t \, dt}{\sqrt{1 - \sin^2 t}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}-} dt = \frac{\pi}{2}$$

Exemplul 2. *Să se calculeze integrala improprie* $L = \int_0^\infty \frac{x(x+1)}{(2x^2 + 2x + 1)^2} dx$.

Evident putem scrie $L = \int_0^1 \frac{(2x+1)^2 - 1}{((2x+1)^2 + 1)^2} dx$. Facem schimbarea de variabilă $\varphi : [0, \infty) \to [1, \infty)$, $y = \varphi(x) = 2x + 1$. Atunci avem :

$$L = \frac{1}{2} \int_1^\infty \frac{y^2 - 1}{(y^2 + 1)^2} dy. \text{ Însă}$$

$$\int \frac{(y^2-1)dy}{(y^2+1)^2} = \int \frac{dy}{(y^2+1)^2} - 2\int \frac{dy}{(y^2+1)^2} = \operatorname{arc\,tg}\, y - 2\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{y}{y^2+1} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\, y\right), \text{ deci } I = -\frac{1}{2}\,\frac{y}{y^2+1}\Big|_1^{\infty} = \frac{1}{4}.$$

11.2. Criterii de convergență a integralelor improprii

11.2.1. Definiție. Fie $A \subseteq \mathbf{R}$ o mulțime, $x_0 \in A'[\mathbf{R}]$ un punct și $f, g : A\setminus\{x_0\} \to \mathbf{R}$ două funcții. Vom scrie: $f(x) = O(g(x))$, $x \to x_0$, dacă $(\exists)\ \alpha : A\setminus\{x_0\} \to \mathbf{R}$ o funcție mărginită pe o vecinătate punctată relativ la A a lui x_0 (i.e. de forma $A \cap V\setminus\{x_0\}$, cu $V \in \mathcal{V}(x_0)$) a.î.

$$f(x) = \alpha(x)\ g(x),\ (\forall)\ x \in A \cap V\setminus\{x_0\}.$$

a) $f(x) = O(g(x))$, $x \to x_0 \Leftrightarrow (\exists)\ M > 0$, $(\exists)\ V \in \mathcal{V}(x_0)$ a.î.

$$|f(x)| \leqslant M|g(x)|,\ (\forall)\ x \in A \cap V\setminus\{x_0\}$$

b) Dacă $g(x) \neq 0$, $(\forall)\ x \in A\setminus\{x_0\}$, atunci $f(x) = O(g(x))$, $x \to x_0 \Leftrightarrow \dfrac{f}{g}$ este mărginită pe o vecinătate punctată relativ la A a lui x_0.

11.2.2. Teoremă. *Fie* $-\infty < a < b \leqslant +\infty$ *și* $f, g : [a, b) \to \mathbf{R}_+$ *două funcții local integrabile. Dacă* $f(x) = O(g(x))$, $x \to b$, *și* $\int_a^b g$ *este convergentă, atunci* $\int_a^{b-} f$ *este convergentă.*

Dem, Deoarece $f(x) = O(g(x))$, $x \to b$, există $M > 0$, $(\exists)\ c \in [a, b)$ a.î. $f(x) \leqslant Mg(x)$, $(\forall)\ x \in [c, b)$.

Cum $\int_a^{b-} g$ este convergentă, rezultă că $\int_c^{b-} g$ este convergentă, deci $\sup\limits_{t\in[c,\,b)} \int_c^t g < +\infty$

Atunci avem:

$$\sup_{t\in[a,\,b)} \int_a^t f \leqslant \sup_{t\in[c,b)} \int_c^t (Mg) < +\infty,$$

deci (P. 11.1.4.) $\int_c^{b-} f$ este convergentă și deci (P. 11.1.3.) $\int_a^{b-} f$ este convergentă.

Corolar 1. *Fie* $-\infty < a < b \leqslant +\infty$ *și* $f, g : [a, b) \to \mathbf{R}$ *două funcții local integrabile a.î.* $f \geqslant 0$ *și* $g > 0$ *(pe* $[c, b)$ *cu* $c \in [a, b)$*). Atunci*

1° *Dacă* $\lim\limits_{x\nearrow b} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ *există este finită și* $\int_a^{b-} g$ *este convergentă, rezultă că* $\int_a^{b-} f$ *este convergentă;*

2° *Dacă* $\lim\limits_{x\nearrow b} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ *există, este nenulă și* $\int_a^{b-} f$ *este convergentă, rezultă că* $\int_a^{b-} g$ *este convergentă;*

3° *Dacă* $\lim\limits_{x\nearrow b} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ *există, este diferită de* 0 *și* ∞, *rezultă că* $\int_a^{b-} f$ *și* $\int_a^{b-} g$ *au aceeași natură.*

Dem. Presupunem că $\lambda := \lim\limits_{x\nearrow b} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ există, finită sau $+\infty$.

1° Dacă $\lambda < \infty$, atunci pentru $\varepsilon = 1$, există $c \in [a, b)$ a.î. $\dfrac{f(x)}{g(x)} < 1$, $(\forall)$ $x \in [c, b)$, deci $f(x) = O(g(x))$, $x \nearrow b$, prin urmare (T.11.2.2.) $\int_a^{b-} f$ este convergentă.

2° Dacă $\lambda > 0$, atunci pentru $\varepsilon := \dfrac{\lambda}{2}$, există $c \in [a, b)$ a.î. $\dfrac{f(x)}{g(x)} \geqslant \lambda - \varepsilon = \dfrac{\lambda}{2}$, $(\forall)$ $x \in [c, b)$, deci $g(x) \leqslant \dfrac{2}{\lambda} f(x)$, $(\forall)$ $x \in [c, b)$ și deci $g(x) = O(f(x))$, $x \nearrow b$, prin urmare $\int_a^{b-} g$ este convergentă.

3° Rezultă din 1° și 2°.

Funcția g din Cor. 1 cu ajutorul căreia stabilim natura integralei $\int_a^{b-} f$, se numește *funcția de comparație*. Să considerăm mai departe două cazuri particulare pentru g, după cum intervalul $[a, b)$ este mărginit sau nemărginit.

Corolar 2. *Fie* $-\infty < a < b < +\infty$ *și* $f : [a, b) \to \mathbf{R}_+$ *o funcție local integrabilă. Atunci :*

1° *Dacă* $(\exists)$ $0 < p < 1$ *a.î.* $\lim\limits_{x\nearrow b} (b - x)^p f(x)$ *există și este diferită de* ∞, *rezultă că* $\int_a^{b-} f$ *este convergentă;*

2° *Dacă* $(\exists)$ $1 \leqslant p < \infty$ *a.î.* $\lim\limits_{x\nearrow b} (b - x)^p f(x)$ *există și este diferită de* 0, *rezultă că* $\int_a^{b-} f$ *este divergentă.*

Dem. Aplicăm T. 11.2.2. pentru funcțiile f și g, unde $g(x) = \dfrac{1}{(b - x)^p}$, $x \in [a, b)$, cu $p > 0$, ținînd cont (P. 11.1.2.(1°)) că $\int_a^b \dfrac{dx}{(b - x)^p}$ este convergentă, dacă $0 < p < 1$ și divergentă, dacă $1 \leqslant p < +\infty$.

Corolar 3. *Fie* $-\infty < a \leqslant c \leqslant b < +\infty$ *și* $f : [a, b] \setminus \{c\} \to \mathbf{R}$ *o funcție local integrabilă. Atunci :*

1° *Dacă* $(\exists)$ $0 < p < 1$ *a.î.* $\lim\limits_{x\to c} |x - c|^p \cdot f(x)$ *există și este diferită de* ∞, *rezultă că integrala improprie* $\int_a^b f$ *este convergentă;*

2° *Dacă* $(\exists)$ $1 \leqslant p < \infty$ *a.î.* $\lim\limits_{x\to c} |x - c|^p f(x)$ *există și este diferită de* 0, *rezultă că integrala improprie* $\int_a^b f$ *este divergentă.*

Dem. Aplicăm Cor. 2 pe intervalele $[a, c)$ și $(c, b]$.

Corolar 4. *Fie* $a \in \mathbf{R}$ *și* $f : [a, \infty) \to \mathbf{R}_+$ *o funcție local integrabilă. Atunci :*

1° *Dacă* $(\exists)\ 1 < p < \infty$ *a.î.* $\lim\limits_{x\to\infty} x^p f(x)$ *există și este diferită de* ∞, *rezultă că* $\int_a^\infty f$ *este convergentă*;

2° *Dacă* $(\exists)\ 0 \leqslant p \leqslant 1$ *a.î.* $\lim\limits_{x\to\infty} x^p f(p)$ *există și este diferită de* 0, *rezultă că* $\int_a^\infty f$ *este divergentă.*

Dem. Dacă $a<0$, din P.11.1.3. rezultă că $\int_a^\infty f$ este convergentă (resp. divergentă) $\Leftrightarrow \int_1^\infty f$ este convergentă (resp. divergentă). Aşadar putem presupune $a > 0$. Aplicăm mai departe Cor. 1 pentru funcţiile f şi g, unde $g(x) = \frac{1}{x^p}$, $x \in [a, \infty)$, cu $p > 0$, ţinînd cont (P.11.1.2. (2°)) că $\int_a^\infty \frac{dx}{x^p}$ este convergentă, dacă $p > 1$ şi divergentă, dacă $0 < p \leqslant 1$.

Corolar 5. *Fie* $-\infty < a < b \leqslant \infty$ *şi* $f, g : [a, b) \to \mathbf{R}$ *două funcţii local integrabile cu* $g \geqslant 0$. *Dacă* $(\exists)\ M > 0$ *a.î.* $|f(x)| \leqslant M\, g(x)$, $(\forall)\ x \in [a, b)$ *şi integrala* $\int_a^{b-} g$ *este convergentă atunci* $\int_a^{b-} f$ *este absolut convergentă şi avem*: $\left|\int_a^{b-} f\right| \leqslant M \int_a^{b-} g$.

Exemplul 1. *Integrala improprie* $\int_{0+}^1 \ln x\, dx$, *este convergentă.*

Într-adevăr, $(\forall)\ p \in (0, 1)$, avem $\lim\limits_{x\searrow 0} x^p \ln x = 0$.

Exemplul 2. *Integrala improprie* $\int_0^{1-} \frac{dx}{1 - x^4}$ *este divergentă.*

Într-adevăr, pentru $p = 1$, avem:

$$\lim_{x\nearrow 1} (1 - x)^p \frac{1}{1 - x^4} = \lim_{x\nearrow 1} \frac{1}{(1 + x)(1 + x^2)} = \frac{1}{4}$$

Exemplul 3. *Integralele improprii* $\int_{0+}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^p x}$, şi $\int_{-1}^1 \frac{dx}{(\operatorname{arc\,tg} x)^p}$ $(p > 0)$, *sînt convergente, dacă* $0 < p < 1$ *şi divergente, dacă* $1 \leqslant p < +\infty$.

Într-adevăr, avem $\lim\limits_{x\searrow 0} x^p \frac{1}{\sin^p x} = 1$ şi $\lim\limits_{x\searrow 0} x^p \frac{1}{(\operatorname{arc\,tg} x)^p} = 1$, $(\forall) p > 0$. Aplicăm mai departe Cor. 2.

Exemplul 4. *Integrala improprie* $\int_1^\infty \frac{\ln x}{1 + x^\alpha}$ *este convergentă dacă* $\alpha > 2$

Într-adevăr, fie $1 < p < \frac{\alpha}{2}$ fixat; atunci avem:

$$\lim_{x\to\infty} x^p \frac{\ln x}{\sqrt{1 + x^\alpha}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^{\alpha/2-p}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + x^{-\alpha}}} = 0 \cdot 1 = 0,$$

deoarece $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^m} = 0$, $(\forall)\ m \in \mathbf{R}_+^*$. Aplicăm mai departe Cor. 4 (1°).

11.2.3. Teoremă (C a u c h y). *Fie* $-\infty < a < b \leqslant +\infty$ *şi* $f : [a, b) \to \mathbf{R}$ *o funcţie local integrabilă. Atunci* $\int_a^{b-} f$ *este convergentă* $\Leftrightarrow (\forall)\ \varepsilon > 0$, $(\exists)\ c \in [a, b)$ *a.î.* $\left|\int_J f\right| \leqslant \varepsilon$, $(\forall)\ J \subseteq [c, b)$, J *interval compact.*

Dem. Fie $F(t) = \int_a^t f$, $t \in [a, b)$. Atunci $\int_a^{b-} f$ este convergentă $\Leftrightarrow F(b-)$ există şi este finită. Însă din T. 5.3.10. avem $(\exists)\ F(b-)$ finită $\Leftrightarrow (\forall)\ \varepsilon > 0$, $(\exists)\ c \in [c, b)$ a.î. $|F(t) - F(t')| < \varepsilon$, $(\forall) t, t' \in [c, b) \Leftrightarrow (\forall)\varepsilon > 0 (\exists)\ c \in [a, b)$ a.î. $\left|\int_t^{t'} f\right| < \varepsilon$, $(\forall)\ t, t' \in [c, b) \Leftrightarrow (\forall)\ \varepsilon > 0$. $(\exists)\ c \in [a, b)$ a.î. $\left|\int_J f\right| < \varepsilon$, $(\forall)\ J \subseteq [c, b)$, J interval compact.

Corolar 1. *Fie* $-\infty < a < b \leqslant +\infty$ *şi* $f : [a, b) \to \mathbf{R}$ *o funcţie local integrabilă. Dacă* $\int_a^{b-} f$ *este absolut convergentă, atunci ea este convergentă.*

Dem. Să observăm în prealabil că $|f|$ este local integrabilă (cf. P. 9.2.9.). Fie mai departe $\varepsilon > 0$ fixat; cf. P.11.2.3. $(\exists) c \in [a, b)$ a.î. $\int_J |f| < \varepsilon$, $(\forall)\ J \subseteq [c, b)$, J interval compact.

Atunci (P.9.2.9.) $\left|\int_J f\right| \leqslant \int_J |f| < \varepsilon$, deci (T.11.2.3.) $\int_a^{b-} f$ este convergentă.

Corolar 2. *Fie* $-\infty < a < b \leqslant +\infty$ *şi* $f : [a, b) \to \mathbf{R}$ *o funcţie local integrabilă. Atunci integrala* $\int_a^{b-} f$ *este convergentă* $\Leftrightarrow (\forall)/(\exists)\ a_n, b_n \in [a, b)$, $a_n \to b$, $b_n \to b$, *avem* $\int_{a_n}^{b_n} f \to 0$ $(n \to \infty)$.

Observaţie. Reciproca Cor. 1 nu este numaidecît adevărată.

Contraexemplu. Fie $f : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$ o funcţie definită astfel $f(0) = 1$ şi $f(x) = (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$, dacă $x \in (n-1, n]$ şi $n \in \mathbf{N}$. Atunci $\int_0^{\infty} f$ este convergentă şi nu este absolut convergentă : $\int_0^{\infty} f = \sum_{n \geqslant 1} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$ şi $\int_0 |f| = \sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n} = +\infty$

11.2.4. Teoremă (A b e l - D i r i c h l e t). *Fie* $-\infty < a < b \leqslant +\infty$ *şi* $f, g : [a, b) \to \mathbf{R}$ *două funcţii cu proprietăţile :*

1° g *monoton descrescătoare şi* $g(b-) = 0$;

2° $M := \sup_{t \in [a, b)} \left|\int_a^t f\right| < +\infty$.

Atunci integrala $\int_a^{b-} (fg)$ *este convergentă.*

Dem. Aplicînd T. 9.2.2., din 2° rezultă imediat că $\left|\int_c^d f\right| \leqslant 2M$, $(\forall) c, d \in [a, b)$. Fie mai departe $\varepsilon > 0$ fixat. Deoarece $g(b-) = 0$, $(\exists)\ d \in [a, b)$ a.î. $|g(x)| \leqslant \varepsilon/4M$, $(\forall)\ x \in [d, b)$. Fixăm $\alpha, \beta \in [d, b)$, $\alpha < \beta$; atunci (T. 3.2.12) $(\exists)\ \xi \in [\alpha, \beta]$ cu proprietatea

$$\int_\alpha^\beta (fg) = g(\alpha) \cdot \int_\alpha^\xi f + g(\beta) \cdot \int_\xi^\beta f,$$

deci

$$\left|\int_\alpha^\beta (fg)\right| \leqslant |g(\alpha)|\cdot\left|\int_\alpha^\xi f\right| + |g(\beta)|\cdot\left|\int_\xi^\beta f\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{4M}\cdot 2M + \frac{\varepsilon}{4M}\cdot 2M = \varepsilon$$

Prin urmare $(\forall)\ \varepsilon > 0$, $(\exists)\ d \in [a, b)$ a.î. $\left|\int_\alpha^\beta (fg)\right| \leqslant \varepsilon$, $(\forall)\ \alpha, \beta\ [d, b)$, deci (T.11.2.3.) $\int_a^{b-} (fg)$ este integrabilă.

Corolar 1. *Fie* $-\infty < a < b \leqslant +\infty$ *şi* $f, g : [a, b) \to \mathbf{R}$ *două funcţii cu proprietăţile* :

1° g *monoton descrescătoare şi mărginită i.e.* $g(b-) \in \mathbf{R}$;

2° *Integrala* $\int_a^{b-} f$ *este convergentă.*

Atunci integrala $\int_a^{b-} (fg)$ *este convergentă.*

Dem. Fie $\lambda := g(b-)$. Din 1° rezultă că $g - \lambda$ este monoton descrescătoare şi $\lim_{x \nearrow b}(g - \lambda)(x) = 0$, deci (T. 11.2.4.) integrala $\int_a^{b-} f(g - \lambda)$ este convergentă. Din 2° şi din P. 11.1.7. Cor. 1. rezultă că integrala $\int_a^{b-} (\lambda f)$ este convergentă. Atunci (P. 11.1.7.). integrala $\int_a^b (fg)$, care este egală cu suma integralelor $\int_a^{b-} f(g - \lambda)$ şi $\int_a^{b-} (\lambda f)$, este convergentă.

Corolar 2. *Fie* $-\infty < a < b \leqslant +\infty$ *şi* $f, g : [a, b) \to \mathbf{R}$ *două funcţii cu proprietăţile* :

1° g *monoton descrescătoare şi* $g(b-) = 0$;

2° f *continuă şi posedă o primitivă mărginită.*

Atunci integrala $\int_a^{b-} (fg)$ *este convergentă.*

Dem. Fie $F(t) := \int_a^t f$, $t \in [a, b)$. Atunci (T. 9.3.1. Cor. 1) F este o primitivă a lui f. Cum f posedă, prin ipoteză, o primitivă mărginită şi orice două primitive ale lui f diferă între ele printr-o constantă (P. 8.1.12), rezultă că F este mărginită. Aceasta înseamnă că $(\exists)\ M > 0$ a.î. $|F(t)| \leqslant M$, $(\forall)\ x \in [a,b)$, deci $\left|\int_a^t f\right| \leqslant M$, $(\forall)\ t \in [a, b)$. Aplicăm mai departe T.11.2.4.

Observaţie. Dacă funcţiile f şi g din T.11.2.4. au proprietăţi suplimentare, spre exemplu f continuă şi g de clasă $\mathcal{C}^1$, atunci demonstraţia teoremei Abel-Dirichlet se poate face şi fără a utiliza a doua teoremă de medie.

Într-adevăr, fie $F(t) = \int_a^t f$, $t \in [a, b)$. Evident $|F(t)| \leqslant M$, $(\forall)\ t \in [a, b)$ şi $F' = f$ (T.9.3.1. Cor. 1), deci (T. 9.3.4.) avem :

$$\int_a^t (fg) = (gF)\Big|_a^t - \int_a^t (Fg'),\ (\forall)\ t \in [a, b] \tag{1}$$

Cum $g(b-)=0$, rezultă $(gF)(b-)=0$. Mai departe, deoarece g este monoton descrescătoare și $g(b-)=0$, rezultă (T.5.5.18. Cor. 3) $g \geqslant 0$, iar din T.6-3.4. Cor. 1 rezultă $g' \leqslant 0$, deci $|g'| = -g'$ și deci (P.9.2.9.) :

$$\int_a^t |Fg'| \leqslant M \int_a^t |g'| = M \int_a^t (-g') = M(g(a) - g(t)) \leqslant Mg(a)$$

Așadar $\sup\limits_{t\in[a,b)} \int_a^t |Fg'| < +\infty$, deci (P. 11.1.4.(4°)) integrala $\int_a^{b-} (Fg')$ este absolut convergentă și deci (T. 11.2.3.Cor.1) este convergentă.

Atunci din (1) prin trecere la limita, $t \nearrow b$, deducem :

$$\lim_{t\nearrow b} \int_a^t (fg) = -(gF)(a) - \int_a^{b-} (Fg') \in \mathbf{R} \text{ etc.}$$

Exemplul 1. $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx$ *este convergentă.*

Într-adevăr, integrala $\int_{0+}^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ este convergentă : aplicăm P. 11.1.5. Cor. 1, ținînd cont că $\lim\limits_{x\searrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Mai departe, din T. 11.2.4. aplicată funcțiilor $f(x)=\sin x$, $x \in [1, \infty)$ și $g(x) = \frac{1}{x}$, $x\in[1, 0)$, rezultă că $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx$ este convergentă. Prin urmare $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx$ este convergentă.

Exemplul 2. *Integralele* $\int_0^\infty e^{-x} \sin x\, dx$, $\int_0^\infty e^{-x} \cos x\, dx$ *sînt convergente.*

Aplicăm ca și mai sus T. 11.2.4. pentru funcțiile $f(x)=\sin x$, $x \in \mathbf{R}_+$ și $g(x) = e^{-x}$, $x \in \mathbf{R}_+$ etc.

11.2.5. Lemă. *Fie* $a \geqslant 0$ *și* $f : [a, \infty) \to \mathbf{R}_+$ *o funcție monoton descrescătoare. Atunci avem* :

$$\int_n^{n+p+1} f \leqslant \sum_{k=n}^{n+p} f(k) \leqslant \int_{n-1}^{n+p} f, \quad (\forall)\ n \in \mathbf{N},\ n \geqslant a+1,\ (\forall)\ p \in \mathbf{N}_0$$

Dem. f fiind monotonă, este integrabilă pe orice interval compact inclus în $[a, \infty)$ și avem inegalitățile : $\int_{n-1}^{n+1} f \geqslant f(n) \geqslant \int_n^{n+1} f$, pentru orice $n \in \mathbf{N}$, $n \geqslant 1+a$. Așa dar $(\forall)\ n \in \mathbf{N}$, $n \geqslant 1+a$, $(\forall)\ p \in \mathbf{N}_0$, avem :

$$\int_{n-1}^{n} f \geqslant f(n) \geqslant \int_n^{n+1} f$$

$$\int_n^{n+1} f \geqslant f(n+1) \geqslant \int_{n+1}^{n+2} f$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\int_{n+p-1}^{n+p} f \geqslant f(n+p) \geqslant \int_{n+p}^{n+p+1} f$$

Adunînd inegalitățile de mai sus și ținînd seama că integrala este aditivă ca funcție de interval (T. 9.2.2.), obținem :

$$\int_{n-1}^{n+p} f \geqslant \sum_{k=n}^{n+p} f(k) \geqslant \int_{n}^{n+p+1} f$$

11.2.6. Teoremă (C a u c h y-M a c l a u r i n). *Fie* $a \geqslant 0$ *și* $f:[a, \infty) \to \mathbf{R}_+$ *o funcție monoton descrescătoare. Atunci integrala improprie* $\int_a^\infty f$ *este convergentă* $\Leftrightarrow$ *seria* $\sum_{n>E(a)} f(n)$ *este convergentă.*

Dem. Fie $n_0 \in \mathbf{N}$, $n_0 \geqslant a+1$, fixat. Atunci cf. Lemei putem scrie

$$0 \leqslant \int_{n_0}^{n_0+p+1} f \leqslant \sum_{k=n_0}^{n_0+p} f(k) \leqslant \int_{n_0-1}^{n_0+p} f, \ (\forall)\ p \in \mathbf{N}_0, \tag{1}$$

deci

$$\sup_{p\geqslant 0} \sum_{k=n_0}^{n_0+p} f(k) < +\infty \overset{(1)}{\Rightarrow} \sup_{p\geqslant 0} \int_{n_0}^{n_0+p+1} f < +\infty \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sup_{p\geqslant 0} \int_{n_0-1}^{n_0+p} f < +\infty \overset{(1)}{\Rightarrow} \sup_{p\geqslant 0} \sum_{k=n_0}^{n_0+p} f(k) < +\infty$$

și deci

$$\sup_{p\geqslant 0} \sum_{k=n_0}^{n_0+p} f(k) < +\infty \Leftrightarrow \sup_{p\geqslant 0} \int_{n_0}^{n_0+p} f < +\infty \tag{2}$$

Atunci (P. 11.1.4. și P. 11.1.3.). avem : seria $\sum_{n\geqslant n_0} f(n)$ este convergentă $\Leftrightarrow$ șirul $\left(\sum_{k=n_0}^{n_0+p} f(k)\right)_{p\geqslant 0}$ este majorat $\overset{(2)}{\Leftrightarrow}$ șirul $\left(\int_{n_0}^{n_0+p} f\right)_{p\geqslant 0}$ este majorat $\Leftrightarrow$ integrala improprie $\int_{n_0}^\infty f$ este convergentă $\Leftrightarrow$ integrala improprie $\int_a^\infty f$ este convergentă.

Corolar 1. *Fie* $f: \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ *o funcție monoton descrescătoare. Atunci integrala improprie* $\int_0^\infty f_n$ *este convergentă* $\Leftrightarrow$ *seria* $\sum_{n\geqslant 1} f(n)$ *este convergentă* $\Leftrightarrow$ *șirul* $\left(\int_0^n f\right)_{n\geqslant 1}$ *este convergent.*

Corolar 2. *Fie* $a \geqslant 0$ *și* $f:[a, \infty) \to \mathbf{R}_+$ (*resp.* $f:(a, \infty) \to \mathbf{R}_+$) *o funcție monoton descrescătoare. Atunci* $(\forall)$ $n_0 \geqslant a+1$ (*resp.* $n_0 > a+1$) *avem inegalitățile* :

$$\int_{n_0}^\infty f \leqslant \sum_{n\geqslant n_0} f(n) \leqslant \int_{n_0-1}^\infty f$$

Dem. Fixăm în Lemă $n = n_0$ și trecem la limită după p, $p \to \infty$.

Corolar 3. (D i r i c h l e t). *Seria armonică generalizată* $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ $(\alpha \in \mathbf{R})$ *este convergentă dacă* $\alpha > 1$ *și divergentă dacă* $\alpha \leqslant 1$. *Dacă* $\alpha > 1$, *avem inegalitățile* :

$$\frac{1}{(\alpha-1)\, n_0^{\alpha-1}} \leqslant \sum_{n\geqslant n_0} \frac{1}{n^\alpha} \leqslant \frac{1}{(\alpha-1)(n_0-1)^{\alpha-1}}, \ (\forall)\ n_0 \geqslant 1$$

Dem. Fie $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ $x \in [a, \infty)$, unde a este fixat în intervalul $(0,1)$. Atunci f este strict descrescătoare şi avem $\int_a^\infty f = \int_a^\infty \frac{dx}{x^\alpha}$ care este convergentă, pentru $\alpha > 1$ şi divergentă (egală cu $+\infty$), dacă $\alpha \leqslant 1$. Din T. 11.2.6. deducem că seria $\sum_{n\geqslant 0} f(n)$ e ste convergentă, dacă $\alpha > 1$ şi divergentă, dacă $\alpha \leqslant 1$.

Observaţia 1. Cor. 2 ne permite să calculăm valoarea aproximativă a sumei seriei $\sum_{n\geqslant n_0} f(n)$ şi anume : $\sum_{n\geqslant n_0} f(n) \approx \int_{n_0}^\infty f$, cu o eroare prin lipsă $\leqslant \int_{n_0-1}^{n_0} f$.

Observaţia 2. Fie $f : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ o funcţie definită astfel $f(x) = 1$, dacă $x \in [0, 1]$, $f(x) = \frac{1}{x}$, dacă $x \in (1, \infty) \setminus \mathbf{N}$ şi $f(n) = \frac{1}{n}$, dacă $n \in \mathbf{N}$. Atunci $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, seria $\sum_{n\geqslant 1} f(n)$ este convergentă şi integrala $\int_0^\infty f$ este divergentă :

$$\int_0^t f = \int_0^1 dx + \int_1^t \frac{dx}{x} = 1 + \ln t, \ (\forall)\ t \geqslant 1 \text{ etc.}$$

Prin urmare condiţia de monotonie a funcţiei f din T. 11.2.6. este esenţială.

11.3. Exemple de integrale improprii remarcabile. Complemente

11.3.1. Exemple de integrale improprii

Exemplul 1. *Să se calculeze integrala* $\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+1)^n}$ $(n \in \mathbf{N})$.

Fie $F_n(x) := \int \frac{dx}{(x^2+1)^n}$ $(x \in \mathbf{R})$ şi $L_n := \int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+1)^n}$.

Din P.8.4.3. rezultă relaţia :

$$F_n(x) = \frac{1}{2n-2} \cdot \frac{x}{(x^2+1)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2} F_{n-1}(x), \quad (\forall)\ x \in \mathbf{R},$$

deci

$$L_n = \frac{1}{2n-2} \cdot \frac{x}{(x^2+1)^{n-1}}\Big|_0^\infty + \frac{2n-3}{2n-2} \int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+1)^{n-1}}$$

şi deci $L_n = \frac{2n-3}{2n-2} L_{n-1}$, de unde deducem imediat relaţia :

$$L_n = \frac{2n-3}{2n-2} \cdot \frac{2n-5}{2n-4} \cdots \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} L_1 = \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!} \cdot \frac{\pi}{2}$$

Exemplul 2. *Să se calculeze integrala* $\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+a_1^2)\ldots(x^2+a_n^2)}$, *unde* $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbf{R}_+^*$ *şi* $a_i \neq a_j$ $(i \neq j)$.

Considerăm funcţia raţională $R(x) = \dfrac{1}{(x+a_1^2)\ldots(x+a_n^2)}$ care se descompune în fracţii simple (T.4.9.9.) :

$$R(x) = \frac{C_1}{x+a_1^2} + \frac{C_2}{x+a_2^2} + \ldots + \frac{C_n}{x+a_n^2} \quad (C_i - \text{constante}),$$

unde (P.7.3.15.) $C_j = \dfrac{1}{\prod\limits_{i \neq j} (a_i^2 - a_j^2)}$ $(j = \overline{1,\ n})$. Atunci

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a_1^2)\ldots(x^2+a_n^2)} = \sum_{j=1}^n C_i \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^2+a_j^2} = \sum_{j=1}^n \frac{C_j}{a_j} \cdot \frac{\pi}{2}$$

Exemplul 3. *Să se calculeze integrala* $\int_0^\infty \mathrm{e}^{\lambda x} P(x)\mathrm{d}x$, *dacă* $P \in \mathbf{R}[X]$ *şi* $\lambda \in \mathbf{R}^*$.

Fie $P(x) = \sum\limits_{k=0}^n a_k x^k$, $x \in \mathbf{R}$. Am văzut (P. 8.6.2.) că

$$\int \mathrm{e}^{\lambda x} P(x)\ \mathrm{d}x = \mathrm{e}^{\lambda x} Q(x) \quad (\forall)\ x \in \mathbf{R},$$

unde $Q \in \mathbf{R}[X]$, $Q(x) = \sum\limits_{k=0}^n b_k x^k$, cu b_k determinaţi prin relaţiile :

$$a_n = \lambda b_n;\ a_k = \lambda b_k + (k+1)b_{k+1} (k = \overline{0,\ n-1}) \qquad (1)$$

Atunci

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{\lambda x} P(x)\mathrm{d}x = \lim_{x \to \infty} \frac{Q(x)}{\mathrm{e}^{-\lambda x}} - Q(0) = -Q(0) = -b_0$$

De asemenea, prin derivare directă, se poate verifica relaţia :

$$\int \mathrm{e}^{-x} P(x)\ \mathrm{d}x = -\mathrm{e}^{-x}(P(x) + P'(x) + \ldots + P^{(n)}(x)),\ (\forall)\ x \in \mathbf{R},$$

eci ţinînd seama că $\lim\limits_{x \to \infty} \mathrm{e}^{-x} P^{(k)}(x) = 0$, $(\forall)\ k = \overline{0,\ n}$, obţinem relaţia

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x} P(x)\ \mathrm{d}x = \sum_{k=0}^n P^{(k)}(0).$$

Exemplul 4 (E u l e r). *Să se calculeze integralele improprii* $\int_0^1 \dfrac{\ln(1 \pm x)}{x}\ \mathrm{d}x$ $\int_0^1 \dfrac{\ln x}{1 \pm x}\ \mathrm{d}x$.

Plecăm de la relaţia (P. 12.5.7.) :

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{} x^n + \ldots,\ x \in (-1,\ 1] \qquad (1)$$

Prelungind prin continuitate în 0 (T.5.5.23.) funcția $(-1,1]\setminus\{0\}\ni x\mapsto \frac{\ln(1+x)}{x}$,

din (1) rezultă relația :

$$\frac{\ln(1+x)}{x}=1-\frac{x}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^{n-1}+\ldots x\in(-1,1] \qquad (2)$$

Din T. 12.3.11. Cor. 3 rezultă că putem integra relația (2) termen cu termen pe $[0, 1]$ și obținem :

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}\,dx=\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\cdot\frac{x^n}{n}\Big|_0^1=\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$$

Ținînd seama că $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$, rezultă

$$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{(2n-1)^2}+\sum_{n\geq 1}\frac{1}{(2n)^2}=\frac{\pi^2}{6},$$

deci

$$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{6}-\frac{1}{4}\cdot\frac{\pi^2}{6}=\frac{\pi^2}{8}$$

și deci

$$\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}=-\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}+2\sum_{n\geq 1}\frac{1}{(2n-1)^2}=-\frac{\pi^2}{6}+2\,\frac{\pi^2}{8}=\frac{\pi^2}{12}$$

Prin urmare $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}\,dx=\frac{\pi^2}{12}$

Evident avem :

$$\int_0^1\frac{\ln(1-x)}{x}\,dx+\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{x}\,dx=\int_0^1\frac{\ln(1-x^2)}{x}=\frac{1}{2}\int\frac{\ln(1-t)}{t}\,dt,$$

deci

$$\frac{1}{2}\int_0^1\frac{\ln(1-x)}{x}\,dx+\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{x}=0\Leftrightarrow\int_0^1\frac{\ln(1-x)}{x}\,dx=-\frac{\pi^2}{6}$$

Pentru calculul integralei $\int_0^1\frac{\ln x}{1-x}\,dx$ facem schimbarea de variabilă

$x=1-t$, $t\in(0,1)$; obținem (cf. T. 11.1.10) :

$$\int_0^1\frac{\ln x}{1-x}\,dx=\int_0^1\frac{\ln(1-t)}{t}(-dt)=\int_0^1\frac{\ln(1-t)}{t}\,dt \text{ etc.}$$

În fine, utilizînd T. 11.1.9. deducem :

$$\int_0^1\underbrace{\ln x}_{u}\cdot\underbrace{\frac{dx}{1+x}}_{dv}=\ln x\cdot\ln(1+x)\Big|_0^1-\int_0^1\frac{1}{x}\ln(1+x)\,dx$$

Cum avem

$$\ln x \cdot \ln (1+x)\Big|_0^1 = \lim_{x \searrow 0} (\ln x \cdot \ln (1+x)) = \lim_{x \searrow 0} (x \ln x \cdot \ln(1+k)^{\frac{1}{x}} = 0,$$

conchidem că

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x}\,dx = -\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}\,dx = -\frac{\pi^2}{12}.$$

Exemplul 5 (Lobacevski). *Fie* $\varphi : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbf{R}$ *o funcție definită astfel* $\varphi(x) = -\int_0^x \ln \cos t\,dt$. *Atunci are loc relația*:

$$\varphi(x) = 2\varphi\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right) - 2\varphi\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right) - x \ln 2, \quad (\forall)\ x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

Să arătăm că integrala improprie $\int_0^{\pi/2} \ln \cos t\,dt$ este convergentă.

Într-adevăr, $(\forall)$ pe $p \in (0, 1)$, aplicînd T.6.4.3. deducem:

$$\lim_{t \nearrow \frac{\pi}{2}} \left|t - \frac{\pi}{2}\right|^p \ln \cos t = \lim_{\theta \searrow 0} \frac{\ln \sin \theta}{\theta - p} =$$

$$= \lim_{\theta \searrow 0} \frac{\frac{\cos \theta}{\sin \theta}}{-p\theta^{-p-1}} = \lim_{\theta \searrow 0} \left(-\frac{1}{p}\right)\left(\frac{\theta}{\sin \theta}\right) \theta^p \cos \theta = 0,$$

deci (T.11.2.2. Cor.3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \cos t\,dt$ este convergentă.

Deoarece $\varphi(-x) = \varphi(x)$, $(\forall)\ x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{x}\right)$, rezultă că și integrala $\int_0^{-\pi/2} \ln \cos t\,dt$ este convergentă.

Așadar $\varphi\left(\pm\frac{\pi}{2}\right)$ are sens și $\varphi\left(\pm\frac{\pi}{2}\right) \in \mathbf{R}$. Cum evident $\varphi(x)$ are sens și pentru $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, rezultă că φ este corect definită.

Mai departe, logaritmînd relația evidentă

$$\cos t = 2 \cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{t}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{t}{2}\right), \quad t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),$$

avem

$$\ln \cos t = \ln \cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{t}{2}\right) + \ln \cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{t}{2}\right) + \ln 2, t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),$$

de unde prin integrare pe $[0, x]$ cu $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, obținem:

$$\int_0^x \ln \cos t\,dt = \int_0^x \ln \cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{t}{2}\right)dt + \int_0^x \ln \cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{t}{2}\right)dt + x \ln 2.$$

Cu substituția $y=\frac{\pi}{4}+\frac{t}{2}\left(\text{resp. } y=\frac{\pi}{4}-\frac{t}{2}\right)$, $t\in[0,\ x]$, a doua (resp. a treia) integrală din (1) devine:

$$\int_0^x \ln\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{t}{2}\right)\mathrm{d}t=2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}}\ln\cos y\,\mathrm{d}y$$

$$\text{resp } \int_0^x \ln\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{t}{2}\right)\mathrm{d}t=-2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}}\ln\cos y\,\mathrm{d}y,$$

deci relația (1) se poate scrie sub forma:

$$\varphi(x)=-2\varphi\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)+2\varphi\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)+x\ln 2,(\forall)x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\quad(2)$$

În fine, trecînd în (2) la limită $x\nearrow\frac{\pi}{2}\left(\text{resp. } x\searrow-\frac{\pi}{2}\right)$, obținem că (2) este adevărată, $(\forall)\ x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ etc.

Corolar 1.

$$\int_0^{\pi/2}\ln\sin t\,\mathrm{d}t=\int_0^{\pi/2}\ln\cos t\,\mathrm{d}t=-\frac{\pi}{2}\ln 2$$

Într-adevăr avem $\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right)=2\varphi\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)-2\varphi(0)-\frac{\pi}{2}\ln 2$, deci $\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}\ln 2$ etc.

***Exemplul* 6.** *Să se calculeze integrala* $\int_0^1\frac{x^n\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$ $(n\in\mathbf{N})$.

Cu schimbarea de variabilă $x=\sin t$, $t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$, rezultă (T.11.1.10):

$$L_n:=\int_0^1\frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^n t}{\sqrt{1-\sin^2 t}}\cos t\,\mathrm{d}t=\int_0^{\pi/2}\sin^n t\,\mathrm{d}t,$$

pe care am calculat-o mai înainte (9.4.1. Exemplul 11):

$$L_{2k}=\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\cdot\frac{\pi}{2},\ L_{2k+1}=\frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}$$

Atunci $\frac{L_n}{L_{n+2}}=\frac{2k+1}{2k+2}$, dacă $n=2k$ și $\frac{L_n}{L_{n+2}}=\frac{2k+2}{2k+3}$, dacă $n=2k+1$, deci $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{L_n}{L_{n+2}}=1$ (1). Deoarece $x^{n+1}\leqslant x^n$, $(\forall)x\in[0,1)$, rezultă imediat că șirul $(L_n)_{n\geqslant 1}$ este monoton descrescător, deci $\frac{L_n}{L_{n+2}}\geqslant\frac{L_n}{L_{n+1}}\geqslant 1$, $(\forall)\ n\geqslant 1$ (2). Din (2) prin trecere la limită, $n\to\infty$, rezultă, ținînd seama de (1), că $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{L_n}{L_{n+1}}=1$ (3). Înlocuind în (3) pe

L^u (resp. L_{n+1}) cu L_{2k} (resp. L_{2k+1}) dedus mai sus, obținem :

$$\lim_{k\to\infty}\left[\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!}\right]^2\cdot\frac{1}{2k+1}=\lim_{k\to\infty}\frac{\pi}{2}\cdot\frac{L_{2k+1}}{L_{2k}}=\frac{\pi}{2}$$

Corolar 1 (*Formula lui Wallis*). *Să se arate relațiile* :

$$1^\circ\ \left[\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!}\right]^2\frac{1}{2k+1}<\frac{\pi}{2}<\left[\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!}\right]^2\cdot\frac{1}{2k},\ (\forall)k\geqslant 1;$$

$$2^\circ\ \lim_{k\to\infty}\left[\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!}\right]^2\cdot\frac{1}{2k+1}=\frac{\pi}{2};$$

$$3^\circ\ \prod_{n\geqslant 1}\left(1-\frac{1}{4n^2}\right)=\frac{2}{\pi}.$$

Într-adevăr, înlocuind în inegalitățile $L_{2k+1}<L_{2k}<L_{2k-1}(k\geqslant 1)$ expresiile lui L_{2k+1}, L_{2k} și L_{2k-1}, deduse mai sus, obținem :

$$\frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}\cdot<\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\cdot\frac{\pi}{2}<\frac{(2k-1)!!}{(2k-1)}\ \text{etc.}$$

În fine, din 2°, dedus mai înainte, rezultă

$$\frac{2}{\pi}=\lim_{k\to\infty}\left[\frac{(2k-1!!)}{(2k)!!}\right]^2(2k+1)=\lim_{k\to\infty}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}\cdots\frac{2k-1}{2k}\cdot\frac{2k+1}{2k}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\prod_{j=1}^{n}\frac{2j-1}{2j}\cdot\frac{2j+1}{2j}=\lim_{k\to\infty}\prod_{j=1}^{k}\left(1-\frac{1}{4j^2}\right)=\prod_{k\geqslant 1}\left(1-\frac{1}{4k^2}\right)$$

Exemplul 7. *Să se arate că integrala* $\int_0^\infty\frac{\operatorname{arc\,tg}\,x}{x}\,dx$ *este divergentă și egală cu* $+\infty$, *în timp ce integrala* $\int_0^\infty\left(\frac{\operatorname{arc\,tg}\,x}{x}\right)^2dx$ *este convergentă și egală cu* $\pi\ln 2$.

Fixăm $n\in\mathbf{N}$. Deoarece (5.1.16 (1°)) $\lim_{x\searrow 0}\left(\frac{\operatorname{arc\,tg}\,x}{x}\right)^n=1$, rezultă (P.11.1.5. Cor. 1) că integrala $\int_0^1\left(\frac{\operatorname{arc\,tg}\,x}{x}\right)^n dx$ este convergentă.

Pe de altă parte $\lim_{x\to\infty}x\cdot\left(\frac{\operatorname{arc\,tg}\,x}{x}\right)=\frac{\pi}{2}$, deci (T.11.2.2. Cor.4) integrala $\int_1^\infty\frac{\operatorname{arc\,tg}\,x}{x}\,dx$ este divergentă și deci integrala $\int_0^\infty\frac{\operatorname{arc\,tg}\,x}{x}\,dx$ este divergentă.

Cum $\frac{\operatorname{arc\,tg}\,x}{x}>0$, $(\forall)\ x\in\mathbf{R}_+$, conchidem (P. 11.1.4.) că $\int_0^\infty\frac{\operatorname{arc\,tg}\,x}{x}\,dx=+\infty$

Mai departe să facem substituția $y=\operatorname{tg}\,x$, $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$; obținem :

$$\int_0^\infty\left(\frac{\operatorname{arc\,tg}\,x}{x}\right)^2dx=\int_0^{\pi/2}\left(\frac{y}{\operatorname{tg}\,y}\right)^2\frac{dy}{\sin^2y}=\int_0^{\pi/2}\underbrace{y^2}_{u}\underbrace{\frac{dy}{\sin^2y}}_{dv}=$$

$$=-y^2\operatorname{ctg}\,y\Big|_0^{\pi/2}+2\int_0^{\pi/2}y\operatorname{ctg}\,y\,dy$$

Deoarece

$$y^2 \operatorname{ctg} y \Big|_0^{\pi/2} = 0 + \lim_{y \searrow 0} \left(\frac{y}{\sin y} \right)^2 \cos^2 y = 0$$

și

$$\int_0^{\pi/2} \underbrace{y}_{u} \underbrace{\operatorname{ctg} y \, dy}_{dv} = y \ln(\sin y) \Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \ln(\sin y) dy =$$

$$= \frac{\pi}{2} \ln 1 - \lim_{y \searrow 0} \frac{\ln(\sin y)}{\frac{1}{y}} + \frac{\pi}{2} \ln 2 = \frac{\pi}{2} \ln 2 \text{ (v. Exemplul 5),}$$

deducem că $\int_0^{\infty} \left(\frac{\operatorname{arc tg} x}{x} \right)^2 dx = \pi \ln 2$

Exemplul 8 (D i r i c h l e t). *Să se arate că integrala* $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx$ *este semiconvergentă, dacă* $0 < p < 2$ *și divergentă, dacă* $p \geqslant 2$.

1° Fie $p > 0$ fixat. Integrînd prin părți (T.11.1.9.) avem

$$\int_1^{\infty} \underbrace{\frac{1}{x^p}}_{u} \underbrace{\sin x \, dx}_{dv} = -\frac{1}{x^p} \sin x \Big|_1^{\infty} - p \int_1^{\infty} (\cos x) \frac{1}{x^{p+1}} dx$$

Deoarece $-\frac{1}{x^p} \sin x \Big|_1^{\infty} = -\lim_{x \to \infty} \frac{\sin x}{x^p} + \sin 1 = \sin 1$ și integrala $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{p+1}}$ este convergentă (P.11.1.2. (2°)), rezultă (T.11.2.2. Cor.1) că integrala $\int_1^{\infty} \frac{\cos x}{x^{p+1}} dx$ este convergentă, deci integrala $\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx$ este convergentă.

2° Dacă $0 < p \leqslant 1$, avem $\lim_{x \searrow 0} \frac{\sin x}{x^p} = 0$ (resp. 1), dacă $0 < p < 1$ (resp. $p = 1$), deci (P. 11.1.5. Cor. 1) $\int_0^1 \frac{\sin x}{x^p} dx$ este convergentă.

3° Dacă $1 < p < 2$, avem $0 < p - 1 < 1$ și $\lim_{x \searrow 0} x^{p-1} \cdot \left(\frac{\sin x}{x^p} \right) = 1$, deci (T.11.2.2. Cor. 2) integrala $\int_0^1 \frac{\sin x}{x^p} dx$ este convergentă.

Din 1°, 2°, 3° rezultă că $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx$ este convergentă, $(\forall)$ $p \in (0, 2)$

4°. Fie $0 < p \leqslant 1$ fixat. Evident avem

$$\frac{|\sin x|}{x^p} \geqslant \frac{\sin^2 x}{x^p} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x^p} - \frac{\cos 2x}{x^p} \right), \ (\forall) \ x \in \mathbf{R}_+^*$$

Cum integrala $\int_1^{\infty} \frac{\cos 2x}{x^p} dx$ este convergentă (se raționează ca și în cazul

funcției sin) și integrala $\int_1^\infty \frac{dx}{x^p}$ este divergentă (P. 11.1.2. (2°)), rezultă (T.11.2.2.) că integrala $\int_1^\infty \frac{|\sin x|}{x^p} dx$ este divergentă.

Raționament analog dacă $1 < p < 2$.

5° Fie $2 \leqslant p < \infty$ fixat. Evident avem :

$$\frac{\sin x}{x^p} = \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{x^{p-1}} \geqslant \frac{1}{2} \frac{1}{x^{p-1}}, \quad (\forall) \quad x \in (0, a).$$

dacă $a \in \mathbf{R}_+^*$ este suficient de mic. Cum $p - 1 \geqslant 1$, avem (P. 11.1.2.(1°)) că integrala $\int_0^a \frac{dx}{x^{p-1}}$ este divergentă, deci (T. 11.2.2.) integrala $\int_0^a \frac{\sin x}{x^p} dx$ este divergentă etc.

Corolar 1 (Integralele lui Fresnel). *Integralele improprii* $\int_0^\infty \sin x^2 \, dx$ *și* $\int_0^\infty \cos x^2 \, dx$ *sînt convergente.*

Cu substituția $x = \sqrt{t}$, $t \in \mathbf{R}_+^*$, avem (T. 11.1.10) $\int_0^\infty \sin x^2 \, dx = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt$, deci cum ultima integrală este convergentă, rezultă că integrala $\int_0^\infty \sin^2 x \, dx$ este convergentă.

Analog avem $\int_0^\infty \cos^2 x \, dx = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{\cos t}{\sqrt{t}} dt$. Cum avem $\lim_{t \searrow 0} \sqrt{t} \left(\frac{\cos t}{\sqrt{t}} \right) = 1$, rezultă (T. 11.2.2. Cor.2) că integrala $\int_0^1 \frac{\cos t}{\sqrt{t}} dt$ este convergentă. În fine integrala $\int_1^\infty \frac{\cos t}{\sqrt{t}} dt$ fiind convergentă, conchidem că integrala $\int_0^\infty \frac{\cos t}{\sqrt{t}} dt$ este convergentă etc.

11.3.2. Propoziție (Dirichlet). *Să se arate că* $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$.

Dem. Plecăm de la relația (P.4.1.11. Cor.3) :

$$\frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx = \frac{\sin \left(n + \frac{1}{2} \right) x}{2 \sin \frac{x}{2}}, \quad x \in (0, \pi] \quad (1)$$

Prelungind prin continuitate în 0 (T.5.5.23.) funcția din dreapta relației 1) și integrînd termen cu termen relația (1), obținem :

$$\frac{\pi}{2} = \int_0^\pi \left(\frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx \right) dx = \int_0^\pi \frac{\sin \left(n + \frac{1}{2} \right) x}{2 \sin \frac{x}{2}} dx \quad (2)$$

Considerăm funcția

$$f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}} = \frac{2\sin\frac{x}{2} - x}{2x\sin\frac{x}{2}},\ x \in (0,\ \pi].$$

Aplicînd T.4.6.3. deducem imediat că $\lim\limits_{x \searrow 0} f(x) = 0$, deci (T.5.5.23.) f poate fi prelungită prin continuitate în 0, să notăm tot cu f funcția astfel obținută. Deoarece (P.9.4.14.) $\lim\limits_{k\to\infty} \int_0^\pi f(x) \sin kx\ dx = 0$, putem scrie

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\pi \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}} \right) \sin\left(n + \frac{1}{2}\right) x\ dx = 0 \tag{3}$$

Din (2) și (3) rezultă $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^\pi \frac{1}{x} \sin\left(n + \frac{1}{2}\right) x\ dx = \frac{\pi}{2}$, de unde cu substituția $t = \left(n + \frac{1}{2}\right)x$, obținem $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}$. Cum integrala $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ este convergentă, conchidem că

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi} \frac{\sin t}{t}\, dt = \frac{\pi}{2}$$

11.3.3. Propoziție (Funcția beta a lui Euler). $(\forall)\ p,\ q \in \mathbf{R}_+^*$ *integrala improprie* $\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^q\, dx$ *notată cu* $B(p,\ q)$ *și numită funcția beta a lui Euler, este convergentă și are proprietățile*:

1° $B(p+1,\ q) + B(p,\ q+1) = B(p,\ q)$, $(\forall)\ p,\ q \in [1,\ \infty)$;

2° $qB(p+1,\ q) = pB(p,\ q+1)$;

3° $B(p,\ q) = \frac{(p-1)!(q-1)!}{(p+q-1)!}$, $(\forall)\ p,\ q \in \mathbf{N}$

Dem. Fixăm $p,\ q \in \mathbf{R}_+^*$ și fie funcția $f(x) = x^{p-1}(1-x)^{q-1}$, $x \in (0,\ 1)$. Evident avem $\lim\limits_{x \searrow 0} x^{1-p} f(x) = 1$, deci (T.11.2.2. Cor.2) integrala improprie $\int_0^{1/2} f$ este convergentă, dacă $0 < 1 - p < 1$ i.e. $p > 0$.

Mai departe $\lim\limits_{x \nearrow 1} (1-x)^{1-q} f(x) = 1$, deci (T.11.2.2. Cor. 2) integrala improprie $\int_{1/2}^1 f$ este de asemenea convergentă.

Așadar integralele improprii $\int_0^{1/2} f$ și $\int_{1/2}^1 f$ sînt convergente, deci integrala improprie $\int_0^1 f$ este convergentă.

1° Evident avem :

$$B(p+1,\ q)=\int_0^1 x^p(1-x)^{q-1}\mathrm{d}x,\ B(p,\ q+1)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^q\,\mathrm{d}x,$$

deci

$$B(p+1,\ q)+B(p,\ q+1)=\int_0^1[x^p(1-x)^{q-1}+x^{p-1}(1-x)^q]\,\mathrm{d}x=$$

$$=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}(x+1-x)\mathrm{d}x=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,\mathrm{d}x=B(p,\ q)$$

2° Ca şi mai sus deducem :

$$qB(p+1,\ q)=q\int_0^1 x^p(1-x)^{q-1}\ \mathrm{d}x=-qx^p\frac{1-x}{q}\Big|_0^1+$$

$$+\int_0^1 px^{p-1}(1-x)^q\mathrm{d}x=p\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^q\mathrm{d}x=pB(p,\ q+1)$$

3° Fixăm $n\in\mathbf{N}$; din 2° rezultă :

$$B(p,\ n)=B(p,\ (n-1)+1)=\frac{n-1}{p}B(p+1,\ n-1)$$

$$B(p+1,\ n-1)=B(p+1,(n-2)+1)=\frac{n-2}{p+1}B(p+2,\ n-2)$$

. . . . . .

$$B(p+n-2,2)=B(p+n-2,\ 1+1)=\frac{1}{p+n-2}B(p+n-1,1)$$

nmulţind relaţiile de mai sus obţinem :

$$B(p,\ n)=\frac{(n-1)(n-2)\ldots 2\cdot 1}{p\cdot(p+1)\ldots(p+n-2)}B(p+n-1,\ 1)$$

inînd seama că $B(p+n-1,\ 1)=\int_0^1 x^{p+n-2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{p+n-1}$ rezultă $B(p,\ n)=\frac{(n-1)!}{p(p+1)\ldots(p+n-1)}$, deci înlocuind pe p cu un număr natural m, ţinem $B(m,\ n)=\frac{(n-1)!(m-1)!}{(m+n-1)!}$

11.3.4. Propoziţie (Funcţia gama a lui Euler) (∀) $p\in\mathbf{R}_*$ *integrala improprie* $\int_0^\infty x^{p-1}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$, *numită funcţia gama a lui Euler şi* [*notată cu* p), *este convergentă şi are proprietăţile* :

$1^\circ\ \Gamma(p+1) = p\Gamma(p),\ (\forall)\ p \in \mathbf{R}_+^*$;

$2^\circ\ \Gamma(n+1) = n!,\ (\forall)\ n \in \mathbf{N}$;

$3^\circ\ B(p, q) = \dfrac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)},\ (\forall)\ p, q \in \mathbf{N}$. *unde* B *este funcția beta a lui Euler*

(P.11.3.3.)

Dem. Fixăm $p \in \mathbf{R}_+^*$ și fie funcția $f(x) = x^{p-1}e^{-x}$, $x \in \mathbf{R}_+^*$. Evident avem $\lim\limits_{x \searrow 0} x^{1-p}f(x) = 1$, deci (T.11.2.2. Cor.2) integrala improprie $\int_0^1 f$ este convergentă dacă $0 < 1 - p < 1$ i.e. $p > 0$.

Mai departe, $(\forall)\ \alpha > 1$, avem $\lim\limits_{x \to \infty} x^\alpha f(x) = \lim\limits_{x \to \infty} x^{\alpha+p-1}e^{-x} = 0$, deci (T.11.2.2 Cor. 4) integrala $\int_1^\infty f$ este convergentă, prin urmare integrala $\int_0^\infty f$ este convergentă.

1° Integrînd prin părți (T.11.1.9.), avem :

$$\Gamma(p+1) = \int_0^1 \underbrace{x^p}_{u}\,\underbrace{e^{-x}\,dx}_{dv} = -\,x^p e^{-x}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-x} p x^{p-1}\,dx$$

Aplicînd T. 6.4.3. rezultă :

$$x^p e^{-x}\Big|_0^\infty = \lim_{x \to \infty} x^p e^{-x} = 0,\ (\forall)\quad p \in \mathbf{R}_+^*.$$

$$\Gamma(p+1) = p\int_0^\infty e^{-x} x^{p-1}\,dx = p\Gamma(p),\ (\forall)\ p \in \mathbf{R}_+^*$$

2° Prin inducție relativ la n, ținînd seama de 1°.

3° Rezultă din P. 11.3.3.

Observație. Se poate arăta că relația fundamentală din 3° este adevărată $(\forall)\ p, q \in \mathbf{R}_+^*$.

11.3.5. Propoziție. *Fie* $-\infty < a < b < +\infty$ *și* $f : [a, b) \to \mathbf{R}_+$ *o funcție local integrabilă. Atunci* $\int_a^{b-} f = 0 \Leftrightarrow f$ *este nulă în punctele de continuitate.*

Dem. Deoarece $f \geqslant 0$, rezultă că integrala improprie $\int_a^{b-} f$ are sens, finită sau $+\infty$, și avem (P.11.1.4.) : $\int_a^{b-} f = \sup\limits_{c,\, d \in [a,\, b)} \int_c^d f$. Atunci :

$$\int_a^{b-} f = 0 \Leftrightarrow \int_c^d f = 0,\ (\forall)\ c, d \in [a, b) \Leftrightarrow f$$ este nulă în punctele de continuitate (P.5.2.13. Cor.1).

Corolar 1.

Fie $-\infty < a < b \leqslant +\infty$ *și* $f : [a, b) \to \mathbf{R}_+$ *o funcție continuă. Atunci* $\int_a^{b-} f = 0 \Leftrightarrow f = 0$.

11.3.6. Propoziție. *Fie* $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *o funcție continuă și periodică. Atunci integrala* $\int_0^\infty f$ *este convergentă* $\Leftrightarrow f = 0$.

Dem. ($\Rightarrow$) Funcția f fiind periodică $(\exists)\ T>0$ a.î. $f(x+T)=f(x)$, $(\forall)\ x\in\mathbf{R}$. Evident $(\forall)\ x\in\mathbf{R}$ și $n\in\mathbf{N}$, rezultă relația :

$$\int_0^{x+nT} f=\int_0^x f+\int_x^{x+T} f+\ \dots\ +\int_{x+(n-1)T}^{x+nT} f=\int_0^x f+n\int_x^{x+T} f \qquad (1)$$

Deoarece integrala $\int_0^\infty f$ este convergentă, din (1) rezultă (P.11.1.4.(2°)) că $(\forall)\ x\in\mathbf{R}$, avem :

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_0^x f+n\int_x^{x+T} f\right)=0\Leftrightarrow\int_0^x f=\int_x^{x+T} f=0$$

Așadar $\int_0^x f=0$, $(\forall)\ x\in\mathbf{R}$, deci (P.9.2.13. Cor. 2) $f=0$.

Corolar 1. *Integralele improprii* $\int_a^\infty \sin x\,dx$, $\int_a^\infty \cos x\,dx$, $\int_a^\infty \{x\}\,dx$ etc. *sînt divergente*, $(\forall)\ a\in\mathbf{R}$.

11.3.7. Propoziție. *Fie* $-\infty<a<b\leqslant+\infty$ *și* $f, g:[a, b)\to\mathbf{R}$ *două funcții local integrabile cu proprietatea că* $\lim\limits_{x\nearrow b} f(x)=\lim\limits_{x\nearrow b} g(x)=0$. *Dacă integralele improprii* $\int_a^{b-} f$ *și* $\int_a^{b-} g$ *sînt absolut convergente, atunci integrala improprie* $\int_a^{b-}(fg)$ *este absolut convergentă.*

Dem. Fixăm $\varepsilon>0$. Deoarece integrala $\int_a^{b-} f$ este convergentă cf. T.11.2.3. $(\exists)\ c_1\in[a, b)$ a.î. $\left|\int_{t_1}^{t_2} f\right|\leqslant\sqrt{\varepsilon}$, $(\forall)\ t_1, t_2\in[c_1, b)$. Cum $\lim\limits_{x\nearrow b} f(x)=0$, $(\exists)\ c_2\in$ $\in[a, b)$ a.î. $|f(x)|\leqslant\sqrt{\varepsilon}$, $(\forall)\ [c_2, b)$. Punem $c:=\max\{c_1, c_2\}$. Atunci avem :

$$|f(x)|^2\leqslant\sqrt{\varepsilon}|f(x)|,\ (\forall)\ x\in[c,\ b),$$

deci

$$\int_{t_1}^{t_2}|f(x)|^2\,dx\leqslant\sqrt{\varepsilon}\int_{t_1}^{t_2}|f(x)|\,dx\leqslant\varepsilon,\ (\forall)\ t_1,\ t_2\in[c,\ b)$$

și deci (T.11.2.3.) integrala $\int_a^{b-}|f|^2$ este convergentă.

Analog se arată că $\int_a^{b-}|g|^2$ este convergentă. Cum avem $|fg|\leqslant\frac{1}{2}|f|^2+$ $+\frac{1}{2}|g|^2$, conchidem (T.11.2.1.) că integrala $\int_a^{b-}|fg|$ este convergentă.

Corolar 1. *Fie* $a\in\mathbf{R}$ *și* $f, g:[a, \infty)\to\mathbf{R}$ *două funcții local integrabile care au limită la* $+\infty$. *Dacă integralele* $\int_a^\infty f$ *și* $\int_a^\infty g$ *sînt absolut convergente, atunci integrala* $\int_a^{b-}(fg)$ *este absolut convergentă.*

Dem. Aplicăm P.11.3.7. ținînd seama că $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 0$ (P.11.1.6.).

11.3.8. Propoziție. *Fie* $I,\ J \subseteq \mathbf{R}$ *două intervale și* $f : I \to J$ *o funcție bijectivă de clasă* $\mathcal{C}^1$. *Atunci avem relația :*

$$\int_a^b f + \int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1} = bf(b) - af(a),\ (\forall)\ a,\ b \in I$$

Dem. Funcția f fiind bijectivă și de clasă $\mathcal{C}^1$ este omeomorfă (T.5.5.19, Cor.2)., deci f și f^{-1} sînt local integrabile.

De asemenea, f fiind bijectivă și de clasă $\mathcal{C}^1$, putem face în a doua integrală schimbarea de variabilă (T.11.1.10.) $y = f(x)$, $x \in [a,\ b)$; obținem :

$$\int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(y)\mathrm{d}y = \int_a^b f^{-1}(f(x)) \cdot f'(x)\mathrm{d}x = \int_a^b xf'(x)\mathrm{d}x$$

Integrînd mai departe prin părți (T.11.1.9.), avem :

$$\int_a^b \underbrace{x}_{u} \underbrace{f'(x)\ \mathrm{d}x}_{\mathrm{d}v} = xf(x)\Big|_a^b - \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = bf(b) - af(a) - \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

Prin urmare

$$\int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(y)\ \mathrm{d}y = bf(b) - af(a) - \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \text{ etc.}$$

Corolar 1. *Fie* $-\infty < a < b \leqslant +\infty$ *și* $f : [a,\ b) \to \mathbf{R}$ *o funcție injectivă de clasă* $\mathcal{C}^1$ *a.î. integralele improprii* $\int_a^b f$ *și* $\int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}$ *sînt convergente. Atunci avem relația :*

$$\int_a^b f + \int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1} = \lim_{t \nearrow b} tf(t) - af(a)$$

Dem. Din P. 11.3.8. rezultă relația :

$$\int_a^t f + \int_{f(a)}^{f(t)} f^{-1} = tf(t) - af(a),\ (\forall)\ t \in [a,\ b)$$

Trecem mai departe la limită cu t către b.

Exemple

1) $\int_0^{\pi/4} \operatorname{tg}\ x\ \mathrm{d}x = \int_0^1 \operatorname{arc\ tg}\ x\ \mathrm{d}x = \dfrac{\pi}{4}$

2) $\int_0^{\pi/2} \operatorname{arc\ tg}\ (\sin\ x)\mathrm{d}x + \int_0^{\pi/4} \operatorname{arc\ sin}(\operatorname{tg}\ x)\mathrm{d}x = \dfrac{\pi^2}{8}$

Aplicăm P.11.3.8. (resp. Cor.1) pentru funcțiile

$f : \left[0,\ \dfrac{\pi}{4}\right) \to [0,\ 1)$, $f(x) = \operatorname{tg}\ x$, respectiv

$$\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right) \underset{\arcsin}{\overset{\sin}{\rightleftarrows}} [0,\ 1) \underset{\operatorname{tg}}{\overset{\operatorname{arc\ tg}}{\rightleftarrows}} \left[0,\ \frac{\pi}{4}\right),\ f(x) = \operatorname{arc\ tg}(\sin\ x)$$

11.3.9. Propoziție (P o i s s o n). *Să se arate că* $\int_0^\infty e^{-x^2/2}\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

Dem. Să punem $L_{n,p} := \int_0^\infty x^n e^{-px^2/2}\,dx$, $n \in \mathbf{N}$, $p \in \mathbf{R}_+^*$.

Integrînd prin părți (T.11.1.9.) obținem :

$$\int_0^\infty \underbrace{x^{n-1}}_{u}\,\underbrace{e^{-px^2/2}\,dx}_{dv} = -\frac{1}{p}\,x^{n-1}\,e^{-px^2/2}\Big|_0^\infty + \frac{n-1}{p}\int_0^\infty x^{n-2}\,e^{-px^2/2}\,dx$$

Din T. 6.4.3. rezultă

$$x^{n-1}\,e^{-px^2/2}\Big|_0^\infty = \lim_{x\to\infty} x^{n-1}\,e^{-px^2/2} = 0,$$

deci

$$L_{n,p} = \frac{n-1}{p}\,L_{n-2,p}, \quad (\forall)\ n > 1 \wedge p > 0 \tag{1}$$

Ținînd seama că

$$L_{1,p} = \int_0^\infty x e^{-px^2/2}\,dx = -\frac{1}{p}\,e^{-px^2/2}\Big|_0^\infty = \frac{1}{p}$$

și

$$L_{0,p} = \int_0^\infty e^{-px^2/2}\,dx = \frac{1}{\sqrt{p}}\int_0^\infty e^{-(x\sqrt{p})^2/2}\,d(x\sqrt{p}) = \frac{1}{\sqrt{p}}\,L_{0,1},$$

din (1) deducem relațiile :

$$\left.\begin{aligned} L_{2n+1,p} &= \frac{2.4\ldots(2n)}{p^n}\,L_{1,p} = \frac{(2)!!}{p^{n+1}} \\ L_{2n+2,p} &= \frac{1.3\ldots(2n+1)}{p^{n+1}}\,L_{0,p} = \frac{(2n+1)!!}{p^{n+1}}\cdot\frac{L_{0,1}}{\sqrt{p}} \end{aligned}\right| \tag{2}$$

Deoarece $\int_0^\infty x^n(x-t)^2 e^{-px^2/2}\,dx > 0$, $(\forall)\ t \in \mathbf{R}$, rezultă

$$\int_0^1 x^{n+2} e^{-px^2/2}\,dx - 2t\int_0^\infty x^{n+1} e^{-px^2/2}\,dx + t^2\int_0^\infty x^n e^{-px^2/2}\,dx > 0, \ (\forall)\ t \in \mathbf{R},$$

deci

$$L_{n+2,p} - 2tL_{n+1,p} + t^2 L_{n,p} > 0, \ (\forall)\ t \in \mathbf{R}$$

și deci

$$(L_{n+1,p})^2 - L_{n,p}\,L_{n+2,p} < 0, \quad (\forall)\ \ n \geqslant 1 \wedge p > 0 \tag{3}$$

Înlocuind în (1) n cu $n+1$ și p cu n (resp. n cu $n+2$ și p cu n) obținem :

$$\left.\begin{aligned} L_{n+1,n} &= \frac{(n+1)-1}{n}\,L_{n-1,n} = L_{n-1,n} \\ L_{n+2,n} &= \frac{(n+2)-1}{n}\,L_{n,n} > L_{n,n} \end{aligned}\right| \tag{4}$$

Din (4) și din (3) cu p particularizat, rezultă imediat inegalitățile :

$$L_{n,n} < L_{n+1,n} < L_{n+2,n}, \quad (\forall)\ n \geqslant 1$$

și deci

$$L_{2n+1,2n+1} < L_{2n+2,2n+1} < L_{2n+3,2n+1}, \quad (\forall)\ n \geqslant 1 \tag{5}$$

Înlocuind expresiile din (2) în inegalitățile din (5), obținem :

$$\frac{(2n)!!}{(2n+1)^{n+1}} < \frac{(2n+1)!!}{(2n+1)^{n+1}} \cdot \frac{L_{0,1}}{2n+1} < \frac{(2n+2)!!}{(2n+1)^{n+2}},$$

deci

$$\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \cdot \frac{1}{\sqrt{2n+1}} < L_{0,1} < \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \cdot \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \cdot \frac{2n+2}{2n+1} \tag{6}$$

Trecînd în (6) la limită, $n \to \infty$, și ținînd seama de formula lui Wallis $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \cdot \frac{1}{\sqrt{2n+1}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$, conchidem (P.2.3.18) că $L_{0,1} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$, deci $\int_0^\infty e^{-x^2/2}\, dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

Observație. Funcția $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\, b} e^{-(x-a)^2/2b^2}$, $x \in \mathbf{R}$, unde $a \in \mathbf{R}$ și $b \in \mathbf{R}_+^*$ sînt fixați, se numește *densitatea normală*. Din P.11.3.9. rezultă imediat că $\int_{-\infty}^{+\infty} f = 1$. Funcția f este foarte importantă în teoria probabilităților, de aceea integrala dată se numește *integrala probabilităților*.

11.3.10. Propoziție (Formula lui Stirling). *Să se arate că* $n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$, $n \to \infty$.

Dem. Fie $a_n := \frac{n!}{n^2 e^{-n} \sqrt{2\pi n}}$ $(n \geqslant 1)$. Evident avem

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = e^{-1} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} \Leftrightarrow \ln \frac{a_n}{a_{n+1}} = \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1$$

Funcția $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \in \mathbf{R}_+^*$, fiind convexă ($f'' > 0$), rezultă (Fig. 58) :

$$\text{aria } ABCD < \int_n^{n+1} \frac{dx}{x} < \text{aria } ABC'D',$$

deci

$$\frac{1}{n+\frac{1}{2}} < \ln(n+1) - \ln n < \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right) \tag{1}$$

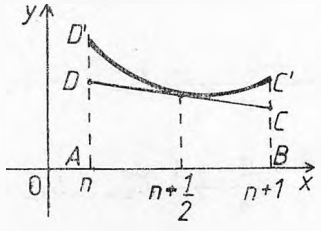


Fig. 58

Amplificînd (1) cu $n+\frac{1}{2}$ și scăzînd 1, obținem :

$$0 < \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - 1 < \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right)\left(n+\frac{1}{2}\right) - 1 =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right),$$

deci

$$0 < \ln\frac{a_n}{a_{n+1}} < \frac{1}{4}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

și deci

$$0 < \ln\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\cdot\frac{a_{n+1}}{a_{n+2}}\cdots\frac{a_{n+k-1}}{a_{n+k}}\right) < \frac{1}{4}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) + \cdots$$

$$\cdots + \left(\frac{1}{n+k-1}-\frac{1}{n+k}\right),$$

de unde rezultă imediat

$$1 < \frac{a_n}{n+k} < \mathrm{e}^{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+k}\right)}, \quad (\forall)\ n,\ k \geqslant 1 \tag{2}$$

Din (2) rezultă că șirul $(a_n)_{n\geqslant 1}$ este strict descrescător, deci fiind minorat de 0, este convergent (T. 2.3.21.(2°)) ; fie a limita sa. Evident $a \geqslant 0$. Mai departe, fixăm în (2) $n \geqslant 1$ și trecem la limită după k, $k\to\infty$, obținem :

$$1 \leqslant \frac{a_n}{a} < \mathrm{e}^{\frac{1}{4n}} < \mathrm{e}, \quad (\forall)\ n \geqslant 1 \tag{3}$$

Din (3) rezultă că $a > 0$. Atunci avem :

$$a = \lim_{n\to\infty}\frac{a_n^2}{a_{2n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n!)^2}{(n^n\mathrm{e}^{-n}\sqrt{2\pi n})^2}\cdot\frac{(2n)^{2n}\mathrm{e}^{-2n}\sqrt{4n\pi}}{(2n)!} =$$

$$= \lim\frac{(n!)^2}{(2n)!}\cdot\frac{(2n)^{2n}}{n^{2n}}\cdot\frac{\mathrm{e}^{-2n}}{\mathrm{e}^{-2n}}\frac{\sqrt{4\pi n}}{2\pi n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}\cdot\frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}}$$

Ținînd seama de formula lui Wallis (P.11.3.1. Exemplul 6) deducem :

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\cdot\frac{1}{\sqrt{2n+1}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n!)^2}{(2n)!}\cdot\frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}}\right)\frac{\sqrt{\pi n}}{\sqrt{2n+1}} = a\sqrt{\frac{\pi}{2}},$$

deci $a = 1 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}\dfrac{n!}{n^n\mathrm{e}^{-n}\sqrt{2\pi n}} = 1.$

CAPITOLUL 12

ŞIRURI ŞI SERII DE FUNCŢII

Şirurile şi seriile de funcţii sînt generalizarea naturală a şirurilor şi seriilor de numere. În secţiunea 12.1 vom prezenta diferite *tipuri de convergenţă* ale şirurilor de funcţii şi relaţiile dintre ele. Sînt demonstrate apoi unele proprietăţi de *permanenţă* ale limitei unui şir de funcţii (continuitatea, derivabilitatea, integrabilitatea etc.). În 12.2 vom prezenta diferite tipuri de convergenţă ale seriilor de funcţii şi relaţiile dintre ele. Proprietăţile seriilor de funcţii decurg imediat din cele ale şirurilor de funcţii. În 12.3 sînt prezentate *seriile de puteri* cu proprietăţile lor specifice: forma mulţimii de convergenţă şi comportarea sumei unei serii de puteri în discul (intervalul) de convergenţă şi pe frontiera sa. În 12.4 este demonstrată *formula lui Taylor cu restul integral* şi posibilitatea dezvoltării unor funcţii în serie Taylor. Capitolul se încheie cu aplicaţii.

12.1. Şiruri de funcţii

Fie A o mulţime arbitrară. Vom nota cu $\mathcal{F}(A)$ sau $\mathbf{R}^A$ *mulţimea tuturor aplicaţiilor* $f : A \to \mathbf{R}$, iar cu $\mathcal{M}(A)$ mulţimea tuturor aplicaţiilor *mărginite* $f : A \to \mathbf{R}$. Dacă $A \subseteq \mathbf{R}$ vom nota cu $\mathcal{C}(A)$ (resp. $\mathcal{B}(A)$) mulţimea tuturor aplicaţiilor *continue* (resp. *continue şi mărginite*) $f : A \to \mathbf{R}$. Dacă $I \subseteq \mathbf{R}$ este un interval vom nota cu $\mathcal{D}(I)$ mulţimea tuturor aplicaţiilor $f : I \to \mathbf{R}$ *derivabile*.

Dacă $A \subseteq \mathbf{R}$, avem $\mathcal{B}(A) \subseteq \mathcal{C}(A) \subseteq \mathcal{F}(A)$. Operaţiile vectoriale naturale $f + g$, λf definesc pe cele trei mulţimi o structură de $\mathbf{R}$ — spaţiu vectorial. Dacă $A \subseteq \mathbf{R}$ este compactă, avem $\mathcal{B}(A) = \mathcal{C}(A)$.

12.1.1. Definiţie. Fie A o mulţime arbitrară. Se numeşte *şir de funcţii* (aplicaţii) definite pe A şi cu valori în $\mathbf{R}$ sau şir $(f_n)_{n\geqslant 1}$ cu elemente din $\mathcal{F}(A)$ vom spune atunci prescurtat: fie $f_n : A \to \mathbf{R} (n \geqslant 1)$ un şir de funcţii.

12.1.2. Definiţie. Fie A o mulţime arbitrară, $f_n : A \to \mathbf{R} (n \geqslant 1)$ un şir de funcţii şi $f : A \to \mathbf{R}$ o funcţie. Vom spune că:

· $(f_n)_{n\geqslant 1}$ *converge simplu* (punctual) la f şi vom scrie $f_n \xrightarrow{s} f$, dacă $f_n(x) \to f(x)$, $(\forall)\ x \in A$;

· $(f_n)_{n\geqslant 1}$ *converge uniform* la f şi vom scrie $f_n \xrightarrow{u} f$, dacă: $(\forall)\ \varepsilon > 0$ $(\exists)\ n_\varepsilon \geqslant 1$ a.î. $|f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$, $(\forall)\ x \in A \wedge n \geqslant n_\varepsilon$;

· $(f_n)_{n\geqslant 1}$ *uniform Cauchy*, dacă: $(\forall)\ \varepsilon > 0 (\exists)\ n_\varepsilon \geqslant 1$ a.î. $|f_n(x) - f_m(x)| \leqslant \varepsilon$, $(\forall)\ x \in A \wedge n, m \geqslant n_\varepsilon$.

Vom spune că şirul de funcţii $f_n : A \to \mathbf{R}$ $(n \geqslant 1)$ este simplu (resp. *uniform convergent*), dacă $(\exists)\ f : A \to \mathbf{R}$ a.î. $f_n \xrightarrow{s} f$ (resp. $f_n \xrightarrow{u} f$). Analog se defineşte simp

(resp. *uniform*) *convergența* șirului dat pe o submulțime $B \subseteq A$ și se scrie $f_n \xrightarrow[B]{s} f$ (resp. $f_n \xrightarrow[B]{u} f$).

Observație. Semnificația geometrică a convergenței uniforme, $f_n \xrightarrow{u} f$, este următoarea: Fie $\varepsilon > 0$ fixat; trasăm graficul funcțiilor f, $f - \varepsilon$, $f + \varepsilon$; atunci $(\exists)\ n_\varepsilon \geqslant 1$ a.î. graficul oricărei funcții f_n cu $n \geqslant n_\varepsilon$ este situat între graficul lui $f - \varepsilon$ și $f + \varepsilon$ (fig. 59).

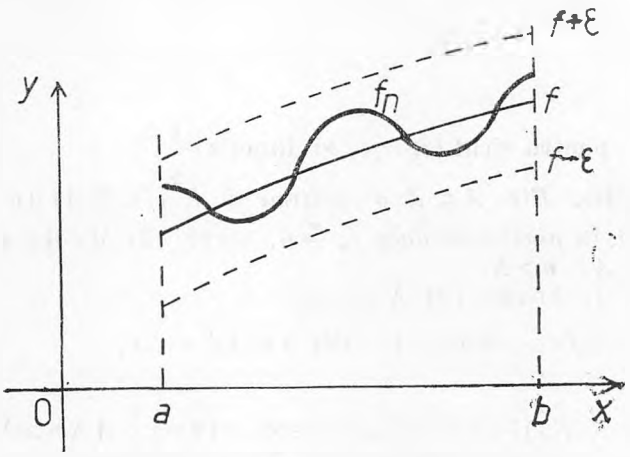


Fig. 59

Exemplul 1. *Fie* $f_n(x) = \frac{1}{n} \sin nx$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R} \wedge n \in \mathbf{N}$. *Atunci* $f_n \xrightarrow{u} 0$.

Într-adevăr, fie $\varepsilon > 0$ fixat și $n_\varepsilon := E\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$. Atunci $(\forall)\ n > n_\varepsilon$ avem $n \geqslant \frac{1}{\varepsilon}$, deci $\frac{1}{n} \leqslant \varepsilon$ și deci $|f_n(x)| \leqslant \frac{1}{n} \cdot 1 \leqslant \varepsilon$ $(\forall)\ n > n_\varepsilon \wedge x \in \mathbf{R}$, prin urmare $f_n \xrightarrow{u} 0$.

Exemplul 2. *Fie* $f_n(x) = x^n$, $(\forall)\ x \in [0, 1] \wedge n \in \mathbf{N}$ *și fie* $f(x) = 0$, $(\forall)\ x \in [0, 1)$ *și* $f(1) = 1$. *Atunci* $(f_n)_{n \geqslant 1}$ *converge simplu și neuniform la* f.

Evident $\lim\limits_{n \to \infty} f_n(x) = \lim\limits_{n \to \infty} x^n = 0$, $(\forall)\ x \in [0, 1]$ și cum $f_n(1) = 1 = f(1)$, $(\forall)\ n \geqslant 1$, rezultă că $f_n \xrightarrow{s} f$. Mai departe avem:

$$f_n(x) - f(x) = \begin{cases} x^n, & x \in [0, 1) \\ 0, & x = 1 \end{cases}$$

Presupunem că $f_n \xrightarrow{u} f$ și fie $\varepsilon = \frac{1}{2}$ Atunci $(\exists)\ N \geqslant 1$ a.î. $|f_n(x) - f(x)| \leqslant \frac{1}{2}$, $(\forall)\ x \in [0, 1]$, deci $x^n \leqslant \frac{1}{2}$, $(\forall)\ x \in [0, 1)$, ceea ce este evident absurd. Rămîne că $(f_n)_{n \geqslant 1}$ nu converge uniform la f.

12.1.3. Propoziție. *Fie* A *o mulțime și* $f, g, f_n \in \mathcal{F}(A)$ $(n \geqslant 1)$. *Atunci*:

1° $f_n \xrightarrow{u} f$ *și* $\sup\limits_{x \in A} |g(x)| < +\infty \Rightarrow f_n g \xrightarrow{u} fg$;

2° $f_n g \xrightarrow{u} fg$ *și* $\inf\limits_{x \in A} |g(x)| > 0 \Rightarrow f_n \xrightarrow{u} f$.

Dem. 1° Fie $\varepsilon > 0$ fixat și $M := \sup_{x \in A} |g(x)|$. Deoarece $f_n \xrightarrow{u} f$, $(\exists)\ N \geqslant 1$

$$|f_n(x) - f(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{M},\ (\forall)\ x \in A,\ \ (\forall)\ n \geqslant N.$$

Atunci

$$|(f_n g)(x) - (fg)(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{M} |g(x)| \leqslant \varepsilon,\ \ (\forall)\ x \in A,\ \ (\forall)\ n \geqslant N,$$

deci $f_n g \xrightarrow{u} fg$.

2° Aplicăm 1° pentru șirul $(f_n g)_{n \geqslant 1}$ și funcția $\frac{1}{g}$.

12.1.4. Propoziție. *Fie* $A \subseteq \mathbf{R}$ *o mulțime și* $f, f_n \in \mathcal{F}(A)$ $(n \geqslant 1)$. *Dacă* $f_n \xrightarrow{u} f$ *și* f *mărginită, în particular dacă* $f_n \xrightarrow{u} 0$, *atunci* $(\exists)\ M \in \mathbf{R}_+$ *și* $N \in \mathbf{N}$ *a.î.* $|f_n(x)| \leqslant M$, $(\forall)\ x \in A \wedge n \geqslant N$.

Dem. Fie $\varepsilon = 1$. Atunci $(\exists)\ N \geqslant 1$ a.î.

$$|f_n(x) - f(x)| \leqslant 1,\ \ (\forall)\ x \in A \wedge n \geqslant N,$$

deci

$$|f_n(x)| \leqslant 1 + |f(x)| \leqslant 1 + \|f\|_\infty < +\infty,\ \ (\forall)\ x \in A \wedge n \geqslant N$$

Observație. Dacă f nu este mărginită, atunci P.12.1.4 nu este numaidecît adevărată.

Contraexemplu $f_n = \mathbf{1}_{\mathbf{R}}$ *și* $f_n := \mathbf{1}_{\mathbf{R}} + \frac{1}{n}$ $(\forall)\ n \geqslant 1$.

12.1.5. Propoziție. *Fie* A *o mulțime arbitrară și* $f, f_n \in \mathcal{F}(A)$, $(n \geqslant 1)$ *Dacă* $f_n \xrightarrow{u} f$, *atunci* $f_n \xrightarrow{s} f$.

Dem. Evidentă.

Observație. Reciproca P.12.1.5. nu este numaidecît adevărată.

12.1.6. Propoziție. *Fie* A *o mulțime arbitrară și* $f, f_n \in \mathcal{F}(A)$ $(n \geqslant 1)$ *Atunci cond.* 1°—5° *sînt echivalente*:

1° $f_n \xrightarrow{u} f$; 2° $\sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| \to 0$ $(n \to \infty)$; 3° $\|f_n - f\|_\infty \to 0$ $(n \to \infty)$

4° $(\exists)\ a_n \in \overline{\mathbf{R}}_+,\ a_n \to 0$ *a.î.* $|f_n(x) - f(x)| \leqslant a_n$, $(\forall)\ x \in A \wedge n \geqslant 1$;

5° $(\exists)\ g_n \in \mathcal{F}(A),\ g_n \xrightarrow{u} 0$ *a.î.* $|f_n(x) - f(x)| \leqslant g_n(x)$, $(\forall)\ x \in A \wedge n \geqslant 1$.

Dem. 1° $\Leftrightarrow$ 2°. $f_n \xrightarrow{u} f \Leftrightarrow (\forall)\ \varepsilon > 0, (\exists)\ n \geqslant 1$ a.î. $|f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$, $(\forall) x \in A \wedge n \geqslant n_\varepsilon \Leftrightarrow (\forall)\ \varepsilon > 0,\ \ (\exists)\ n_\varepsilon \geqslant 1$ a.î. $\sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon,\ \ (\forall)\ n \geqslant n_\varepsilon \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| \to 0$ $(n \to \infty)$.

2° $\Leftrightarrow$ 3° și 4° $\Rightarrow$ 5° sînt evidente.

3° $\Rightarrow$ 4°. Punem $a_n := \|f_n - f\|_n$ $(n \geqslant 1)$. Evident avem $a_n \to 0$ $(n \to \infty)$

4° $\Rightarrow$ 3°. Evident $\|f_n - f\|_\infty \leqslant a_n$, $(\forall)\ n \geqslant 1$, deci $\|f_n - f\|_\infty \to 0$ $(n \to \infty)$

5° $\Rightarrow$ 4°. Punem $a_n := \|g_n\|_\infty$ $(n \geqslant 1)$. Atunci $a_n \to 0$ $(n \to \infty)$ și $|f_n(x) - f(x)| \leqslant a_n$, $(\forall)\ x \in A$ și $n \geqslant 1$.

12.1.7. Propoziție. *Fie* A *o mulțime arbitrară și* $f_n \in \mathcal{F}(A)$ $(n \geqslant 1)$ *Atunci cond.* 1°—3° *sînt echivalente*: 1° $(f_n)_{n \geqslant 1}$ *uniform Cauchy*; 2° $\sup_{x \in A} |f_n(x) - f_m(x)| \to 0$ $(n, m \to \infty)$; 3° $\|f_n - f_m\|_\infty \to 0$ $(n, m \to \infty)$.

Dem. $1° \Leftrightarrow 2°$ $(f_n)_{n<1}$ uniform Cauchy $\Leftrightarrow (\forall)\ \varepsilon > 0$, $(\exists)\ N \geqslant 1$ a.î. $|f_n(x) - f_m(x)| \leqslant \varepsilon$, $(\forall)\ x \in A \wedge n, m \geqslant N \Leftrightarrow (\forall)\ \varepsilon > 0$, $(\exists)\ N \geqslant 1$ a.î. $\sup_{x \in A} |f_n(x) - f_m(x)| \leqslant \varepsilon$, $(\forall)\ n, m \geqslant N \Leftrightarrow \sup_{x \in A} |f_n(x) - f_m(x)| \to 0$ $(n, m \to \infty)$. etc.

12.1.8. Teoremă (C a u c h y). *Fie* A *o mulțime arbitrară și* $f_n \in \mathcal{F}(A)$ $(n \geqslant 1)$. *Atunci* $(\exists)\ f \in \mathcal{F}(A)$ *cu* $f_n \overset{u}{\to} f \Leftrightarrow (f_n)_{n \geqslant 1}$ este *uniform Cauchy*, i.e. $(\forall)\ \varepsilon > 0$, $(\exists)\ n_\varepsilon \geqslant 1$ *a.î.* $|f_n(x) - f_m(x)| \leqslant \varepsilon$, $(\forall)\ x \in A \wedge n, m \geqslant n_\varepsilon$.

Dem. $(\Rightarrow)$ Fie $\varepsilon > 0$ fixat. Deoarece $f_n \overset{u}{\to} f$, $(\exists)\ n_\varepsilon \geqslant 1$ a.î.

$$|f_n(x) - f(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}, \quad (\forall)\ x \in A \wedge n, \quad m \geqslant n_\varepsilon.$$

Atunci

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leqslant |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

$$(\forall)\ x \in A \wedge n, \quad m \geqslant n_\varepsilon, \quad \text{etc.}$$

$(\Leftarrow)$ Fie $(f_n)_{n \geqslant 1}$ uniform Cauchy și $\varepsilon > 0$ fixat. Atunci $(\exists)\ N \geqslant 1$ a.î.

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leqslant \varepsilon, \quad (\forall)\ x \in A \wedge n, \quad m \geqslant N \tag{1}$$

Fixăm $x \in A$; din (1) rezultă că $(f_n(x))_{n \geqslant 1}$ este un șir Cauchy de numere reale, deci convergent, fie $f(x)$ limita sa. Obținem astfel o funcție $f : A \to \mathbf{R}$ cu proprietatea că $f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x)$, $(\forall)\ x \in A$ i.e. $f_n \overset{s}{\to} f$. Din (1) prin trecere la limită, $m \to \infty$, obținem :

$$|f_n(x) - f(x)| = \lim_{m \to \infty} |f_n(x) - f_m(x)| \leqslant \varepsilon, \quad (\forall)\ x \in A \wedge n \geqslant N,$$

prin urmare $f_n \overset{u}{\to} f$.

Corolar 1. *Fie* A *o mulțime arbitrară și* $f_n \in \mathcal{F}(A)$ $(n \geqslant 1)$. *Atunci* $(f_n)_{n \geqslant 1}$ *este uniform convergent* $\Leftrightarrow$ $(f_n)_{n \geqslant 1}$ *este uniform Cauchy.*

Corolar 2. *Fie* A *o mulțime arbitrară și* $f_n \in \mathcal{F}(A)$ $(n \geqslant 1)$. *Dacă* $(\exists)\ (A_i)_{i \in I}$ *o acoperire a lui* A *cu proprietatea că* $(f_n)_{n \geqslant 1}$ *este uniform Cauchy pe fiecare* A_i $(i \in I)$, *atunci* $(\exists)\ f : A \to \mathbf{R}$ *a.î.* $f_n \overset{u}{\to} f$.

12.1.9. Propoziție. *Fie* $A \subseteq \mathbf{R}$ *o mulțime și* $f_n \in \mathcal{C}(A)$ $(n \geqslant 1)$. *Atunci* $(f_n)_{n \geqslant 1}$ *este uniform convergent pe o mulțime* $B \subseteq A \Leftrightarrow (f_n)_{n \geqslant 1}$ *este uniform convergent pe* $\bar{B} \cap A$.

Dem. $(\Rightarrow)$ Fie $\varepsilon > 0$ fixat. Din T. 12.1.8. rezultă că $(f_n)_{n \geqslant 1}$ este uniform Cauchy pe B, deci $(\exists)\ n_\varepsilon \geqslant 1$ a.î.

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leqslant \varepsilon, \quad (\forall)\ x \in B, \quad (\forall)\ n, m \geqslant n_\varepsilon.$$

Fixăm $x_0 \in \bar{B} \cap A$. Atunci $(\exists)\ x_j \in B$, $x_j \to x_0$ $(j \to \infty)$. Evident avem :

$$|f_n(x_j) - f_m(x_j)| \leqslant \varepsilon, \quad (\forall)\ n, m \geqslant n_\varepsilon, \quad (\forall)\ j \geqslant 1$$

de unde prin trecere la limită, $j \to \infty$ obținem :

$$|f_n(x_0) - f_m(x_0)| \leqslant \varepsilon, \quad (\forall)\ n, m \geqslant n_\varepsilon.$$

Așadar, $(f_n)_{n \geqslant 1}$ este uniform Cauchy pe $\bar{B} \cap A$, deci (T.12.1.8.) este uniform convergent pe $\bar{B} \cap A$.

Corolar 1. *Fie* $A \subseteq \mathbf{R}$ *o mulțime și* $f_n \in \mathcal{C}(A)$ $(n \geqslant 1)$; *presupunem c*
$(\exists)$ $x_0 \in A' \setminus A$ *cu proprietate că fiecare* $f_n (n \geqslant 1)$ *are limită finită în* x_0, *să*
notăm cu y_n. *Dacă șirul* $(y_n)_{n \geqslant 1}$ *nu este convergent, atunci șirul* $(f_n)_{n \geqslant 1}$ *nu est*
uniform convergent.

Dem. Fie $\tilde{f}_n (n \geqslant 1)$ prelungirea prin continuitate a lui f_n la $A \cup \{x_0\}$. Aplicăm mai departe P.12.1.9. pentru șirul $(\tilde{f}_n)_{n \geqslant 1}$.

12.1.10. Teoremă. *Fie* $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ *o funcție continuă. Atunc*
$(\exists)$ $f_n : [a, b] \to \mathbf{R}$ $(n \geqslant 1)$ *un șir de funcții poligonale a.î.* $f_n \overset{u}{\to} f$.

Dem. Fie $\varepsilon > 0$, fixat; funcția f fiind continuă și $[a, b]$ compact est
uniform continuă, deci $(\exists)$ $\eta > 0$ a.î.

$$|f(x') - f(x'')| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}, \ (\forall)\ x', x'' \in [a, b], \ |x' - x''| < \eta \qquad (1$$

Fie $\Delta = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$ o diviziune a lui $[a, b]$ de normă
$\leqslant \eta$ fixată și fie $f_\varepsilon : [a, b] \to \mathbf{R}$ funcția poligonală care trece prin punctel
$(x_i, f(x_i))_{i=\overline{0, n}}$ deci

$$f_\varepsilon x) = f(x_{i-1}) + \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} (x - x_{i-1}), \ (\forall)\ x \in [x_{i-1}, x_i]$$

Să arătăm că $\|f - f_\varepsilon\|_\infty \leqslant \varepsilon$. Într-adevăr avem : $f(x_i) = f_\varepsilon(x_i)$, $(\forall)$ $i = \overline{1, n}$;
$|f(x) - f(x_i)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$, $(\forall)$ $x \in [x_{i-1}, x_i]$, deoarece $|x - x_i| \leqslant \nu(\Delta) < \eta$, $(\forall) x \in$
$\in [x_{i-1}, x_i]$. Ținînd seama că f_ε este afină pe $[x_{i-1}, x_i]$, deducem :

$$|f_\varepsilon(x_i) - f_\varepsilon(x)| \leqslant |f_\varepsilon(x_i) - f_\varepsilon(x_{i-1})| = |f(x_i) - f(x_{i-1})| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}, \ (\forall)\ x \in [x_{i-1}, x_i]$$

Așadar, $(\forall)$ $x \in [x_{i-1}\ x_i]$ rezultă

$$|(f - f_\varepsilon)(x)| \leqslant (|f - f_\varepsilon)(x) - (f - f_\varepsilon)(x_i)| + |(f - f_\varepsilon)(x_i)| \leqslant$$

$$\leqslant |f(x) - f(x_i)| + |f_\varepsilon(x) - f_\varepsilon(x_i)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

deci

$$\|f - f_\varepsilon\|_\infty = \sup_{x \in [a, b]} |f(x) - f_\varepsilon(x)| \leqslant \varepsilon.$$

Fie acum $\varepsilon_j \searrow 0$ fixat și $f_j := f_{\varepsilon_j} (j \geqslant 1)$ construit mai sus. Atunc
$\|f - f_j\|_\infty \leqslant \varepsilon_j, (\forall)$ $j \geqslant 1$, deci $\|f - f_j\|_\infty \to 0$ $(j \to \infty)$ și deci $f_j \overset{u}{\to} f (j \to \infty)$.

12.1.11. Teoremă. *Fie* $A \subseteq \mathbf{R}$ *o mulțime,* $x_0 \in A'$ *un punct și* $f_n \in \mathcal{F}$ $(A$
$(n \geqslant)(1)$ *un șir de aplicații cu proprietățile* : 1° $(f_n)_{n \geqslant 1}$ *este uniform convergent*
2° $(\forall)$ $n \geqslant 1$, $(\exists)$ $y_n := \lim\limits_{x \to x_0} f_n(x)$. *Atunci șirul* $(y_n)_{n \geqslant 1}$ *este convergent ș*
avem relația

$$\lim_{x \to x_0} (\lim_{n \to \infty} f_n(x)) = \lim_{n \to \infty} (\lim_{x \to x_0} f_n(x))$$

Dem. Fie $\varepsilon > 0$ fixat și $f \in \mathcal{F}(A)$ cu $f_n \overset{u}{\to} f$. Șirul $(f_n)_{n \geqslant 1}$ fiind uniform con
vergent, este uniform Cauchy (T.12.1.8.), deci $(\exists)$ $n_\varepsilon \geqslant 1$ a.î.

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leqslant \varepsilon, \ (\forall)\ x \in A, \ (\forall)\ n, m \geqslant n_\varepsilon$$

și deci

$$|y_n - y_m| = \lim_{x \to x_0} |f_n(x) - f_m(x)| \leqslant \varepsilon, (\forall)\ n,\ m \geqslant n_\varepsilon$$

Aceasta înseamnă că $(y_n)_{n \geqslant 1}$ este un șir Cauchy de numere reale, deci convergent fie $y := \lim_{n \to \infty} y_n$. Rămîne să arătăm că $\lim_{x \to x_0} f(x) = y$. Fie în acest scop $\varepsilon > 0$ fixat. Evident avem :

$$|y - f(x)| \leqslant |y - y_n| + |y_n - f_n(x)| + |f_n(x) - (f(x)|,$$

$$(\forall)\ x \in A \wedge n \geqslant 1 \tag{1}$$

Deoarece $f_n \xrightarrow{u} f$, $(\exists)\ n_1 \geqslant 1$ a.î.

$$|f_n(x) - f(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{3},\ (\forall),\ x \in A \wedge n \geqslant n_1 \tag{2}$$

Mai departe, deoarece $y_n \to y$, $(\exists)\ n_2 \geqslant 1$ a.î.

$$|y - y_n| \leqslant \varepsilon/3,\ (\forall)\ n \geqslant n_2 \tag{3}$$

Fie $n_0 := \max\{n_1, n_2\}$. Cum $\lim_{x \to x_0} f_{n_0}(x) = y_{n_0}$, $(\exists)\ V \in \mathcal{V}(x_0)$ a.î.

$$|f_{n_0}(x) - y_{n_0}| \leqslant \varepsilon/3,\ (\forall)\ x \in A \cap V \setminus \{x_0\}. \tag{4}$$

Înlocuind în (1) pe n cu n_0 și ținînd seama de (2), (3), (4), deducem :

$$|y - f(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,\ (\forall)\ x \in A \cap V \setminus \{x_0\}.$$

prin urmare $\lim_{x \to x_0} f(x) = y$

Corolar 1. *Fie $A \subseteq \mathbf{R}$ o mulțime, $x_0 \in A$ și $f, f_n \in \mathcal{F}(A)$ $n \geqslant 1$). Dacă $f_n \xrightarrow{u} f$ și fiecare $f_n (n \geqslant 1)$ este continuă în x_0 (resp. pe A), atunci f este continuă în x_0 (resp. pe A).*

Dem. Dacă x_0 este punct izolat în A i.e. $x_0 \in A \setminus A'$, atunci (T.5.5.6.(1°)) f este continuă în x_0. Dacă x_0 este neizolat i.e. $x_0 \in A \cap A'$, atunci (T.5.5.6.(2°)) $(\forall)\ n \geqslant 1$, $\lim_{x \to x_0} f_n(x) = f_n(x_0)$, deci (T.12.1.11.) avem :

$$f(x_0) = \lim_{n \to \infty} f_n(x_0) = \lim_{n \to \infty} [(\lim_{x \to x_0} f_n(x)) = \lim_{x \to x_0} (\lim_{n \to \infty} f_n(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x),$$

prin urmare (T.5.5.6.(2°)) f este continuă în x_0.

Observație. Dacă în Cor. 1 $(f_n)_{n \geqslant 1}$ converge simplu și neuniform la f, atunci f nu este nemaidecît continuă în x_0 (v. Exemplul 2).

Corolar 2. *Fie $A \subseteq \mathbf{R}$ o mulțime, $f \in \mathcal{F}(A)$ și $f_n \in \mathcal{C}(A)$ $(n \geqslant 1)$. Dacă $\forall)\ x \in A$, $(\exists)\ V \in \mathcal{V}(x)$ a.î. $f_n \xrightarrow[A \cap V]{u} f$, atunci f este continuă pe A.*

Dem. Din Cor. 1 rezultă că $(\forall)\ x \in A$, $(\exists)\ V \in \mathcal{V}(x)$ a.î. $f|_{A \cap V}$ este continuă, deci P.5.5.9. f continuă în x.

Exemplul 1. Fie $f_n : [-1, 1] \to \mathbf{R}$ $(n \geqslant 1)$ un șir de funcții definit astfel $f_n(x) = |x|^n$. Atunci $(f_n)_{n \geqslant 1}$ converge simplu și neuniform.

Într-adevăr, fie $f : [-1, 1] \to \mathbf{R}$ o funcție definită astfel : $f(x) = 0$, dacă $x \in (-1, 1)$ și $f(\pm 1) = 1$. Atunci f discontinuă și $f_n \xrightarrow{s} f$, deci $(f_n)_{n \geqslant 1}$ nu converge uniform la f.

Exemplul 2. *Fie* $f_n : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$ $(n \geqslant 1)$ *un șir de funcții definit astfel* $f_n(0) = 1$, $f_n(x) = 0$, *dacă* $x \in \left[\frac{1}{n}, \infty\right)$ *și* f_n *afină pe* $\left[0, \frac{1}{n}\right]$. *Atunci* $(f_n)_{n\geqslant 1}$ *converge simplu și neuniform.*

Într-adevăr, fie $f : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$ o funcție definită astfel $f(0) = 1$ și $f(x) = 0$, dacă $x \in \mathbf{R}_+^*$. Atunci f este discontinuă în 0 și $f_n \xrightarrow{s} f$, deci $(f_n)_{n\geqslant 1}$ nu converge uniform.

12.1.12. Teoremă. *Fie* A *o mulțime arbitrară și* $f_n : A \to \mathbf{R}$ $(n \geqslant 1)$ *un șir uniform convergent de funcții mărginite. Atunci limita sa, să o notăm cu* f, *este mărginită și avem* : $\|f\|_\infty \leqslant \sup\limits_{n\geqslant 1} \|f_n\|_\infty$.

Dem. Fie $\varepsilon = 1$; atunci $(\exists)$ $N \geqslant 1$ a.î. $\|f - f_n\|_\infty \leqslant 1$, $(\forall)$ $n \geqslant N$, deci

$$\|f\|_\infty \leqslant \|f - f_N\|_\infty + \|f_N\|_\infty \leqslant 1 + \|f_N\|_\infty < +\infty$$

și deci f este mărginită.

Corolar 1. *Fie* $A \subseteq \mathbf{R}$ *o mulțime și* $f_n : A \to \mathbf{R}$ $(n \geqslant 1)$ *un șir uniform convergent de funcții continue și mărginite. Atunci limita sa este o funcție continuă și mărginită.*

Dem. Aplicăm T.12.1.11. Cor. 1 și T.12.1.12.

Corolar 2. *Fie* A *o mulțime și* $f_n : A \to \mathbf{R}$ $(n \geqslant 1)$ *un șir uniform convergent de funcții mărginite. Atunci* $\sup\limits_{n\geqslant 1} \|f_n\| < +\infty$.

Observația 1. T.12.1.12 poate fi reformulată astfel dacă $f_n \in \mathcal{M}(A)$ $(n \geqslant 1)$ $f \in \mathcal{F}(A)$ și $f_n \xrightarrow{u} f$, atunci $f \in \mathcal{M}(A)$.

Observația 2. Limita punctuală a unui șir de funcții mărginite nu este numaidecît mărginită.

Contraexemplu. Fie $f_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ $(n \geqslant 1)$ un șir de funcții definit astfel $f_n(x) = x$, dacă $|x| \leqslant n$ și $f_n(x) = n$, dacă $|x| > n$. Atunci $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplu și neuniform către funcția $\mathbf{1}_\mathbf{R}$ care este nemărginită.

12.1.13. Teoremă (D i n i). *Fie* $A \subseteq \mathbf{R}$ *o mulțime compactă și* $f_n : A \to \mathbf{R}$ $(n \geqslant 1)$ *un șir de funcții continue. Dacă* $f_{n+1} \leqslant f_n$, $(\forall)$ $n \geqslant 1$ *și* $f_n \xrightarrow{s} 0$, *atunci* $f_n \xrightarrow{u} 0$.

Dem. Fie $\varepsilon > 0$ fixat și $A_n := \{x \in A\,;\ f_n(x) \geqslant \varepsilon\}$ $(n \geqslant 1)$. Mulțimea A fiind compactă, deci închisă și f_n continuă, rezultă că A_n este închisă, $(\forall)$ $n \geqslant 1$. Dacă $x \in A_{n+1}$ avem $f_{n+1}(x) \geqslant \varepsilon$, deci $f_n(x) \geqslant f_{n+1}(x) \geqslant \varepsilon$ și $x \in A_n$, încît $A_{n+1} \subseteq A_n$. Mai departe avem $\bigcap\limits_{n\geqslant 1} A_n = \emptyset$: astfel dacă $(\exists)$ $x_0 \in \bigcap\limits_{n\geqslant 1} A_n$, rezultă $f_n(x_0) \geqslant \varepsilon$, $(\forall)$ $n \geqslant 1$, ceea ce contrazice faptul că $f_n(x_0) \to 0$.

Așadar, $(A_n)_{n\geqslant 1}$ este un șir monoton descrescător de mulțimi închise incluse în A, cu intersecție vidă, deci (T.5.2.5. Cor. 2) $(\exists)$ $N \geqslant 1$ cu $A_N = \emptyset$. Atunci $f_N(x) < \varepsilon$, $(\forall)$ $x \in A$. deci $0 \leqslant f_n(x) \leqslant f_N(x) < \varepsilon$, $(\forall)$ $x \in A \wedge n \geqslant N$, prin urmare $f_n \xrightarrow{u} 0$.

Corolar 1. *Fie* $A \subseteq \mathbf{R}$ *o mulțime compactă și* $f, f_n \in \mathcal{C}(A)$ $n \geqslant 1$) *a.* $f_n(x) \searrow f(x)$, $(\forall)$ $x \in A$. *Atunci* $f_n \xrightarrow{u} f$.

Dem. Aplicăm T.12.1.13 pentru șirul $(f_n - f)_{n\geqslant 1}$.

Observația 1. Dacă funcția f nu este continuă Cor. 1 nu este numaidecît adevărat (v. Exemplul 2 de mai sus).

12.1.14. Teoremă. *Fie* $I \subseteq \mathbf{R}$ *un interval nedegenerat și* $f_n : I \to \mathbf{R}$ $(n \geqslant$ *un șir de funcții derivabile care are proprietățile* : 1° $(\exists)$ $a \in I$ *a.î.* $(f_n(a))_{n\geqslant 1}$ *es*

convergent; 2° $(\exists)\ g : I \to \mathbf{R}$ a.î. $f_n' \xrightarrow[A]{u} g$ $(\forall)\ A \subseteq I$ mărginită. Atunci $(\exists)\ f : I \to \mathbf{R}$ derivabilă cu proprietățile: $f' = g$ și $f_n \xrightarrow[A]{u} f$, $(\forall)\ A \subseteq I$ mărginită.

Dem. Fie $\varepsilon > 0$ și $J \subseteq I$ interval mărginit, fixați, Atunci $(\exists)\ n_\varepsilon \geqslant 1$ a.î.

$$|f_n'(x) - f_m'(x)| < \varepsilon/\delta, \quad (\forall)\ x \in J, \quad (\forall)\ n, m \geqslant n_\varepsilon,$$

unde $\delta = \sup_{x \in J} |x - a|$, deci (T.6.3.4.):

$$|f_n(x) - f_n(a) - (f_m(x) - f_m(a))| = |(f_n - f_m)(x) - (f_n - f_m)(a)| =$$

$$= |x - a| \cdot |(f_n - f_m)'(c_x)| \leqslant (\sup_{x \in A} |x - a|)(\sup_{x \in A} |(f_n - f_m)'(x)|) \leqslant$$

$$\leqslant \delta \cdot \frac{\varepsilon}{\delta} = \varepsilon, \quad (\forall)\ n, m \geqslant n_\varepsilon, \quad (\forall)\ x \in J$$

i deci $(f_n - f_n(a))_{n \geqslant 1}$ este uniform Cauchy pe J. Cum $(f_n(a))_{n \geqslant 1}$ este șir Cauchy. de numere), rezultă imedat că $(f_n)_{n \geqslant 1}$ este uniform Cauchy pe J. De aici și lin T.12.1.8. deducem că $(\exists)\ f : I \to \mathbf{R}$ cu proprietatea că $f_n \xrightarrow[J]{u} f$, $(\forall)\ J \subseteq I$ nterval mărginit. Evident putem înlocui mai departe J cu o mulțime mărginită $A \subseteq I$.

Să arătăm că f este derivabilă și $f' = g$. Fie în acest scop $x_0 \in I$ fixat și $_n(x) := \dfrac{f_n(x) - f_m(x)}{x - x_0}$, $x_0 \in I \setminus \{x_0\}$. Atunci $(\forall)\ K = [x_0 - r,\ x_0 + r] \cap J$ și $_\in K \setminus \{x_0\}$ avem:

$$g_n(x) - g_m(x) = \frac{(f_n - f_m)(x) - (f_n - f_m)(x_0)}{x - x_0} =$$

$$= (f_n - f_m)'(c_x),\ c_x = x_0 + \theta(x - x_0),\ 0 < \theta < 1$$

eci, raționînd ca mai sus, rezultă că $(\forall)\ \varepsilon > 0$ $(\exists)\ n_\varepsilon \geqslant 1$ a.î.

$$|g_n(x) - g_m(x)| \leqslant \sup_{t \in K} |f_n'(t) - f_m'(t)| \leqslant \varepsilon, \quad (\forall)\ x \in K \setminus \{x_0\}, \quad n, m \geqslant n_\varepsilon.$$

Așadar, șirul $(g_n)_{n \geqslant 1}$ este uniform Cauchy pe $K \setminus \{x_0\}$, deci (T.12.1.8.) niform convergent pe $K \setminus \{x_0\}$. Cum $\lim_{x \to x_0} g_n(x) = f_n'(x_0)$, $(\forall)\ n \geqslant 1$, rezultă T.12.1.11.):

$$\lim_{x \to x_0} \lim_{n \to \infty} g_n(x) = \lim_{n \to \infty} \lim_{x \to x_0} g_n(x),$$

eci

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{n \to \infty} f_n'(x_0) = g(x_0)$$

rin urmare f este derivabilă în x_0 și $f'(x_0) = g(x_0)$.

Corolar 1. *Fie $U \subseteq \mathbf{R}$ o mulțime care se poate reprezenta ca o reuniune de ıtervale nedegenerate și $f_n : U \to \mathbf{R}$ $(n \geqslant 1)$ un șir de funcții derivabile care are roprietățile*: 1° $(\exists)\ f : U \to \mathbf{R}$ *a.î.* $f_n \xrightarrow{s} f$; 2° $(\exists)\ g : U \to \mathbf{R}$ *a.î.* $f_n' \xrightarrow[J]{u} f$, *') $J \subseteq U$ interval mărginit. Atunci f este derivabilă, $f' = g$ și $f_n \xrightarrow[J]{u} f$, $(\forall)\ J \subseteq U$ ıterval mărginit.*

Corolar 2. *Fie* $I \subseteq \mathbf{R}$ *un interval mărginit şi* $f_n : I \to \mathbf{R}$ $(n \geq 1)$ *un şir de funcţii derivabile cu proprietăţile* : 1° $(\exists)\ x_0 \in I$ *a.î.* $(f_n(x_0))_{n\geq 1}$ *este convergent* ; 2° $(\exists)\ g : I \to \mathbf{R}$ *a.î.* $f_n' \xrightarrow{u} g$. *Atunci* $(\exists)\ f : I \to \mathbf{R}$ *derivabilă a.î.* $f' = g$ *şi* $f_n \xrightarrow{u} f$.

Observaţia 1. Dacă I este o reuniune de intervale T.12.1.14. nu este numaidecît adevărată.

Contraexemplu. Fie $U = (-1,0) \cup (0,1)$ şi $f_n : U \to \mathbf{R}$ $(n \geq 1)$ un şir de funcţii definit astfel $f_n\Big|_{(0,1)} = \frac{1}{n}$ şi $f_n\Big|_{(-1,0)} = (-1)^n$ $(\forall)\ n \geq 1$. Atunci $(f_n(x))_{n\geq 1}$ este convergent, $(\forall)\ x \in (0,1)$ şi $f_n' = 0$, $(\forall)\ n \geq 1$, deci $(f_n')_{n\geq 1}$ este uniform convergent. Totuşi $(f_n(x))_{n\geq 1}$ nu este convergent pentru nici un x din $(-1, 0)$.

Observaţia 2. T.12.1.14 ca şi Cor. 1—2 ne arată în ce condiţii avem egalitatea $(\lim_{n\to\infty} f_n)' = \lim_{n\to\infty} f_n'$, de aceea ea se numeşte *teorema de derivare termen cu termen a unui şir de funcţii.*

Observaţia 3. Convergenţa uniformă a unui şir $(f_n)_{n\geq 1}$ de funcţii derivabile nu implică numaidecît convergenţa uniformă şi nici chiar simplă a şirului $(f_n')_{n\geq 1}$ al derivatelor.

Contraexemplu. Fie $f_n(x) = \frac{1}{n} \sin nx$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Atunci $f_n \xrightarrow{u} 0$ şi $(f_n'(x))_{n\geq 2}$ este divergent, $(\forall)\ x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Observaţia 4. Fiecare din condiţiile 1° şi 2° din T.12.1.14 este esenţială. Se iau în considerare şirurile $f_n(x) := \frac{1}{n} \sin nx$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ şi $f_n(x) := (-1)^n, (\forall) x \in \mathbf{R}$.

12.1.15. Teoremă. *Fie* $I \subseteq \mathbf{R}$ *un interval,* $f_n : I \to \mathbf{R}$ $(n \geq 1)$ *un şir de funcţii care admit primitive* (i.e. *antiderivabile*) *şi* $f : I \to \mathbf{R}$ *arbitrară. Dacă* $f_n \xrightarrow[A]{u} f$, $(\forall)\ A \subseteq I$ *mărginită, în particular* $f_n \xrightarrow{u} f$, *atunci f admite primitivele* (*este antiderivabilă*).

Dem. Fie $F_n : I \to \mathbf{R}$ $(n \geq 1)$ derivabilă cu $F_n' = f_n$. Înlocuind fiecare $F_n (n \geq 1)$ cu $F_n - F_n(x_0)$, unde x_0 este fixat în I, putem presupune că $F_n(x_0) = 0$, $(\forall)\ n \geq 1$. Aşadar, $(F_n)_{n\geq 1}$ este un şir de funcţii derivabile a.î. $(F_n(x_0))_{n\geq 1}$ este convergent şi $F_n' \xrightarrow[A]{u} f$, $(\forall)\ A \subseteq I$ mărginită. Atunci (T.12.1.14) $(\exists)\ F : I \to \mathbf{R}$ derivabilă cu proprietatea că $F' = f$.
Prin urmare f este antiderivabilă.

Corolar 1. *Fie* $I \subseteq \mathbf{R}$ *un interval şi* $f : I \to \mathbf{R}$ *o funcţie continuă. Atunci f admite primitive* (*i.e. f este antiderivabilă*).

Dem. Fie $K \subseteq I$ un interval compact. Atunci (T.12.1.10), $(\exists)\ f_n : K \to \mathbf{R}$ $(n \geq 1)$ un şir de funcţii poligonale a.î. $f_n \xrightarrow{u} f|_K$. Cum fiecare $f_n (n \geq 1)$ admite primitive (P.8.1.6.), rezultă (T.12.1.15) că $f|_K$ admite primitive, prin urmare (P.8.1.3.), f admite primitive.

Corolar 2. *Fie* $I \subseteq \mathbf{R}$ *un interval* $f_n : I \to \mathbf{R}$ $(n \geq 1)$ *un şir de funcţii care admit primitive* (*i.e. antiderivabile*) *şi* $f : I \to \mathbf{R}$ *o funcţie arbitrară. Dacă* $f_n \xrightarrow[A]{u} f$, $(\forall)\ A \subseteq I$ *mărginită, atunci* $(\forall)\ n \geq 1$, $(\exists)\ F_n$ *o primitivă a lui* f_n *şi* F *o primitivă a lui f a.î.* $F_n \xrightarrow[A]{u} F$, $(\forall)\ A \subseteq I$ *mărginită.*

12.1.16. Teoremă. *Fie* $f_n : [a, b] \to \mathbf{R}$ $(n \geq 1)$ *un şir uniform convergent de funcţii integrabile. Atunci limita sa, să o notăm cu* f, *este integrabilă şi avem relaţia* : $\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n$.

Dem. Fie $n \geq 1$ fixat; cf. T.9.1.14 f_n este mărginită şi $(\exists)\ A_n \subseteq [a, b]$ neglijabilă a.î. f_n este continuă $[a, b] \setminus A_n$. Punem $A := \bigcup_{n\geq 1} A_n$; evident A este neglijabilă şi fiecare $f_n (n \geq 1)$ este continuă pe $[a, b] \setminus A$. Cum $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniform pe $[a, b] \setminus A$ către f, rezultă (T.12.1.11. Cor. 1) că f este continuă pe $[a, b] \setminus A$. Mai departe, din T.12.1.12. rezultă că f este mărginită. Aplicînd T.9.1.14. conchidem că f este integrabilă.

Fie $\varepsilon > 0$ fixat. Atunci $(\exists)\ n_\varepsilon \geq 1$ a.î. $\|f_n - f\|_\infty \leq \dfrac{\varepsilon}{b-a}$, $(\forall)\ n \geq n_\varepsilon$, deci

$$\left|\int_a^b f_n - \int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f_n - f| \leq (b-a)\,\|f_n - f\|_\infty \leq \varepsilon,\ (\forall)\ n \geq n_\varepsilon$$

şi deci

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n = \int_a^b f.$$

Corolar 1. *Fie* $f_n : [a, b] \to \mathbf{R} (n \geq 1)$ *un şir de funcţii continue (resp. riglate) a.î.* $f_n \xrightarrow{u} f$, *unde* $f : [a, b] \to \mathbf{R}$. *Atunci* f *este continuă (resp. riglată) şi avem relaţia* : $\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n$.

Observaţia 1. Dacă şirul $(f_n)_{n\geq 1}$ converge simplu şi neuniform către f, atunci T.12.1.16 nu este numaidecît adevărată.

Contraexemplu. Fie $f_n(x) = nxe^{-nx^2}$, $x \in [0, 1]$. Atunci $f_n \xrightarrow{s} 0$ şi $\int_0^1 f_n = -\frac{1}{2} e^{-nx^2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}(1 - e^{-n}) \to \frac{1}{2}$ $(n \to \infty)$.

Observaţia 2. T.12.1.16 poartă denumirea de teorema de *trecere la limită sub semnul integral*. Ea ne arată în ce condiţii putem scrie $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n$. Cor 1 se numeşte teorema de *integrare termen cu termen a unei serii de funcţii* etc.

12.1.17. Lemă. $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$ *şi* $n \in \mathbf{N}$, *avem relaţiile* :

$1^\circ\ 1 = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$; $2^\circ\ nx = \sum_{k=0}^n k C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$;

$3^\circ\ nx + n(n-1)x^2 = \sum_{k=0}^n k^2 C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$;

$4^\circ\ nx(1-x) = \sum_{k=0}^n (nx - k)^2 C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$.

Dem. În relaţia binomială $(x+y)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k y^{n-k} (*)$ punem $y := 1 - x$ şi obţinem 1°.

Derivînd relaţia $(*)$ în raport cu x, apoi înmulţind cu x obţinem $nx(x-y)^{n-1} = \sum_{k=0}^n k C_n^k x^k y^{n-k}$ $(**)$, de unde pentru $y = 1 - x$ obţinem 2°.

Derivînd acum (**) în raport cu x, apoi înmulțind cu x obținem relația :

$$nx(x+y)^{n-1} + n(n-1)\,x^2(x+y)^{n-2} = \sum_{k=0}^{n} k^2\,C_n^k\,x^k\,y^{n-k}$$

de unde pentru $y = 1 - x$ obținem 3°.

În fine, înmulțind relația 1° cu n^2x^2, pe 2° cu $-2nx$ și pe 3° cu 1, apoi adunîndu-le obținem relația :

$$n^2x^2 - 2n^2x^2 + nx + n(n-1)\,x^2 = \sum_{k=0}^{n} (n^2x^2 - 2nxk + k^2)\,C_n^k\,x^k(1-x)^{n-k},$$

deci

$$nx - nx^2 = \sum_{k=0}^{n} (nx-k)^2\,C_n^k\,x^k(1-x)^{n-k}$$

12.1.18. Teoremă (S. Bernstein). *Fie* $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ *o funcție continuă și* $(B_n)_{n\geqslant 1}$ *un șir de funcții polinomiale definit astfel*

$$B_n(x) := \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k\,x^k(1-x)^{n-k},\ (\forall)\ x \in [0,1].$$

Atunci $B_n \xrightarrow{u} f$ *i.e.* $(B_n)_{n\geqslant 1}$ *converge uniform la* f.

Dem. Vom utiliza următoarele relații (Lema 12.1.17) :

$$1 = \sum_{k=0}^{n} C_n^k\,x^k(1-x)^{n-k},\ x \in \mathbf{R} \tag{1}$$

$$nx(1-x) = \sum_{k=0}^{n} (nx-k)^2\,C_n^k\,x^k\,(1-x)^{n-k},\ x \in \mathbf{R}. \tag{2}$$

Fie $\varepsilon > 0$ fixat. Funcția f fiind continuă și $[0,1]$ compact, este uniform continuă, deci $(\exists)\ \delta > 0$ a.î.

$$|f(x) - f(x')| < \frac{\varepsilon}{2},\ (\forall)\ x,\ x' \in [0,1],\ |x - x'| < \delta \tag{3}$$

Dacă $x \in [0,1]$, vom pune $A_n(x) := \sum_{0\leqslant k\leqslant n,\left|\frac{k}{n}-x\right|\geqslant\delta} C_n^k\,x^k\,(1-x)^{n-k}$. Atunci

$$A_n(x) \leqslant \frac{1}{\delta^2} \cdot \sum_{0\leqslant k\leqslant n,\left|\frac{k}{n}-x\right|\geqslant\delta} \left(x - \frac{k}{n}\right)^2 C_n^k\,x^k(1-x)^{n-k} \overset{(2)}{=} \frac{1}{\delta^2 n^2}\,nx(1-x).$$

Cum $0 \leqslant x(1-x) \leqslant \frac{1}{4}$, $(\forall)\ x \in [0,1]$, rezultă că $A_n(x) \leqslant \frac{1}{4\,\delta^2 n^2}$ (4)

Din (1) rezultă inegalitatea :

$$|f(x) - B_n(x)| = \left|\sum_{k=0}^{n} f(x)\,C_n^k\,x^k(1-x)^{n-k} - \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k\,x^k(1-x)^{n-k}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=0}^{n} \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| C_n^k\,x^k(1-x)^{n-k} \tag{5}$$

Din (3) și (1) rezultă inegalitatea :

$$\sum_{0\leqslant k\leqslant n,\left|\frac{k}{n}-x\right|<\delta}\left|f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right| C_n^k x^k(1-x)^{n-k}\leqslant \frac{\varepsilon}{2}\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k(1-x)^{n-k}=\frac{\varepsilon}{2} \quad (6)$$

În fine, din (4) rezultă inegalitatea :

$$\sum_{0\leqslant k\leqslant n,\left|\frac{k}{n}-x\right|\geqslant\delta}\left|f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right| C_n^k x^k(1-x)^{n-k}\leqslant 2\|f\|_\infty A_n(x)\leqslant 2\|f\|_\infty\frac{1}{4\delta^2 n^2} \quad (7)$$

Ținînd seama de (5), (6), (7) obținem :

$$|f(x)-B_n(x)|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\|f\|_\infty}{2n\delta^2}\leqslant\varepsilon,\ (\forall)\ x\in[0,1],\ (\forall)\ n\geqslant\frac{\|f\|_\infty}{\varepsilon\delta^2},$$

prin urmare $B_n \overset{u}{\to} f$.

Corolar 1 (W e i e r s t r a s s). *Fie* $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ *o funcție continuă. Atunci* $(\exists)\ (P_n)_{n\geqslant 1}$ *un șir de polinoame cu coeficienți reali a.î.* $\sup_{x\in[a,b]}|f(x)-P_n(x)|\xrightarrow[n\to\infty]{}0$

Dem. Fie $(B_n)_{n\geqslant 1}$ polinoamele asociate funcției $F(t)=f(a+t(b-a))$, $t\in[0,1]$ date de T. 12.1.18. și $P_n(x)=B_n\left(\frac{x-a}{b-a}\right)$, $x\in[a,b]$. Atunci

$$\sup_{x\in[a,b]}|f(x)-P_n(x)|=\sup_{t\in[0,1]}|F(t)-B_n(t)\to 0\ (n\to\infty).$$

Corolar 2. *Fie* $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ *o funcție de clasă* $\mathcal{C}^k$, $k\geqslant 1$ *fixat. Atunci* $(\exists)$ $(P_n)_{n\geqslant 1}$ *un șir de polinoame cu coeficienți reali a.î.*

$$\sup_{x\in[a,b]}|P_n^{(i)}(x)-f^{(i)}(x)|\to 0\ (n\to\infty),\ (\forall)\ i=\overline{0,k}$$

Dem. Funcția $f^{(k)}$ fiind continuă, există (T. 12.1.18. Cor 1) $P_n:[a,b]\to\mathbf{R}$ $(n\geqslant 1)$ un șir de funcții polinomiale cu coeficienți reali a.î. $P_n\overset{u}{\to}f^{(k)}$. Din T.12.1.15. Cor 2 rezultă că $(\exists)\ (C_n^1)_{n\geqslant 1}$ un șir de constante reale cu proprietatea că $\int P_n+C_n^{(1)}\overset{u}{\to}f^{(k-1)}$. Aplicăm, în continuare, T.12.1.15. Cor. 2 de $k-1$ ori etc.

Observație. Teorema 12.1.18. a fost generalizată de I. Hlodovski astfel : Fie $f:[0,1]\to\mathbf{R}$ *o funcție de clasă* $\mathcal{C}^k$, $k\in\mathbf{N}$ *fixat și* $(B_n)_{n\geqslant 1}$ *șirul de polinoame definit în* T. 12.1.18. *Atunci* $(\forall)\ i=\overline{0,k}$, *rezultă* $B_n^{(i)}\overset{u}{\to}f^{(i)}$.

12.1.19. Definiție. Fie $A\subseteq\mathbf{R}$ o mulțime și $H\subseteq\mathcal{F}(A)$ o familie de funcții. Vom spune că

· H este *echimărginită* (egal mărginită), dacă $(\exists)\ M>0$ a.î.

$$|f(x)|\leqslant M,\ (\forall)\ x\in A\ \wedge\ f\in H,\ \text{i.e.}\ \sup_{f\in H}\|f\|_\infty<+\infty;$$

· H este *echicontinuă* (egal continuă) în punctul $x_0\in A$ dacă $(\forall)\ \varepsilon>0$, $(\exists)\ \eta=\eta(\varepsilon,x_0,H)>0$ a.î.

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon,\ (\forall)\ x\in A,\ |x-x_0|<\eta\ \wedge\ (\forall)\ f\in H$$

· H este *echicontinuă* (egal continuă), dacă H este echicontinuă în fiecare punct $x_0\in A$.

Observație. În cazul mărginirii unei funcții f, numărul M depinde de f; în cazul echimărginirii unei familii H, numărul M depinde de H, deci *este același pentru fiecare* f *din* H. În cazul continuității unei funcții în punctul x_0, numărul

η depinde de ε, x_0 și f; în cazul echicontinuității unei familii H, numărul η depinde de ε, x_0 și H, deci este *același pentru fiecare f din H.*

12.1.20. Teoremă (A r z e l a—A s c o l i). *Fie $A \subseteq \mathbf{R}$ o mulțime compactă și $H \subseteq \mathcal{C}(A)$ o familie de funcții continue. Atunci* $(\forall)\ (f_n)_{n\geqslant 1} \subseteq H$, $(\exists)\ (f_{n_k})_{k\geqslant 1}$ *un subșir uniform convergent al lui* $(f_n)_{n\geqslant 1} \Leftrightarrow$ *H este echicontinuă și echimărginită.*

Dem. [25].

12.2. Serii de funcții

12.2.1. Definiție. Fie A o mulțime și $f_n : A \to \mathbf{R}$ $(n \geqslant 1)$ un șir de funcții. Perechea $((f_n)_{n\geqslant 1}, (s_n)_{n\geqslant 1})$ unde $s_n = \sum_{i=1}^{n} f_i$, se numește *serie de funcții* de termen general f_n și se notează cu $\sum_{n\geqslant 1} f_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} fn$ sau $\sum_{n} f_n$; funcția s_n se numește *suma parțială de ordin n* a seriei date. Vom spune că seria $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ este:

· *simplu convergentă*, dacă seria numerică $\sum_{n\geqslant 1} f_n(x)$ este convergentă, $(\forall)\ x \in A$;

· *absolut convergentă*, dacă seria numerică $\sum_{n\geqslant 1} |f_n(x)|$ este convergentă $(\forall)\ x \in A$;

· *uniform convergentă*, dacă șirul de funcții $(s_n)_{n\geqslant 1}$ este uniform convergent;

· *normal convergentă*, dacă există o serie numerică cu termeni nenegativi $\sum_{n\geqslant 1} c_n$ a.î. $|f_n(x)| \leqslant c_n$, $(\forall)\ x \in A \ \wedge\ n \geqslant 1$.

Cea mai mare submulțime $M \subseteq A$ cu proprietatea că seria $\sum_{n\geqslant 1} f_n(x)$ este convergentă, $(\forall)\ x \in M$, se numește *mulțime de convergență* a seriei date; obținem în acest mod o funcție $f : M \to \mathbf{R}$ cu $f(x) = \sum_{n\geqslant 1} f_n(x)$, $(\forall)\ x \in M$, numită *suma seriei* $\sum_{n\geqslant 1} f_n$.

12.2.2. Propoziție. *Fie A o mulțime și $f_n \in \mathcal{F}(A)$ $(n \geqslant 1)$. Atunci avem:*

1° $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ *uniform convergentă* $\Rightarrow$ $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ *simplu convergentă*;

2° $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ *normal convergentă* $\Rightarrow$ $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ *absolut convergentlă* $\Rightarrow$ $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ *simplu convergentă*;

3° $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ *normal convergentă* $\Leftrightarrow$ $\sum_{n\geqslant 1} |f_n|$ *normal convergentă* $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sum_{n\geqslant 1} \sup_{x\in A} |f_n(x)| < +\infty$

4° *In 1° și 2° implicațiile reciproce nu sînt numaidecît adevărate.*

Dem. 2° Dacă $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ este normal convergentă, există $\sum_{n\geqslant 1} c_n$ o serie convergentă cu termeni nenegativi a.î. $|f_n(x)| \leqslant c_n$, $(\forall)\ x \in A$, $(\forall)\ n \geqslant 1$. Atunci $(\forall)\ x \in A$, seria $\sum_{n\geqslant 1} |f_n(x)|$ este majorată de seria $\sum_{n\geqslant 1} c_n$, deci prima serie este convergentă etc.

12.2.3. Propoziție. *Fie A o mulțime și $f_n \in \mathcal{F}(A)$ $(n \geqslant 1)$. Atunci seria $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ este simplu (resp. absolut, resp. uniform, resp. normal) convergentă* $\Leftrightarrow$ $(\forall)/(\exists)$ *$N \geqslant 1$ a.î. seria $\sum_{n\geqslant N} f_n$ este simplu (resp. absolut, resp. uniform, resp. normal) convergentă.*

Dem. Fixăm $N \geqslant 1$ şi fie $s_n := \sum_{i=1}^{n} f_i$ şi $\sigma_n := \sum_{i=1}^{n} f_{N+1}$ $(n \geqslant 1)$. Evident $s_{n+N} = s_N + \sigma_n$, $(\forall)\ n \geqslant 1$. Atunci: seria $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ uniform convergentă $\Leftrightarrow$ şirul $(s_n)_{n\geqslant 1}$ uniform convergent $\Leftrightarrow$ şirul $(\sigma_n)_{n\geqslant 1}$ uniform convergent $\Leftrightarrow$ seria $\sum_{n>N} f_n$ este uniform convergentă etc.

12.2.4. Propoziţie. *Fie A o mulţime şi $f_n \in \mathcal{F}(A)$ $(n \geqslant 1)$. Dacă seria $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ este uniform (resp. normal) convergentă, atunci $f_n \overset{u}{\to} 0$ şi $r_n \overset{u}{\to} 0$, unde $r_n := \sum_{k>n} f_n (n \geqslant 1)$.*

Dem. Fie $s_n := \sum_{k=1}^{n} f_k (n \geqslant 1)$. Seria $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ fiind uniform convergentă, şirul $(s_n)_{n\geqslant 1}$ este convergent; fie f limita sa. Atunci $f_n = s_n - s_{n-1} \overset{u}{\to} f - f = 0$. Mai departe din P.12.2.3. rezultă că $(\forall)\ n \geqslant 1$, seria $\sum_{k>n} f_k$ este convergentă, deci r_n are sens. Cum avem $f = s_n + r_n$, $(\forall)\ n \geqslant 1$, rezultă că $r_n = f - s_n \overset{u}{\to} f - f = 0$.

Observaţie. Dacă $f_n \overset{u}{\to} 0$, atunci seria $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ nu este numaidecît convergentă.

12.2.5. Propoziţie. *Fie A o mulţime şi $f, g, f_n \in \mathcal{F}(A)$, $(n \geqslant 1)$. Atunci:*

1° *Dcacă seria $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ este uniform convergentă şi are suma f şi $\sup_{x\in A} |g(x)| < +\infty$, rezultă că seria $\sum_{n\geqslant 1} f_n g$ este uniform convergentă şi are suma fg;*

2° *Dacă seria $\sum_{n\geqslant 1} (f_n g)$ este uniform convergentă şi are suma fg şi $\inf_{x\in A} |g(x)| > 0$, rezultă că seria $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ este uniform convergentă şi are suma f.*

Dem. 1° Aplicăm P.12.1.3. (1°) pentru şirul $s_n = \sum_{k=1}^{n} f_k$ $(n \geqslant 1)$ etc.

12.2.6. Definiţie. Fie A o mulţime şi $f_n, g_n : A \to \mathbf{R}_+ (n \geqslant 1)$. Vom spune că seria $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ este *majorată* de seria $\sum_{n\geqslant 1} g_n$ şi vom scrie $\sum_{n\geqslant 1} f_n \ll \sum_{n\geqslant 1} g_n$, dacă $(\exists)\ M > 0$ şi $n_0 \geqslant 1$ a.î. $f_n(x) \leqslant M g_n(x)$, $(\forall)\ x \in A \wedge n \geqslant n_0$. Vom spune că cele două serii sînt *echivalente* şi vom scrie $\sum_{n\geqslant 1} f_n \sim \sum_{n\geqslant 1} g_n$, dacă fiecare din ele o majorează pe cealaltă.

12.2.7. Propoziţie. *Fie A o mulţime şi $f_n, g_n : A \to \mathbf{R}_+ (n \geqslant 1)$. Dacă $\sum_{n\geqslant 1} f \ll \sum_{n\geqslant 1} g_n$ şi seria $\sum g_n$ este simplu (resp. uniform, resp. normal) convergentă, atunci seria $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ este simplu (resp. uniform, resp. normal) convergentă.*

Dem. Cf. ipotezei $(\exists)\ M > 0$, $(\exists)\ n_0 \geqslant 1$ a.î. $f_n(x) \leqslant M g_n(x)$, $(\forall)\ x \in A$, $(\forall)\ n \geqslant n_\varepsilon$. Fixăm $\varepsilon > 0$ şi să presupunem seria $\sum_{n\geqslant 1} g_n$ uniform convergentă. Atunci T.12.1.8. $\sum_{n\geqslant 1} g_n$ este uniform Cauchy, deci $(\exists)\ N \geqslant 1$, evident putem lua $N \geqslant n_0$, a.î. $\sum_{k=n}^{n+p} g_k(x) \leqslant \varepsilon/M$, $(\forall)\ n \geqslant N \wedge p \geqslant 1$. Atunci:

$$\sum_{k=n}^{n+p} f_k \leqslant \sum_{k=n}^{n+p} M g_k(x) \leqslant M.\ \varepsilon/_M = \varepsilon,\ (\forall)\ x \in A,\ (\ )\ n \geqslant N \wedge p \geqslant 1,$$

deci $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ este uniform Cauchy şi deci (T.12.1.8.) uniform convergentă.

Dacă $\sum_{n\geq 1} g_n$ este normal convergentă, avem (P. 12.2.2. (3°)) $\sum_{n\geq 1} \sup_{x\in A} g_n(x) < +\infty$, deci $\sum_{n\geq n_0} \sup_{x\in A} f_n(x) \leq M \sum_{n\geq n_1} \sup_{x\in A} g_n(x) < +\infty$ și deci (P.12.2.2. (3°)) $\sum_{n\geq 1} f_n$ este normal convergentă.

Corolar 1. *Fie A o mulțime și $f_n, g_n : A \to \mathbf{R}_+ (n \geq 1)$ a.î. $\sum_{n\geq 1} f_n \sim \sum_{n\geq 1} g_n$. Atunci $\sum_{n\geq 1} f_n$ este simplu (resp. uniform, resp. normal) convergentă $\Leftrightarrow$ $\sum_{n\geq 1} g_n$ este simplu (resp. uniform, resp. normal) convergentă.*

12.2.8. Propoziție. *Fie $A \subseteq \mathbf{R}$ o mulțime și $f_n \in \mathcal{C}(A)$ $(n \geq 1)$. Atunci seria $\sum_{n\geq 1} f_n$ este uniform (resp. normal) convergentă pe o mulțime $B \subseteq A \Leftrightarrow$ seria $\sum_{n\geq 1} f_n$ este uniform (resp. normal) convergentă pe $\bar{B} \cap A$.*

Dem. Aplicăm P.12.1.9. pentru șirul $s_n := \sum_{k=1}^{n} f_k (n \geq 1)$.

Corolar 1. *Fie $A \subseteq \mathbf{R}$ o mulțime și $f_n \in \mathcal{C}(A)$ $(n \geq 1)$; presupunem că $(\exists)$ $x_0 \in A' \setminus A$ cu proprietatea că fiecare $f_n (n \geq 1)$ are limită finită în x_0, să o notăm cu y_n. Dacă seria $\sum_{n\geq 1} y_n$ nu este convergentă, atunci seria $\sum_{n\geq 1} f_n$ nu este uniform convergentă.*

Dem. Se reia raționamentul din P.12.1.9. Cor. 1.

12.2.9. Propoziție. *Fie $A \subseteq \mathbf{R}$ o mulțime compactă și f, $f_n \in \mathcal{C}(A, \mathbf{R}_+)$ $(n \geq 1)$ a.î. $\sum_{n\geq 1} f_n(x) = f(x)$, $(\forall)$ $x \in A$. Atunci seria $\sum_{n\geq 1} f_n$ este uniform convergentă.*

Dem. Aplicăm T.12.1.13. Cor. 1 pentru șirul $(s_n)_{n\geq 1}$ cu $s_n = \sum_{i=1}^{n} f_i$.

12.2.10. Teoremă (C a u c h y). *Fie A o mulțime și $f_n \in \mathcal{F}(A)$ $(n \geq 1)$. Atunci seria $\sum_{n\geq 1} f_n$ este uniform convergentă $\Leftrightarrow$ $(\forall)$ $\varepsilon > 0$, $(\exists)$ $n_\varepsilon \geq 1$ a.î.* avem $|f_{n+1}(x) + \ldots + f_{n+p}(x)| \leq \varepsilon$, $(\forall)$ $x \in A$, $(\forall)$ $n \geq n_\varepsilon \wedge p \geq 1$.

Dem. Seria $\sum_{n\geq 1} f_n$ este uniform convergentă $\overset{12.1.8}{\Leftrightarrow}$ șirul $\left(\sum_{i=1}^{n} f_i\right)_{n\geq 1}$ este uniform Cauchy $\Leftrightarrow$ $(\forall)$ $\varepsilon > 0$ $(\exists)$ $n_\varepsilon \geq 1$ a.î. $|s_{n+p}(x) - s_n(x)| \leq \varepsilon$, $(\forall)$ $x \in A$, $(\forall)$ $n \geq n_\varepsilon \wedge p \geq 1 \Leftrightarrow$ $(\forall)$ $\varepsilon > 0$, $(\exists)$ $n_\varepsilon \geq 1$ a.î. $|f_{n+1}(x) + \ldots + f_{n+p}(x)| \leq \varepsilon$, $(\forall)$ $x \in A$, $(\forall)$ $n > n_\varepsilon \wedge p \geq 1$.

Corolar 1. *Fie A o mulțime și $f_n \in \mathcal{F}(A)$ $(n \geq 1)$. Dacă seria $\sum_{n\geq 1} |f_n|$ este uniform convergentă, atunci și seria $\sum_{n\geq 1} f_n$ este uniform convergentă.*

Dem. Fie $\varepsilon > 0$ fixat. Seria $\sum_{n\geq 1} |f_n|$ fiind uniform convergentă, $(\exists)$ $n_\varepsilon \geq 1$ a.î.

$$|f_{n+1}(x)| + \ldots + |f_{n+p}(x)| \leq \varepsilon, (\forall)\ x \in A,\ (\forall)\ n \geq n_\varepsilon \wedge p \geq 1,$$

deci

$$|f_{n+1}(x) + \ldots + f_{n+p}(x)| \leq \varepsilon, (\forall)\ x \in A, (\forall)\ n \geq n_\varepsilon \wedge p \geq 1,$$

prin urmare (T.12.2.10.) seria $\sum_{n\geq 1} f_n$ este uniform convergentă.

Observație. Cor. 1 poate fi reformulat astfel : *orice serie absolut uniform convergentă este uniform convergentă.*

12.2.11. Teoremă. *Fie A o mulțime și $f_n \in \mathcal{F}(A)$ $(n \geq 1)$. Dacă seria $\sum_{n\geq 1} f_n$ este normal convergentă, atunci ea este uniform convergentă.*

Dem. $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ fiind normal convergentă, $(\exists)\ \sum_{n\geqslant 1} c_n$ o serie numerică convergentă cu termeni nenegativi a.î. $|f_n(x)| \leqslant c_n (\forall)\ x \in A$ și $n \geqslant 1$. Fie $\varepsilon > 0$ fixat; seria $\sum_{n\geqslant 1} c_n$ fiind convergentă, $(\exists)\ n_\varepsilon \geqslant 1$ a.î. (T.3.1.11.):

$$\sum_{i=n+1}^{n+p} c_i \leqslant \varepsilon,\ (\forall)\ n \geqslant n_\varepsilon \wedge p \geqslant 1.$$

Atunci

$$\sum_{i=n+1}^{n+p} |f_i(x)| \leqslant \sum_{i=n+1}^{n+p} c_i \leqslant \varepsilon,\ (\forall)\ \ x \in A,\ \ (\forall)\ n \geqslant n_\varepsilon \wedge p \geqslant 1,$$

deci (T.12.2.10.) seria $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ este uniform convergentă.

Observație. Reciproca T.12.2.11. nu este numaidecît adevărată.

12.2.12. Teoremă. *Fie $A \subseteq \mathbf{R}$ o mulțime, $x_0 \in A'$ $[\overline{\mathbf{R}}]$ un punct și $f_n \in \mathcal{F}(A)$ $(n \geqslant 1)$ un șir de funcții care au fiecare limită finită în punctul x_0. Dacă seria $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ este uniform convergentă, fie f suma sa, atunci seria numerică $\sum_{n\geqslant 1} \lim_{x\to x_0} f_n(x)$ este convergentă și are suma egală cu $\lim_{x\to x_0} f(x)$.*

Dem. Aplicăm T.12.1.11. pentru șirul $s_n := \sum_{k=1}^{n} f_k$, $(n \geqslant 1)$, observînd că $\lim_{x\to x_0} s_n(x)$ există și este finită și anume $\lim_{x\to x_0} s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \lim_{x\to x_0} f_n(x)$.

Observație. Teorema 12.2.12 ne arată în ce condiții putem scrie relația:

$$\lim_{x\to x_0} \sum_{n\geqslant 1} f_n(x) = \sum_{n\geqslant 1} \lim_{x\to x_0} f_n(x)$$

12.2.13. Teoremă (K. Weierstrass). *Fie $A \subseteq \mathbf{R}$ și $f_n \in \mathcal{F}(A)$ $(n \geqslant 1)$. Dacă fiecare funcție $f_n (n \geqslant 1)$ este continuă în $x_0 \in A$ (resp. pe A) și seria $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ este uniform convergentă, în particular normal convergentă, atunci suma ei este o funcție continuă în x_0 (resp. pe A).*

Dem. Aplicăm T.12.1.11. Cor. 1 pentru șirul de funcții $s_n := \sum_{k=1}^{n} f_k$ $(n \geqslant 1)$, care sînt continue în x_0 (resp. pe A). Dacă seria $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ este normal convergentă, ea este uniform convergentă (T.12.2.11.) și raționamentul continuă ca mai sus.

12.2.14. Teoremă. *Fie A o mulțime și $f_n \in \mathcal{M}(A)$ $(n \geqslant 1)$. Dacă seria $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ este uniform convergentă, în particular normal convergentă, atunci suma sa este funcție mărginită.*

Dem. Aplicăm T.12.1.12. și T.12.2.11. pentru șirul de funcții $s_n := \sum_{k=1}^{n} f_k$ $(n \geqslant 1)$, observînd că fiecare funcție $s_n (n \geqslant 1)$ este mărginită.

Corolar 1. *Fie $A \subseteq \mathbf{R}$ o mulțime și $f_n \in \mathcal{B}(A)$ $(n \geqslant 1)$. Dacă seria $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ este uniform convergentă, în particular normal convergentă, atunci suma sa, să o notăm cu f, este o funcție continuă și mărginită i.e. $f \in \mathcal{B}(A)$.*

Dem. Din T.12.2.14. rezultă $f \in \mathcal{M}(A)$, iar din T.12.2.13. rezultă $f \in \mathcal{C}(A)$, deci $f \in \mathcal{M}(A) \cap \mathcal{C}(A) = \mathcal{B}(A)$.

12.2.15. Teoremă. *Fie* $\sum_{n\geq 1} f_n$, *unde* $f_n \in \mathcal{F}([a,b])$, *o serie uniform convergentă de funcții integrabile și f suma sa. Atunci f este integrabilă și avem* : $\int_a^b f = \sum_{n\geq 1} \int_a^b f_n$.

Dem. Fie $s_n := \sum_{k=1}^{n} f_k (n \geq 1)$. Obținem astfel un șir $(s_n)_{n\geq 1}$ de funcții integrabile (T.9.2.5.) cu $s_n \xrightarrow{u} f$. Atunci (T.12.1.16.) f este integrabilă și avem :

$$\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} \int_a^b s_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_a^b f_k,$$

prin urmare seria numerică $\sum_{n\geq 1} \int_a^b f_n$ este convergentă și are suma $\int_a^b f$.

Corolar 1. *Fie* $\sum_{n\geq 1} f_n$, *unde* $f_n \in \mathcal{F}([a,b])$, *o serie uniform convergentă de funcții continue și f suma sa. Atunci f este continuă și avem* : $\int_a^b f = \sum_{n\geq 1} \int_a^b f_n$.

Observație. T.12.2.15. ne arată în ce condiții putem scrie relația : $\int_a^b \left(\sum_{n\geq 1} f_n\right) = \sum_{n\geq 1} \int_a^b f_n$, de aceea se numește *teorema de integrare termen cu termen* a unei serii de funcții.

12.2.16. Teoremă. *Fie* $I \subseteq \mathbf{R}$ *un interval nedegenerat și* $f_n : I \to \mathbf{R}$ $(n \geq 1)$ *un șir de funcții derivabile care are proprietățile* : 1° $(\exists)\ x_0 \in I$ a.î. *seria numerică* $\sum_{n\geq 1} f_n(x_0)$ *este convergentă*; 2° *seria* $\sum_{n\geq 1} f_n'$ *este uniform convergentă pe fiecare mulțime mărginită* $A \subseteq I$, *fie g suma sa. Atunci* $(\exists)\ f : I \to \mathbf{R}$ *derivabilă a.î.* $f' = g$ *și* $\sum_{n\geq 1} f_n$ *este uniform convergentă pe fiecare mulțime mărginită* $A \subseteq I$ *și are suma f*.

Dem. Fie $s_n := \sum_{k=1}^{n} f_k (n \geq 1)$. Din ipoteză rezultă că $(s_n(x_0))_{n\geq 1}$ este convergent și $s_n' \xrightarrow[A]{u} g$, $(\forall)\ A \subseteq I$ mărginită. Atunci (T.12.1.14.), $(\exists)\ f : I \to \mathbf{R}$ derivabilă a.î. $f' = g$ și $s_n \xrightarrow[A]{u} f$, $(\forall)\ A \subseteq I$ mărginită. De aici rezultă că seria $\sum_{n\geq 1} f_n$ este uniform convergentă pe fiecare mulțime mărginită $A \subseteq I$ și are suma f.

Corolar 1. *Fie* $I \subseteq \mathbf{R}$ *un interval mărginit nedegenerat și* $f_n : I \to \mathbf{R}$ $(n \geq 1)$ *un șir de funcții derivabile cu proprietățile:* 1° $(\exists)\ x_0 \in I$ *a.î. seria* $\sum_{n\geq 1} f_n(x_0)$ *este convergentă*; 2° *Seria* $\sum_{n\geq 1} f_n'$ *este uniform convergentă, fie g suma sa. Atunci seria* $\sum_{n\geq 1} f_n$ *este uniform convergentă și are suma o funcție derivabilă f cu* $f' = g$.

Corolar 2. *Fie* $I \subseteq \mathbf{R}$ *un interval nedegenerat și* $f_n : I \to \mathbf{R}$ $(n \geq 1)$ *un șir de funcții derivabile cu proprietățile* : 1° *Seria* $\sum_{n\geq 1} f_n$ *este punctual convergentă fie f suma sa*; 2° *Seria* $\sum_{n\geq 1} f_n'$ *este uniform convergentă, fie g suma sa. Atunci seria* $\sum_{n\geq 1} f_n$ *este uniform convergentă pe fiecare mulțime compactă* $A \subseteq \mathbf{R}$, *funcția f este derivabilă și* $f' = g$.

Corolar 3. *Fie* $I \subseteq \mathbf{R}$ *un interval și* $f_n \in \mathcal{F}(I)$ $(n \geq 1)$ *un șir de funcții care admit primitive a.î. seria* $\sum_{n\geq 1} f_n$ *este uniform convergentă pe fiecare mulțime mărginită* $A \subseteq I$. *Atunci suma seriei date este o funcție care admite primitive.*

Dem. Fie $x_0 \in I$ fixat și F_n o primitivă a lui $f_n (n \geqslant 1)$. Aplicăm mai departe T.12.1.15 pentru șirul de funcții $(F_n - F_n(x_0))_{n \geqslant 1}$

Observație. T.12.2.16. ne arată în ce condiții putem scrie relația $(\sum_{n \geqslant 1} f_n)' = \sum_{n \geqslant 1} f_n'$, de aceea se numește *teorema de derivare termen cu termen* a unei serii de funcții.

12.2.17. Propoziție. *Să se arate că există* $f: [0,1] \to \mathbf{R}$ *o funcție continuă și nicăieri derivabilă.*

Dem. Considerăm $f_n : [0,1] \to \mathbf{R}$ $(n \geqslant 1)$ un șir de funcții definit astfel (fig. 60):

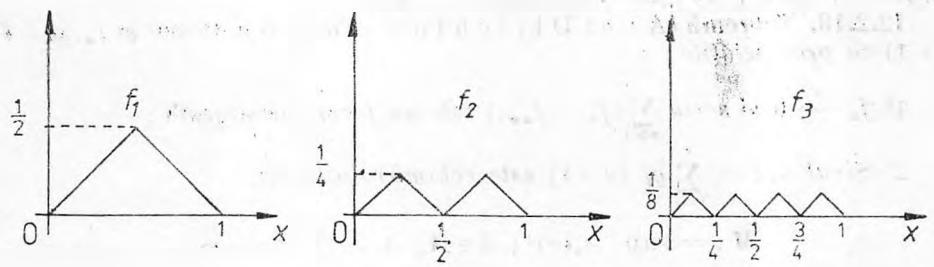


Fig. 60

Evident f_n este continuă pe $[0,1]$ și $\|f_n\|_\infty \leqslant \frac{1}{2^n}$, $(\forall)\ n \geqslant 1$. Așa dar seria de funcții $\sum_{n \geqslant 1} f_n$ este majorată pe $[0,1]$ de seria numerică convergentă $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{2^n}$, deci (T.12.2.14. Cor. 1) suma sa, să o notăm cu f, este o funcție continuă pe $[0,1]$. Evident există intervalele $J_1^n, J_2^n, \ldots J_{2^n}^n$ cu $|J_i^n| = \frac{1}{2^n}$ și f_n afină pe fiecare interval $J_i^n (1 \leqslant i \leqslant 2^n)$.

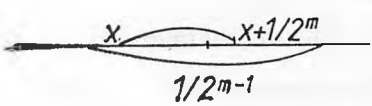
Dacă $x,\ x \pm 1/2^m \in [0,1]$ și $0 \leqslant m \leqslant n$, avem $f_n(x \pm 1/2^m) = f_n(x)$.

Dacă $x,\ x + h \in J_i^n$, atunci $\frac{f_n(x+h) - f_n(x)}{h} = \pm 1$

Așadar $(\forall)\ x \in [0,1]$ și $h_m = \pm 1/2^m (m \geqslant 1)$, avem relația

$$\frac{f(x+h_m) - f(x)}{h_m} = \sum_{n \geqslant 1} \frac{f_n(x+h_m) - f_n(x)}{h_m} = \sum_{n=1}^{m-1} \frac{f_n(x+h_m) - f_m(x)}{h}$$

Să fixăm $x \in [0,1]$ și $m \geqslant 1$; evident există $J_i^{m-1} \ni x$. Cum $|J_i^{m-1}| = 1/2^{m-1}$, avem că $x + 1/2^m$ sau $x - 1/2^m \in J_i^{m-1}$ (fig. 61)



Fig, 61

Alegem $h_m = +$ (resp. $-$) $1/2^m$ a.î. $x + h_m \in J_i^{m-1}$. Atunci avem :

$$\frac{f_n(x + h_m) - f_n(x)}{h_m} = \pm 1 \ (\forall) \quad n = 1, 2, \ldots m - 1,$$

deoarece din felul cum a fost ales h_m, avem că x și $x + h_m$ aparțin simultan unor intervale J_i^1, $J_i^2, \ldots J_i^{m-1}$, în care $f_1, \ldots, f_{m-1}$, sînt respectiv, afine.

Prin urmare putem scrie

$$(\forall) n \geqslant 1 \Rightarrow \frac{f(x + h_m) - f(x)}{h_m} = \sum_{i=1}^{m-1} \varepsilon_i (\varepsilon_i = \pm 1), \text{ deci } \lim_{m \to \infty} \frac{f(x + h_m) - f(x)}{h_m}$$

nu există și deci f nu este derivabilă în x etc.

12.2.18. Teoremă (A b e l-D i r i c h l e t). *Fie A o mulțime și $f_n, g_n \in \mathcal{F}(A)$ $(n \geqslant 1)$ cu proprietățile :*

1° $f_n \xrightarrow{u} 0$ *și seria* $\sum_{n \geqslant 1} |f_n - f_{n+1}|$ *este uniform convergentă ;*

2° *Șirul* $s_n := \sum_{i=1}^{n} g_i$ $(n \geqslant 1)$ *este echimărginită i.e.*

$$M := \sup \{ |s_n(x)| ; \ x \in A, \ n \geqslant 1 \} < + \infty.$$

Atunci seria $\sum_{n \geqslant 1} f_n g_n$ *este uniform convergentă.*

Dem. Fie $x \in A$ fixat; punînd în T.3.2.11. $a_i = f_i(x)$ și $b_i = g_i(x)$ obținem :

$$\left| \sum_{i=n}^{n+p} f_i(x)\, g_i(x) \right| \leqslant \sum_{i=n}^{n+p} |f_i(x) - f_{i+1}(x)|\, |s_i(x)| + |f_n(x)\, s_{n-1}(x)| +$$

$$+ |f_{n+p}(x)\, s_{n+p}(x)| \leqslant M \left(\sum_{i=n}^{n+p} |f_i(x) - f_{i+1}(x)| + |f_n(x)| + |f_{n+p}(x)| \right)$$

Fie $\varepsilon > 0$ fixat. Seria $\sum_{n \geqslant 1} |f_n - f_{n+1}|$ fiind uniform convergentă, rezultă (T.12.2.10. că $(\exists)$ $N_1 \geqslant 1$ a.î.

$$\sum_{i=n}^{n+p} |f_i(x) - f_{i+1}(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{3M}, \ (\forall) \ x \in A, \ (\forall) \ n \geqslant N_1 \wedge p \geqslant 1$$

Deoarece $f_n \xrightarrow{u} 0$, $(\exists)$ $N_2 \geqslant 1$ a.î. $|f_n(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{3M}$, $(\forall)$ $x \in A$ $(\forall)$ $n \geqslant N_2$.

Atunci, dacă $n \geqslant N := \max \{N_1, N_2\}$, avem :

$$\left| \sum_{i=n}^{n+p} f_i(x)\, g_i(x) \right| \leqslant M \left(\frac{\varepsilon}{3M} + \frac{\varepsilon}{3M} + \frac{\varepsilon}{3M} \right) = \varepsilon, \ (\forall) \ x \in A, \ (\forall) \quad n \geqslant N,$$

prin urmare (T.12.2.10.) seria $\sum_{n \geqslant 1} f_n g_n$ este uniform convergentă.

Corolar 1. *Fie A o mulțime și $f_n, g_n \in \mathcal{F}(A)$ $(n \geqslant 1)$ cu proprietățile :*

1° $f_1 \geqslant f_2 \geqslant \ldots \geqslant f_n \geqslant \ldots$; $f_n \xrightarrow{u} 0$;

2° *Șirul* $s_n := \sum_{i=1}^{n} g_i (n \geqslant 1)$ *este echimărginit.*

Atunci seria $\sum_{n \geqslant 1} f_n\, g_n$ *este uniform convergentă*

Dem. Deoarece $\sigma_n := \sum_{i=1}^{n} |f_i - f_{i+1}| = f_1 - f_{n+1} \xrightarrow{u} f_1$ $(n \to \infty)$, rezultă că seria $\sum_{n\geqslant 1} |f_n - f_{n+1}|$ este uniform convergentă, deci putem aplica T.12.2.18.

Corolar 2. *Fie A o mulțime și $f_n \in \mathfrak{M}(A)$, $g_n \in \mathfrak{F}(A)(n \geqslant 1)$ cu proprietatea că seriile $\sum_{n\geqslant 1} |f_n - f_{n+1}|$ și $\sum_{n\geqslant 1} g_n$ sînt uniform convergente. Atunci seria $\sum_{n\geqslant 1} f_n g_n$ este uniform convergentă.*

Dem. Seria $\sum_{n\geqslant 1} |f_n - f_{n+1})$ fiind uniform convergentă, rezultă (T.12.2.10 Cor. 1) că seria $\sum_{n\geqslant 1} (f_n - f_{n+1})$ este uniform convergentă, deci șirul $\sigma_n := f_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (f_{k+1} - f_k)$ $(n \geqslant 1)$, este uniform convergent; fie f limita sa. Evident $\sigma_n \in \mathfrak{M}(A)$, $(\forall)\ n \geqslant 1$, deci (T.12.1.12.) $f \in \mathfrak{M}(A)$. Punem mai departe $h_n := f_n - f$ $(n \geqslant 1)$ și observăm că $h_n \xrightarrow{u} 0$ $(n \to \infty)$ și $h_n - h_{n+1} = f_n - f_{n+1}$, $(\forall)\ n \geqslant 1$, deci seria $\sum_{n\geqslant 1} |h_n - h_{n+1}|$ este uniform convergentă. Atunci (T.12.12.18.) seria $\sum_{n\geqslant 1} h_n g_n$ este uniform convergentă. Cum $h_n g_n = f_n g_n - f g_n$, $(\forall) n \geqslant 1$ și seria $\sum_{n\geqslant 1} f g_n$ este uniform convergentă (P.12.2.5.(1°)), rezultă că seria diferență i.e. seria $\sum_{n\geqslant 1} f_n g_n$ este uniform convergentă.

Corolar 3. *Fie A o mulțime și $f_n \in \mathfrak{M}(A)$, $g_n \in \mathfrak{F}(A)$, $(n \geqslant 1)$, cu proprietățile:*

1° $(f_n)_{n\geqslant 1}$ este monoton și uniform convergent;

2° Seria $\sum_{n\geqslant 1} g_n$ este uniform convergentă.

Atunci seria $\sum_{n\geqslant 1} f_n g_n$ este uniform convergentă.

Dem. Presupunem $(f_n)_{n\geqslant 1}$ monoton crescător și fie f limita sa. Atunci $\sum_{k=1}^{n-1} |f_k - f_{k+1}| = f_n - f_1 \xrightarrow{u} f - f_1 (n \to \infty)$, deci seria $\sum_{n\geqslant 1} |f_n - f_{n+1}|$ este uniform convergentă. Aplicăm mai departe Cor. 2.

Corolar 4 (Leibniz). *Fie A o mulțime și $f_n \in \mathfrak{F}(A)$ $(n \geqslant 1)$ cu proprietățile: $f_n \xrightarrow{u} 0$ și seria $\sum_{n\geqslant 1} |f_{n+1} - f_n|$ este uniform convergentă (resp. $(f_n)_{n\geqslant 1}$ monoton). Atunci seria $\sum_{n\geqslant 1} (-1)^{n+1} f_n$ este uniform convergentă.*

Dem. Aplicăm T.12.2.18. pentru șirurile $(f_n)_{n\geqslant 1}$ și $((-1)^n)_{n\geqslant 1}$.

Observație. Putem înlocui în T.12.2.18. și Cor. 1-3 unul din cele două șiruri $(f_n)_{n\geqslant 1}$ și $(g_n)_{n\geqslant 1}$, prin șiruri numerice. Dacă $A \subseteq \mathbf{R}$ și $f_n \in \mathfrak{C}(A)$, $(\forall)\ n \geqslant 1$, atunci, ținînd seama de teorema lui Dini, putem înlocui condiția 1° prin condiția 1') $f_n(x) \searrow 0$, $(\forall)\ x \in A$.

12.3. Serii de puteri

Seriile de puteri constituie o generalizare naturală a funcțiilor polinomiale și o particularizare a seriilor de funcții. Seriile de puteri au alături de proprietățile generale pe care le au seriile de funcții și unele proprietăți speciale, care le apropie mult de funcțiile polinomiale; spre exemplu suma unei serii de puteri este o funcție indefinit derivabilă.

Seriile de puteri pot fi definite formal, ca fiind o funcție $f: \mathbf{N} \to \mathbf{K}$, la fel că și polinoamele (D. 4.9.3.). Am ales însă aici o prezentare mai simplă, pentru a putea fi mai ușor de urmărit.

Dacă $x_0 \in \mathbf{K}$ și $r > 0$ vom nota ca de obicei $B(x_0, r) := \{x \in \mathbf{K}; |x - x_0| < r\}$ și $B[x_0, r] := \{x \in \mathbf{K}; |x - x_0| \leqslant r\}$. Mulțimile $B(x_0, r)$ și $B[x_0, r]$ se numesc *discul deschis* respectiv *discul închis*, de centru x_0 și rază r, dacă $\mathbf{K} = \mathbf{C}$, iar dacă $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ele se numesc *intervalul deschis* respectiv *intervalul închis*, de centru (centrat în) x_0 și rază r.

12.3.1. Definiție. Se numește *serie de puteri* (serie întreagă), o serie de funcții $\sum_{n\geqslant 0} f_n$, unde $f_n: \mathbf{K} \to \mathbf{K}$ este definită astfel $f_n(x) = a_n x^n$, $(\forall)\ x \in \mathbf{K}$, cu $a_n \in \mathbf{K}$ fixat (cu convenția $x^0 = 1$, $(\forall)\ x \in \mathbf{K}$). Șirul $(a_n)_{n\geqslant 0}$ se numește *șirul coeficienților* seriei date.

a) Să observăm că o serie de puteri este unic determinată de șirul $(a_n)_{n\geqslant 0}$ al coeficienților săi;

b) Se pot considera serii de puteri de forma generală $\sum_{n\geqslant 0} a_n (x - x_0)^n$ cu $x_0 \in \mathbf{K}$ fixat. Evident toate rezultatele seriilor de puteri de forma $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ se transmit ușor asupra seriilor de puteri de forma generală.

12.3.2. Definiție. Fie $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ o serie de puteri. Numărul $\rho := \sup \{r \geqslant 0; \sum_{n\geqslant 0} |a_n| r^n < +\infty\}$ se numește *raza de convergență*, iar $B(0, \rho)$ se numește *intervalul* (resp. *discul*) *de convergență* al seriei date, după cum $B(0, \rho) \subseteq \mathbf{R}$ (resp. $B(0, \rho) \subseteq \mathbf{C}$). Mulțimea $\mathfrak{M} := \{x \in \mathbf{K}; \sum_{n\geqslant 0} a_n x^n \text{ conv.}\}$ se numește *mulțimea de convergență* a seriei date, iar funcția $f(x) = \sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$, $x \in \mathfrak{M}$ se numește *suma seriei*.

a) $0 \in \mathfrak{M}$, deci $\mathfrak{M} \neq \emptyset$; b) $0 \leqslant \rho \leqslant +\infty$; c) Seria $\sum_{n\geqslant 0} |a_n| r^n$ este convergentă, dacă $r \in [0, \rho)$ și divergentă, dacă $r \in (\rho, \infty)$.

În cele ce urmează vom lua în studiu determinarea razei de convergență și a mulțimii de convergență ale unei serii de puteri cît și proprietățile unei serii de puteri (continuitate, derivabilitate, integrabilitate etc.) pe discul (intervalul) de convergență și pe frontiera sa.

12.3.3. Propoziție (Lema lui Abel). *Fie* $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ *o serie de puteri și* $0 \neq x_0 \in \mathbf{K}$ *a.î. șirul* $(a_n x_0^n)_{n\geqslant 0}$ *este mărginit. Atunci seria dată este absolut convergentă în orice punct* $x \in \mathbf{K}$, $|x| < |x_0|$.

Dem. Șirul $(a_n x_0^n)_{n\geqslant 0}$ fiind mărginit, $(\exists)\ M > 0$ a.î. $|a_n x_0^n| \leqslant M$, $(\forall)\ n \geqslant 1$. Fie $|x| < |x_0|$, fixat; evident avem:

$$|a_n x^n| = |a_n x_0^n| \cdot \left(\frac{|x|}{|x_0|}\right)^n \leqslant M \left(\frac{|x|}{|x_0|}\right)^n, (\forall)\ n \geqslant 0$$

Așadar seria $\sum_{n\geqslant 0} |a_n x^n|$ este majorată de seria geometrică convergentă $\sum_{n\geqslant 0} M \left(\frac{x}{|x_0|}\right)^n$, deci este convergentă etc.

Corolar 1. *Fie* $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ *o serie de puteri și* $0 \neq x_0 \in \mathbf{K}$ *a.î. una din seriile numerice* $\sum_{n\geqslant 0} a_n x_0^n$ *sau* $\sum_{n\geqslant 0} |a_n x_0^n|$ *este convergentă* (*resp. divergentă*). *Atunci* $(\forall)$ $x \in \mathbf{K}$, $|x| < |x_0|$ (*resp.* $|x| > |x_0|$), *rezultă că ambele serii* $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ *și* $\sum_{n\geqslant 0} |a_n x^n|$ *sînt convergente* (*resp. divergente*).

Dem. 1° Dacă $\sum_{n\geq 0} a_n x_0^n$ este convergentă, rezultă că $a_n x_0^n \to 0$ $(n \to \infty)$, deci şirul $(a_n x_0^n)_{n\geq 0}$ este mărginit. Aplicăm mai departe P.12.3.3. Dacă $\sum_{n\geq 0} |a_n x_0^n|$ este convergentă, rezultă că seria $\sum_{n\geq 0} a_n x_0^n$ este convergentă şi raţionamentul se continuă ca mai sus.

2° Dacă $\sum_{n\geq 0} |a_n x_0^n|$ este divergentă, atunci din 1° rezultă că seria $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ este divergentă, deci şi $\sum_{n\geq 0} |a_n x^n|$ este divergentă etc.

12.3.4. Teoremă (I t e o r e m ă a l u i A b e l). *Fie* $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ *o serie de puteri şi* ρ *raza sa de convergenţă. Atunci seria dată este* :

1° *Absolut convergentă în orice* $x \in \mathbf{K}$, $|x| < \rho$;

2° *Divergentă în orice* $x \in \mathbf{K}$, $|x| > \rho$;

3° *Normal convergentă pe* $B\,[0, r]$, $(\forall)\ 0 \leq r < \rho$.

Dem. 1° Fie $x \in \mathbf{K}$, $|x| < \rho$ fixat. Dacă $|x| < r < \rho$, rezultă din definiţia lui ρ, că seria $\sum_{n\geq 0} |a_n| r^n$ este convergentă, deci (P.12.3.3. Cor. 1) seria $\sum_{n\geq 0} |a_n x^n|$ este divergentă.

2° Fie acum $x \in \mathbf{K}$, $|x| > \rho$ fixat. Dacă $|x| < r < \infty$, rezultă, din definiţia lui ρ, că seria $\sum_{n\geq 0} |a_n| r^n$ este divergentă, deci (P.12.3.3. Cor. 1) seria $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ este divergentă.

3° Fixăm acum $0 < r < \rho$. Seria de funcţii $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ fiind, evident, majorată pe $B\,[0, r]$ de seria numerică convergentă $\sum_{n\geq 0} a_n | r^n$, rezultă că este normal convergentă pe $B\,[0, r]$

Corolar 1. *Fie* $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ *o serie de puteri,* $\mathfrak{M}$ *mulţimea de convergenţă şi* ρ *raza de convergenţă a seriei date. Atunci au loc proprietăţile* :

1° $\mathfrak{M} = \{0\}$, *dacă* $\rho = 0$; 2° $\mathfrak{M} = \mathbf{K}$, *dacă* $\rho = +\infty$; 3° $B\,(0, \rho) \subseteq \mathfrak{M} \subseteq B\,[0, \rho]$, *dacă* $0 < \rho < +\infty$.

Corolar 2. *Fie* $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ *o serie de puteri,* ρ *raza de convergenţă şi* $x_0 \in \mathbf{K}^*$. *Dacă una din seriile numerice* $\sum_{n\geq 0} a_n x_0^n$ *sau* $\sum_{n\geq 0} |a_n x_0^n|$ *este convergentă (resp. divergentă), atunci* $\rho \geq |x_0|$ *(resp.* $\rho \leq |x_0|$*). Reciproc, dacă* $|x_0| < \rho$ *(resp.* $|x_0| > \rho$*), atunci ambele serii numerice* $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ *şi* $\sum_{n\geq 0} |a_n x_0^n|$ *sînt convergente (resp. divergente)*

Observaţia 1. Pe frontiera discului (resp. intervalului) de convergenţă, seria de puteri poate fi convergentă, divergentă, sau în anumite puncte convergentă, iar în altele divergentă (v. Exemplele 1—3).

Exemplul 1. *Seria de puteri* $\sum_{n\geq 0} x^n$, $x \in \mathbf{R}$, *are raza de convergenţă* 1 *şi mulţimea de convergenţă* $(-1, 1)$.

Într-adevăr, seria $\sum_{n\geq 0} x^n$ este convergentă în orice $x \in \mathbf{R}$, $|x| < 1$, deci avem $\rho \geq 1$. Cum seria $\sum_{n\geq 1} 1^n$ este divergentă, avem $\rho \leq 1$, deci $\rho = 1$. Evident mulţimea de convergenţă este egală cu $(-1, 1)$.

Exemplul 2. Seria de puteri $\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n}$, $x \in \mathbf{R}$, *are raza de convergenţă* 1 *şi mulţimea de convergenţă* $[-1, 1]$.

Într-adevăr seria dată de convergentă în punctul $x_0=-1$, deci $\rho \geq |-1|=1$ și este divergentă în punctul $x_0=+1$, deci $\rho \leq 1$, prin urmare $\rho=1$ și $\mathfrak{M}=[-1, 1)$.

Exemplul 3. Seria de puteri $\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n^2}$, $x \in \mathbf{R}$, *are raza de convergență* 1 *și mulțimea de convergență* $[-1, 1]$.

Într-adevăr, seria dată este convetgentă în punctul $x_0=+1$ (ca și în $x_0=-1$), deci $\rho \geq 1$ și este divergentă în orice punct $x_0 \in \mathbf{R}$, $x_0>1$, deoarece $\lim_{n\to\infty} \frac{x_0^n}{n^2} = +\infty$, încît $\rho \leq 1$. Prin urmare $\rho = 1$ și $\mathfrak{M} = [-1, 1]$.

12.3.5. Teoremă (C a u c h y-H a d a m a r d). *Fie* $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ *o serie de puteri și* ρ *raza sa de convergență. Atunci* $\rho = \frac{1}{\omega}$, *unde* $\omega = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}$, *cu convenția* $\frac{1}{0} = \infty$ *și* $\frac{1}{\infty} = 0$.

Dem. Considerăm seria numerică $\sum_{n\geq 0} |a_n| r^n$ (*) cu $r \in \mathbf{R}_+$; evident avem:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n| r^n} = \begin{cases} r\omega, & 0 < \omega < +\infty \\ 0, & \omega = \infty \\ +\infty, & \omega = 0 \end{cases}$$

Aplicînd T.3.2.8. deducem:

(i) Dacă $0 < \omega < +\infty$, seria (*) este convergentă pentru $r\omega < 1$ și divergentă pentru $r\omega > 1$. Ținînd seama de definiția lui ρ, rezultă $\rho \geq \frac{1}{\omega}$ și $\rho \leq \frac{1}{\omega}$, prin urmare $\rho = \frac{1}{\omega}$.

(ii) Dacă $\omega = 0$, seria (*) este convergentă pentru orice $r \geq 0$, deci $\rho = \infty$.

(iii) Dacă $\omega = +\infty$, seria (*) este divergentă pentru orice $r > 0$, deci $\rho = 0$.

Exemplul 1. *Seria de puteri* $\sum_{n\geq 0} \frac{nx^n}{2^n}$ *are raza de convergență egală cu* 2.

Într-adevăr avem $a_n := \frac{n}{2^n}$ $(n \geq 1)$, deci $\overline{\lim_{n\to\infty}} |a_n|^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} \sqrt[n]{n} = \frac{1}{2}$ și deci $\omega = \frac{1}{2}$, prin urmare $\rho = \frac{1}{\omega} = 2$.

Exemplul 2. *Seria de puteri* $\sum_{n\geq 0} 2^{-n} x^{3n}$ *are raza de convergență egală cu* $\sqrt[3]{2}$.

Avem $a_{3k} = 2^{-k}$ $(\forall)$ $k \geq 1$, și $a_n = 0$, dacă $n \neq 3k$. Atunci șirul $(|a_n|^{1/n})_{n\geq 1}$ se descompune în două subșiruri constante: primul avînd termenul general $|a_{3k}|^{1/3k} = 2^{-1/3}$, iar al doilea identic nul. Atunci

$$\omega = \overline{\lim_{n\to\infty}} |a_n|^{1/n} = \max\{2^{-1/3}, 0\} = 2^{-1/3} \Leftrightarrow \rho = \frac{1}{\omega} = 2^{1/3}.$$

Exemplul 3. *Seria de puteri* $\sum_{n\geq 0} x^{n!}$ *are raza de convergență egală cu* 1.

Avem $a_k = 1$, dacă $k = n!$ și $a_k = 0$, dacă $k \notin \{1!, 2!, 3!, \ldots\}$. Atunci șirul $(|a_n|^{1/n})_{n\geqslant 1}$ se descompune în două subșiruri constante, unul având toți termenii egali cu 1, iar celălalt cu 0. Așadar, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} |a_n|^{1/n} = \max\{0, 1\} = 1$, prin urmare $\rho = \dfrac{1}{\omega} = 1$.

La același rezultat se poate ajunge și în alt mod. Seria dată este divergentă în $x = 1$, deci $\rho \leqslant 1$. Cum seria $\sum\limits_{n\geqslant 0} x^{n!}$ este o subserie a seriei $\sum\limits_{n\geqslant 0} x^n$, care este convergentă pentru $|x| < 1$, rezultă că $\sum\limits_{n\geqslant 0} x^{n!}$ este convergentă pentru $|x| < 1$, deci $\rho \geqslant 1$ etc.

12.3.6. Propoziție. *Fie* $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^n$ *o serie de puteri cu coeficienți nenuli,* ρ *raza sa de convergență,* $\omega_* = \varliminf\limits_{n\to\infty} \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ *și* $\omega^* = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$. *Atunci* $\dfrac{1}{\omega^*} \leqslant \rho \leqslant \dfrac{1}{\omega_*}$, *deci dacă* $\omega = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ *există, avem* $\rho = \dfrac{1}{\omega}$.

Dem. Din P.2.5.10. avem:

$$\omega_* = \varliminf_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \omega^*,$$

deci (T.12.3.5.) $\dfrac{1}{\omega^*} \leqslant \rho \leqslant \dfrac{1}{\omega_*}$ etc.

Exemplul 1. *Seria* $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{x^n}{n!}$ *are raza de convergență* $+\infty$.

Într-adevăr, $a_n = \dfrac{1}{n!}$ $(n \geqslant 1)$, deci $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0$ și deci $\rho = \infty$.

Exemplul 2. *Seria de puteri* $\sum\limits_{n\geqslant 0} n!\, x^n$ *are raza de convergență* 0.

Într-adevăr, $a_n = n!$ $(n \geqslant 1)$, deci $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim\limits_{n\to\infty} (n+1) = \infty$, deci $\rho = 0$.

Exemplul 3. *Seria de puteri* $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{2^n}{(n+1)^3} x^n$ *are raza de convergență* $\dfrac{1}{2}$.

Într-adevăr, $a_n := \dfrac{2^n}{(n+1)^3}$ $(n \geqslant 1)$, deci $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2(n+1)^3}{(n+2)^3} = 2$ și deci $\rho = \dfrac{1}{2}$.

12.3.7. Propoziție. *Fie* $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^n$, $x \in \mathbf{R}$, *o serie de puteri care are raza de convergență* $\rho > 0$ *și suma* s. *Atunci seria derivatelor de orice ordin a seriei date are raza de convergență* ρ, *funcția* s *este indefinit derivabilă pe* $B(0, \rho)$ *și* $(\forall)\, k \geqslant 1$, *avem relația:*

$$s^{(k)}(x) = \sum_{n\geqslant k} n(n-1)\ldots(n-k+1)\, a_n x^{n-k}, \quad (\forall)\, x \in B(0, \rho),$$

de unde deducem relațiile: $a_n = \dfrac{1}{n!} s^{(n)}(0)$, $(\forall)\, n \geqslant 0$.

Dem. Prin inducție relativ la k. Seria de puteri $\sum_{n\geqslant 1} na_n x^{n-1}$ are raza de convergență ρ' egală cu $\frac{1}{\omega'}$, unde $\omega' = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{n|a_n|}$. Însă (T.2.5.10.):

$$\omega' = (\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n})\,(\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}) = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = \omega,$$

deci

$$\rho' = \frac{1}{\omega'} = \frac{1}{\omega} = \rho \text{ și deci } \rho = \rho'.$$

Fie mai departe $|x_0| < \rho$ fixat și $|x_0| < r < \rho$. Din T.12.3.4.(3°) rezultă că seriile $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ și $\sum_{n\geqslant 1} na_n x^{n-1}$ sînt uniform convergente pe $B[0, r]$, deci (T.12.2.16.) avem :

$$(\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n)' = \sum_{n\geqslant 1} na_n x^{n-1}, \quad (\forall)\, x \in B[0, r]$$

și deci $s'(x_0) = \sum_{n\geqslant 1} na_n x_0^{n-1}$, prin urmare $s'(x) = \sum_{n\geqslant 1} na_n x^{n-1}$, $(\forall)\, x \in B(0, \rho)$. Trecerea de la pasul k la pasul $k+1$, în procesul de inducție, se face la fel.

Ultimele relații din enunț se deduc înlocuind în expresia lui $s^{(k)}$ pe x cu 0.

12.3.8. Propoziție. *Fie* $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$, $x \in \mathbf{R}$, *o serie de puteri care are raza de convergență* $\rho > 0$ *și suma* s. *Atunci seria de puteri* $\sum_{n\geqslant 0} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ *are raza de convergență* ρ *și avem relația :*

$$\int_0^x s(t)\,dt = \sum_{n\geqslant 0} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}, \quad (\forall)\, x \in B(0, \rho)$$

Dem. Ca și în P.12.3.7. se arată că raza de convergență a seriei $\sum_{n\geqslant 0} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ este egală cu ρ. Mai departe, fixăm $x \in B(0, \rho)$, spre exemplu $0 < x < \rho$. Deoarece (T.12.3.4.) seria de funcții $\sum_{n\geqslant 0} a_n t^n$, $t \in B(0, \rho)$, este normal convergentă pe $[0, x]$, rezultă (T.12.2.15.) că o putem integra termen cu termen :

$$\int_0^x s(t)\,dt = \sum_{n\geqslant 0} \int_0^x a_n t^n\,dt = \sum_{n\geqslant 0} \frac{a_n}{n+1} x^n$$

Exemple. Să se stabilească relațiile :

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n\geqslant 1} nx^{n-1}, \quad |x| < 1; \quad \ln(1-x) = \sum_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{n}, \quad |x| < 1.$$

Considerăm seria de puteri $\sum_{n\geqslant 0} x^n$ care are raza de convergență $\rho = 1$ și suma $\frac{1}{1-x}$, $(\forall)\, x \in (-1, 1)$. Aplicăm mai departe P.12.3.7. și P.12.3.8.; așadar $(\forall)\, x \in \mathbf{R}$, $|x| < 1$, avem :

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)' = \sum_{n\geqslant 1} nx^{n-1}, \quad \int_0^x \frac{dt}{1-t} = \sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{n+1} x^{n+1} \text{ etc.}$$

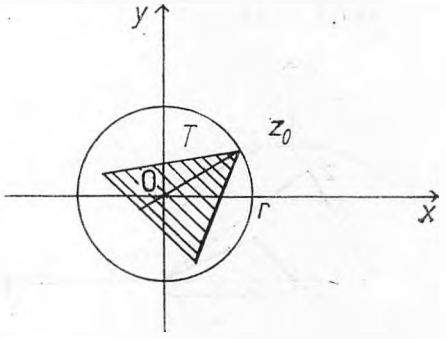
Din prima relație arătată obținem relația $\sum_{n\geqslant 1} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}$, $(\forall)\, |x| < 1$, deci în particular avem $\sum_{n\geqslant 1} \frac{n}{2^n} = 2$.

Analog se obține relația:

$$x\left(x\left(\frac{1}{1-x}\right)'\right)' = \sum_{n\geq 1} n^2 x^n, \ |x| < 1 \text{ etc.}$$

12.3.9. Definiție. Fie $r > 0$, $f : B(0, r) \to \mathbf{K}$ și $|z_0| = r$ fixat. Vom spune că f are *limita unghiulară* în z_0 egală cu $w_0 \in \mathbf{K}$, dacă $\lim_{z \to z_0} f|_T(z) = w_0$, oricare ar fi triunghiul T cu vîrful în z_0 a.î. $T \setminus \{z_0\} \subseteq B(0, r)$. Dacă, în plus, f este definită în z_0 și $w_0 = f(z_0)$, vom spune că f este *continuă unghiular* în z_0. Dacă luăm mai sus $T = [0, z_0]$, obținem *limita radială* respectiv *continuitatea radială* în z_0 (Fig. 62).

Fig. 62



Evident dacă f are limită unghiulară în z_0, atunci f are limită unghiulară și cele două limite coincid). Afirmația reciprocă nu este numaidecît adevărată.

12.3.10. Lemă. *Fie T un triunghi în plan cu un vîrf în $z_0 = 1$ a.î. $T \setminus \{1\} \subseteq B(0, 1)$. Atunci avem inegalitatea* $\sup_{z \in T \setminus \{1\}} \frac{|1 - z|}{1 - |z|} < +\infty$.

Dem. Dacă $z, z' \in \mathbf{C}$ și sînt simetrice față de axa $0x$, avem că $\frac{|1-z|}{1-|z|} = \frac{|1-z'|}{1-|z'|}$. De aici rezultă că putem presupune T situat deasupra axei $0x$ și că una din laturi se află pe $0x$.

Fie $\varepsilon > 0$ și $A_\varepsilon := B(1, \varepsilon) \cap (T \setminus \{1\})$. Cum $T \setminus A_\varepsilon$ este compactă și funcția $T \setminus \{1\} \ni z \mapsto \frac{|1 - z|}{1 - |z|}$ este continuă, rezultă că ea este mărginită pe $T \setminus A_\varepsilon$. Rămîne deci să arătăm că $(\exists)\varepsilon > 0$ cu proprietatea că $\sup_{z \in A_\varepsilon} \frac{|1-z|}{1-|z|} < \infty$.

Evident avem (Fig. 63):

$$0 \leqslant \frac{y}{1 - x} = \operatorname{tg} \theta \leqslant \operatorname{tg} \theta_0 = \delta < +\infty, \ (\forall)\ z = x + iy \in T \setminus \{1\},$$

deci

$$1 + x - y \cdot \frac{y}{1 - x} \geqslant 1 + x - y\delta \geqslant 1, \ (\forall)\ z \in T \setminus \{1\}, \ |z - 1| < \varepsilon,$$

unde $\varepsilon > 0$ este ales suficient de mic.

Așadar, $(\forall)\ z = x + iy \in A_\varepsilon$, avem :

$$\frac{|1-z|}{1-|z|} = \frac{|1-x-iy|}{1-|z|^2}(1+|z|) < \frac{2(1-x+y)}{1-x^2-y^2} =$$

$$= \frac{2\left(1+\dfrac{y}{1-x}\right)}{1+x-y\cdot\dfrac{y}{1-x}} < \frac{2(1+\delta)}{1},$$

deci

$$\sup_{z\in A_\varepsilon}\frac{|1-z|}{1-|z|} \leqslant 2(1+\delta) < +\infty$$

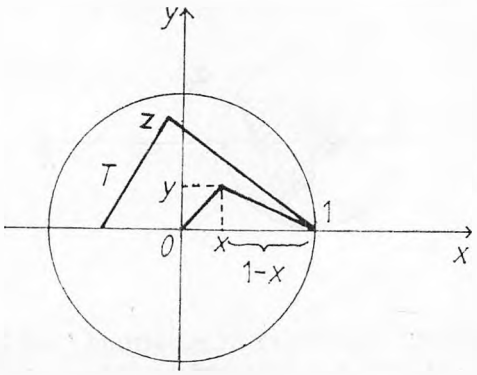


Fig. 63

12.3.11. Teoremă (A II-a t e o r e m ă a l u i A b e l). *Fie* $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$, $z \in \mathbf{C}$, *serie de puteri*, $0 < \rho < \infty$ *raza sa de convergență, s suma sa și* $|z_0| = \rho$ *a.î seria* $\sum_{n\geqslant 0} a_n z_0^n$ *este convergentă. Atunci funcția s este continuă unghiular în* z_0.

Dem. Schimbînd z cu λz, putem presupune că $\rho = 1$ și $z_0 = 1$, deci seria $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ este convergentă.

Fie $\varepsilon > 0$ fixat. Cf. T. 3.1.11. $(\exists)\ n_\varepsilon \geqslant 1$ a.î.

$$|a_n + a_{n+1} + \ldots + a_{n+p}| < \varepsilon,\ (\forall)\ n \geqslant n_\varepsilon\ \Delta\ p \geqslant 0.$$

Fixăm $n \geqslant n_\varepsilon$ și să notăm $\sigma_p := a_n + a_{n+1} + \ldots + a_{n+p} (p \geqslant 0)$. Atunci $(\forall)\ z \in B\ (0,\ 1)$ avem :

$$|a_n z^n + a_{n+1} z^{n+1} + \ldots + a_{n+p} z^{n+p} = |\sigma_0 z^n + (\sigma_1 - \sigma_0) z^{n+1} + \ldots +$$

$$+ (\sigma_p - \sigma_{p-1}) z^{n+p}| = |z^n(1-z)(\sigma_0 + \sigma_1 z^1 + \ldots + \sigma_{p-1} z^{p-1}) + \sigma_p z^{n+p}| \leqslant$$

$$\leqslant |z|^n |1-z|\,\varepsilon(1 + |z| + |z|^2 + \ldots + |z|^{p-1}) + \varepsilon|z|^{n+p} \leqslant \varepsilon\left(\frac{|1-z|}{1-|z|} + 1\right).$$

Fie T un triunghi cu un vîrf în 1 a.î. $T \setminus \{1\} \subseteq B(0,1)$. Din lemă rezultă $M := \sup_{z\in T\setminus\{1\}} \dfrac{|1-z|}{1-|z|} < +\infty$, deci

$$\sup_{z\in T\setminus\{1\}} |a_n z^n + \ldots + a_{n+p} z^{n+p}| \leqslant \varepsilon(M+1),\ (\forall)\ n \geqslant n_\varepsilon$$

și deci seria $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ este uniform Cauchy pe $T\setminus\{1\}$. Cum prin ipoteză seria $\sum_{n\geq 0} a_n 1^n$ este convergentă, deducem (T. 12.2.10.) că seria $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ este uniform convergentă pe T, deci (T. 12.2.14.) $s|_T$ este continuă în 1 și deci $\lim_{z\to 1} s|_T(z) = s(1)$.

Prin urmare s este continuă unghiular în 1.

Corolar 1. *Fie* $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$, $z \in \mathbf{C}$, *o serie de puteri și* $0 < \rho < \infty$ *raza sa de convergență. Dacă seria* $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ *este convergentă într-un punct* z_0 *cu* $|z_0| = \rho$, *atunci ea este uniform convergentă pe orice triunghi* T *cu un vîrf în* z_0 *a.î.* $T\setminus\{z_0\} \subseteq B(0, \rho)$.

Corolar 2. *Fie* $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$, $x \in \mathbf{R}$, *o serie de puteri și* $0 < \rho < \infty$ *raza sa de convergență. Atunci seria* $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ *este uniform convergentă pe* $[0, \rho] \Leftrightarrow \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ *este uniform convergentă pe* $[0, \rho) \Leftrightarrow \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ *este convergentă în punctul* $x = \rho$.

Dem. Aplicăm Cor. 1 și P. 12.2.8.

Corolar 3. *Fie* $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$, $x \in \mathbf{R}$, *o serie de puteri, s suma și* ρ *raza sa de convergență, cu* $0 < \rho < \infty$. *Dacă* $\sum_{n\geq 0} a_n \rho^n$ *este convergentă, atunci avem relația:*

$$\int_0^x s(t)\,dt = \sum_{n\geq 0} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad (\forall)\ \ x \in [0, \rho].$$

Dem. Seria de funcții $\sum_{n\geq 0} a_n t^n$, $t \in [0, \rho]$, fiind uniform convergentă (Cor. 1), o putem integra termen cu termen pe $[0, x] \subseteq [0, \rho]$ (T. 12.2.15.), deci

$$\int_0^x s(t)dt = \sum_{n\geq 0} a_n \int_0^x t^n\,dt = \sum_{n\geq 0} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

Corolar 4. *Fie* $\sum_{n\geq 0} a_n$, $\sum_{n\geq 0} b_n$, $\sum_{n\geq 0} c_n$ *trei serii numerice convergente care au suma egală cu* a, b, c *respectiv și a.î. seria* $\sum_{n\geq 0} c_n$ *este seria produs a primelor două* $\left(i.\,e.\ c_n = \sum_{i=1}^{n} a_i b_{n-i},\ (\forall)\ \ n \geq 0\right)$. *Atunci* $ab = c$.

Dem. Seriile de puteri $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$, $\sum_{n\geq 0} b_n x^n$, $\sum_{n\geq 0} c_n x^n$, $(x \in \mathbf{R})$ sînt convergente în punctul $x = 1$, deci au razele de convergență mai mari ca 1 (T. 12.3.4. Cor. 2) și deci sînt absolut convergente în orice punct $x \in \mathbf{R}$, $|x| < 1$; notăm cu $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$ respectiv sumele lor în punctul $x \in B(0, 1)$. Evident $(\forall)\ x \in B(0, 1)$, seria produs a seriilor $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ și $\sum_{n\geq 0} b_n x^n$ este egală cu seria $\sum_{n\geq 0} c_n x^n$, iar din T. 3.4.2. Cor. 1 avem că $A(x) \cdot B(x) = C(x)$. Din T. 12.3.11. rezultă că funcțiile A, B, C au fiecare limită radială în $x = 1$, egală cu a, b, c respectiv. Atunci avem:

$$a \cdot b = (\lim_{x\nearrow 1} A(x))\ (\lim_{x\nearrow 1} B(x)) = \lim_{x\nearrow 1} A(x)\,B(x) = \lim_{x\nearrow 1} C(x) = c$$

12.4. Dezvoltarea unei funcții în serie Taylor

Vom prezenta în această secțiune formula lui Taylor cu restul integral din care vom obține pe o altă cale formula lui Taylor cu restul lui Lagrange (T. 6.5.3.). Ne vom ocupa apoi de dezvoltarea unei funcții în serie Taylor, unde vom da aplicații la cazul particular al funcțiilor elementare.

12.4.1. Definiție. Fie $U \subseteq \mathbf{R}$ o mulțime deschisă (sau un interval arbitrar) și $f : U \to \mathbf{R}$ o funcție indefinit derivabilă într-un punct $a \in U$. Seria

$$f(a) + \frac{x-a}{1!} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \ldots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^n(a) + \ldots$$

se numește *serie Taylor* cu centrul în a asociată funcției f. Vom spune că f este *desvoltabilă în seria Taylor* cu centrul în a, dacă $(\exists)\, r = r_a > 0$ a.î. seria $\sum_{n\geqslant} \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a)$ este convergentă și are suma egală cu $f(x)$, $(\forall)\, x \in U$, $|x - a| < r$.

Apar în mod natural următoarele două probleme: Care este *expresia restului* lui *Taylor* de ordinul n asociat unei funcții f de n ori derivabilă (v. Def. 6.5.2.)? În ce condiții o *funcție f este desvoltabilă în serie Taylor* cu centrul într-un anumit punct $a \in U$?

12.4.2. Propoziție. *Fie $U \subseteq \mathbf{R}$ o mulțime deschisă și $f : U \to \mathbf{R}$ o funcție arbitrară.*
Fixăm $a \in U$ și să presupunem că $(\exists)\, r = r_a > 0$ cu $B(a, r) \subseteq U$, $(\exists) \sum_{n\geqslant 0} c_n(x-a)^n$ o serie de puteri care este convergentă și are suma $f(x)$, în orice punct $x \in B(a, r)$. Atunci f este indefinit derivabilă pe $B(a, r)$ și avem $c_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)$, $(\forall)\, n \geqslant 0$, deci f este desvoltabilă în seria Taylor cu centrul în a și seria de puteri $\sum_{n\geqslant 0} c_n(x-a)^n$ coincide cu seria Taylor cu centrul în a asociată lui f.

Dem. Punem $x - x_0 = y$ și aplicăm P. 12.3.7.

Corolar 1. *Fie $U \subseteq \mathbf{R}$ o mulțime deschisă și $f : U \to \mathbf{R}$ o funcție analitică i.e. $(\forall)\, a \in U$ $(\exists)\, r = r_a > 0$ cu $B(a, r) \subseteq U$ și $(\exists) \sum_{n\geqslant 0} c_n(x-a)^n$ o serie de puteri care este convergentă și are suma $f(x)$, $(\forall)\, x \in B(a, r)$. Atunci f este indefinit derivabilă pe U.*

Observația 1. Am definit (D. 12.4.1.) f dezvoltabilă în seria Taylor cu centrul în a, plecînd de la o funcție *indefinit derivabilă* în a. P. 12.4.2. ne arată că se poate pleca de la o funcție f *arbitrară*, înlocuindu-se seria Taylor cu centrul în a printr-o serie de puteri cu centrul în a.

Observația 2. Există funcții $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ indefinit derivabile și $a \in \mathbf{R}$ a.î. seria Taylor cu centrul în a asociată lui f este convergentă în orice punct $x \in \mathbf{R}$ însă suma sa nu este egală cu $f(x)$ pentru nici un $x \neq a$. Pentru a ilustra acest fapt să semnalăm următorul exemplu devenit clasic.

12.4.3. Exemplul lui Cauchy. *Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ o funcție definită astfel $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$, dacă $x \neq 0$ și $f(0) = 0$. Atunci f este indefinit derivabilă și avem $f^n(0) = 0$, $(\forall)\, n \geqslant 0$, deci $f(x) \neq \sum_{n\geqslant 0} \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0)$, $(\forall)\, x \in \mathbf{R}^*$.*

Evident f este indefinit derivabilă pe $\mathbf{R}^*$. Să calculăm derivatele lui f pe $\mathbf{R}^*$; avem :

$$f'(x) = \left(= \frac{1}{x^2}\right)' e^{-\frac{1}{x^2}} = 2x^{-3} e^{-\frac{1}{x^2}}, \quad (\forall) \quad x \in \mathbf{R}^*;$$

continuînd, deducem (prin inducţie relativ la n) relaţia :

$$f^{(n)}(x) = P_{3n}(x^{-1}) e^{-\frac{1}{x^2}}, \ (\forall) \ x \in \mathbf{R}^*, \ (\forall) \ n \geqslant 1,$$

unde P_{3n} este un polinom cu coeficienţi reali de grad $3n$.

Să observăm că $\lim\limits_{x \to 0} P_{3n}(x^{-1}) e^{-\frac{1}{x^2}} = 0, \ (\forall) \ n \geqslant 1.$

Într-adevăr, dacă punem $\frac{1}{x} = t$, avem $x \searrow 0 \Leftrightarrow t \to \infty$ şi $x \nearrow 0 \Leftrightarrow t \to -\infty$, deci din T. 6.4.3. Cor 2 rezultă :

$$\lim_{x \searrow 0} P_{3n}(x^{-1}) e^{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{t \to \infty} \frac{P_{3n}(t)}{e^{t^2}} = 0$$

$$\lim_{x \nearrow 0} P_{3n}(x^{-1}) e^{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{t \to -\infty} \frac{P_{3n}(t)}{e^{t^2}} = \lim_{t \to \infty} \frac{P_{3n}(-t)}{e^{t^2}} = 0$$

şi deci

$$\lim_{x \to 0} f^{(n)}(x) = \lim_{x \to 0} P_{3n}(x^{-1}) e^{-\frac{1}{x^2}} = 0, \ (\forall) \ n \geqslant 1$$

De aici şi din T. 6.3.8. deducem că $f'(0) = 0$, $f''(0) = 0$ şi în general (prin inducţie!) $f^{(n)}(0) = 0$, $(\forall)$ $n \geqslant 0$.

Prin urmare f este indefinit derivabilă şi avem $f^{(n)}(0) = 0$, $(\forall)$ $n \geqslant 0$

12.4.4. Teoremă (B. T a y l o r). *Fie $I \subseteq \mathbf{R}$ un interval şi $f : I \to \mathbf{R}$ o funcţie de clasă $\mathcal{C}^n$. Atunci $(\forall)$ $a, x \in I$, avem relaţia :*

$$f(x) = T_{n-1}(x; a) + \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x - t)^{n-1} f^{(n)}(t) \, dt$$

Dem. Prin inducţie relativ la n.

Dacă $n = 1$, avem $f \in \mathcal{C}^1(I)$ şi $[a, x] \subseteq I$, deci din T. 9.3.2. rezultă relaţia :

$$f(x) = f(a) + \frac{1}{0!} \int_a^x f'(t) \, dt$$

şi deci $P(1)$ este adevărată.

Fie $n \geqslant 1$ cu $P(n)$ adevărată şi fie $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I)$ şi $[a, n] \subseteq I$ fixaţi. Cum $P(n)$ este adevărată, rezultă relaţia

$$f(x) = T_{n-1}(x; a) + \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x - t)^{n-1} f^{(n)}(t) \, dt$$

Integrînd prin părţi (T. 9.3.4.) deducem :

$$\int_a^x (x - t)^{n-1} f^{(n)}(t) \, dt = -\frac{1}{n} \int_a^x \underbrace{f^{(n)}(t)}_{u} \underbrace{(x - t^n)' \, dt}_{dv} =$$

$$= -\frac{1}{n}\left(f^{(n)}(t)\cdot(x-t)^n\Big|_a^x - \int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt\right) =$$
$$= \frac{(x-a)^n}{n} f^{(n)}(a) + \frac{1}{n}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt$$

De aici și din (1) rezultă evident relația :

$$f(x) = \left(T_{n-1}(x;a) + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a)\right) + \frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt$$

Aceasta înseamnă că $P(n+1)$ este adevărată, prin urmare $(\forall)\ n \geqslant 1$, $P(n)$ este adevărată.

Corolar 1 (Formula lui Taylor cu restul lui Lagrange) *In același cadru, avem relația* :

$$f(x) = T_{n-1}(x;a) + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(\xi),$$

unde ξ *este cuprins între* a *și* x.

Dem. Plecăm de la relația demonstrată (T.12.4.4.) :

$$f(x) = T_{n-1}(x;a) + \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{n-1} f^{(n)}(t)\,dt \qquad (1)$$

Punem mai departe $\varphi(t) = (x-t)^{n-1}$, $t \in [a, x]$; $\psi(t) = f^{(n)}(t)$, $t \in [a, x]$. Aplicînd formula de medie pentru integrale (T. 9.2.10. Cor. 1), observînd că φ păstrează semn constant, obținem :

$$\int_a^x \varphi(t)\,\psi(t)\,dt = \psi(\xi)\int_a^x \varphi(t)dt = -\psi(\xi)\frac{(x-t)^n}{n}\Big|_a^x = \frac{(x-a)^n}{n} f^{(n)}(\xi),$$

unde ξ este cuprins între a și x. Atunci relația (1) devine :

$$f(x) = T_{n-1}(x;a) + \frac{1}{(n-1)!}\cdot\frac{(x-a)^n}{n} f^{(n)}(\xi) \text{ etc.}$$

Corolar 2. *In același cadru, avem inegalitatea* :

$$|r_{n-1}(x;a)| \leqslant \frac{|x-a|^n}{n!} \sup_{t\in[a,x]} |f^{(n)}(t)|$$

Dem. Rezultă imediat din Cor. 1.

Corolar 3. *Fie* $U \subseteq \mathbf{R}$ *o mulțime deschisă,* $f : U \to \mathbf{R}$ *o funcție indefinit derivabilă și* $[a, b] \subseteq U$. *Atunci*

1° *Dacă* $(\exists)\ M > 0$ *a.î.* $|f^{(n)}(t)| \leqslant M$, $(\forall)\ t \in [a, b]$ *și* $(\forall)\ n \geqslant 0$, *rezultă că* $f(x) = \sum_{n\geqslant 0} \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0)$, $(\forall)\ x, x_0 \in [a, b]$;

2° *Dacă* $(\exists)\ M > 0$, $(\exists)\ r > 0$ *cu* $V_r(a) = (a-r,\ a+r) \subseteq U$ *a.î.* $|f^n(x)| \leqslant M$, $(\forall)\ x \in V_r(a)$ *și* $(\forall)\ n \geqslant 0$, *rezultă că* $f(x) = \sum_{n\geqslant 0} \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a)$, $(\forall)\ x \in V_r(a)$, *deci* f *este desvoltabilă în serie Taylor cu centrul în* a.

Dem. 1° Fie $x, x_0 \in [a, b]$ fixați. Din T. 12. 4.4. avem :

$$f(x) = T_n(x;x_0) + \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi),$$

nde ξ este cuprins între x și x_0. Atunci

$$|f(x) - T_n(x; x_0)| \leqslant \frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!} \cdot M, \ (\forall)\ n \geqslant 1$$

um $\lim_{n\to\infty} \frac{|x - x_0|^n}{(n+1)!} = 0$, rezultă că

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} T_n(x; x_0) = \sum_{n\geqslant 0} \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0)$$

2° Rezultă din 1°.

12.5. Dezvoltarea în serii Taylor a funcțiilor elementare. Aplicații

12.5.1. Propoziție. *Fie P un polinom cu coeficienți reali de grad n. Atunci* ∀) $x, x_0 \in \mathbf{R}$, *avem relația* :

$$P(x) = P(x_0) + \frac{x - x_0}{1} P'(x_0) + \ldots + \frac{(x - x_0)}{n!} P^n(x_0)$$

Dem. Fie $f(x) = P(x)$, $x \in \mathbf{R}$; evident $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R})$. Aplicînd pentru f .12.4.4. Cor. 1 putem scrie

$$f(x) = T_n(x; x_0) + \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi_x),$$

nde ξ_x este cuprins între x și x_0. Deoarece grad $P = n$, avem $f^{(n+1)} = 0$, deci $x) = T_n(x, x_0)$ și deci $P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x - x_0)^k}{k!} P^{(k)}(x_0)$.

12.5.2. Propoziție.

$$(1 + x)^n = 1 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \ldots + C_n^n x^n, \ (\forall)\ x \in \mathbf{R} \wedge n \in \mathbf{N},$$

nde $C_n^k := \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1.2\ldots n}$ *sînt „coeficienții binominali".*

Dem. Fie funcția $f(x) = (1 + x)^n$, $x \in \mathbf{R}$, unde n a fost fixat în $\mathbf{N}$. Evi- ent f este indefinit derivabilă și avem :

$$f^{(k)}(x) = \begin{cases} n(n-1)\ldots(n-k+1)(1+x)^{n-k}, & 1 \leqslant k \leqslant n \\ 0, & k > n, \end{cases}$$

eci

$$\frac{1}{k!} f^{(k)}(0) = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!} = C_n^k \quad 1 \leqslant k \leqslant n$$

plicînd T. 12. 4.4. Cor. 1 pentru restul de indice $n + 1$, obținem :

$$f(x) = \sum_{k=0} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k$$

Corolar 1.

$(a + b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \ldots + C_n^n b^n$, $(\forall)$ $a, b \in \mathbf{R}$

Dem. Punînd $x = \frac{a}{b}$, $a \in \mathbf{R}$ și $b \in \mathbf{R}^*$, obținem :

$$(a + b)^n = \left(1 + \frac{a}{b}\right)^n b^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(\frac{a}{b}\right)^k b^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}$$

12.5.3. Propoziție. *Fie* $P \in \mathbf{R}[X]$ *un polinom de grad* $n \geqslant 1$. *Atunci* $x_0 \in \mathbf{R}$ *este rădăcină de ordin* k, $k \leqslant n \Leftrightarrow P^{(i)}(x_0) = 0$, $(\forall)\ i = \overline{0, k-1}$ $P^{(k)}(x_0) \neq 0$.

Dem. Aplicînd P. 12.5.1. putem scrie relația:

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x - x_0)^k}{k!} P^{(k)}(x_0), \quad (\forall)\ x \in \mathbf{R} \tag{1}$$

($\Rightarrow$) Dacă x_0 este rădăcină de ordin k, avem $P(x) = (x - x_0)^k\ Q(x)$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$ unde $Q \in \mathbf{R}[X]$ și $Q(x_0) \neq 0$. Atunci rezultă relația:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(x - x_0)^k}{k!} P^{(k)}(x_0) = (x - x_0)^k\ Q(x), \quad (\forall)\ x \in \mathbf{R}$$

Punem în (1) $x = x_0$ și obținem $P(x_0) = 0$. Împărțim apoi (1) la $x - x_0$ și punem după aceea $x = x_0$; obținem $P'(x_0) = 0$ etc.

($\Leftarrow$) Dacă $P^{(i)}(x_0) = 0$, $(\forall)\ i = \overline{0, k-1}$ și $P^{(k)}(x_0) \neq 0$, atunci din (1) rezultă

$$P(x) = \frac{(x - x_0)^k}{k!}(P^{(k)}(x_0) + \ldots) = (x - x_0)^k\ P_1(x),$$

unde $P_1 \in \mathbf{R}[X]$ și $P_1(x_0) \neq 0$.

Polinomul lui Taylor de grad n asociat funcției f și punctului a, reprezintă într-un anumit sens, cea mai bună aproximare a lui f într-o vecinătate suficient de mică a lui a, printr-un polinom de grad $\leqslant n$. Mai precis avem:

12.5.4. Propoziție. *Fie* $I \subseteq \mathbf{R}$ *un interval,* $a \in I$ *un punct și* $f : I \to \mathbf{R}$ *funcție de* n *ori derivabilă pe* I *cu* $f^{(n)}$ *continuă în* a. *Dacă* $(\exists)\ P \in \mathbf{R}_n[X]$ *a.*

$$f(x) = P(x) + o(|x - a|^n), \quad x \to a, \tag{1}$$

atunci $P(x) = T_n(x; a)$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$

Dem. Aplicînd T. 6.5.3. Cor. 2 putem scrie:

$$f(x) = T_n(x; a) + o(|x - a|^n), \quad x \to a \tag{2}$$

Din (1) și (2) rezultă:

$$P(x) = T_n(x; a) + o(|x - a|^n), \quad x \to a,$$

deci $(\exists)\ \alpha : I \to \mathbf{R}$ continuă și nulă în a a.î.

$$P(x) = T_n(x; a) + |x - a|^n\ \alpha(x), \quad (\forall)\ x \in I \tag{3}$$

Cum P se poate reprezenta sub forma $P(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k(x - a)^k$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$, din (3) rezultă

$$\sum_{k=0}^{n} \left(c_k - \frac{1}{k!} f^{(k)}(a)\right)(x - a)^k = |x - a|^n\ \alpha(x), \quad (\forall)\ x \in I$$

Înlocuind x cu a obținem $c_0 - \frac{1}{0!} f^{(0)}(a) = 0$; mai departe împărțim $x - a$ și trecem la limită cu x către a și obținem $c_1 - \frac{1}{1!} f^{(1)}(0) = 0$ etc. Prin urmare $c_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(0)$, $(\forall)\ k = \overline{0, n}$, deci $P(x) = T_n(x; a)$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$

12.5.5. Propoziție.

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} + \ldots, (\forall)\ x \in \mathbf{R}$$

Dem. Fie $f(x) = \sin x$, $x \in \mathbf{R}$. Evident f este indefinit derivabilă și avem (P.6.2.4.(1°)) .

$$f^n(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right),\ (\forall)\ x \in \mathbf{R} \wedge n \in \mathbf{N}$$

De aici rezultă $|f^{(n)}(x)| \leqslant 1$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$; $f^{(2n)}(0) = 0$ și $f^{2n+1}(0) = (-1)^n$. Aplicînd T. 12.4.4. Cor. 3 pentru $a = 0$, obținem :

$$\sin x = 0 + \frac{x}{1!} - \frac{x^2}{2!} \cdot 0 + \frac{x^3}{3!}(-1) + \ldots$$

Corolar 1.

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} + \ldots,\ (\forall)\ x \in \mathbf{R}$$

Dem. Plecăm de la relația demonstrată : $\sin x = \sum\limits_{n \geqslant 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$. Seria din dreapta avînd evident raza de convergență $< +\infty$ este normal convergentă pe orice interval compact $J \subseteq \mathbf{R}$ (T. 12.3.4.) deci poate fi integrată termen cu termen pe J (T. 12.2.15). Fie $x \in \mathbf{R}^*$ fixat; atunci avem :

$$\int_0^x \sin t\, dt = \sum_{n \geqslant 0} \int_0^x \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} t^{2n-1}\, dt = \sum_{n \geqslant 0} \frac{(-1)^n}{(2n+2)!} x^{2n+2},$$

deci

$$-\cos x + 1 = \frac{x^2}{2!} - \frac{1}{4!} x^4 + \frac{1}{6!} x^6 - \ldots \text{ etc.}$$

La același rezultat se ajunge dacă procedăm ca și în cazul funcției sin.

12.5.6. Propoziție.

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots, (\forall)\ x \in \mathbf{R}$$

Dem. (I) Fie $f(x) = e^x$, $x \in \mathbf{R}$. Evident f este indefinit derivabilă și avem $f^{(n)}(x) = e^x$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R} \wedge n \geqslant 1$. Fixăm $x \in \mathbf{R}$, spre exemplu $x > 0$. Deoarece

$$0 < f^{(n)}(x) \leqslant \max\ \{1, e^x\},\ (\forall)\ x \in [0, x] \wedge n \geqslant 1,$$

putem aplica T.12.4.4. Cor. 4, pentru $a = 0$ și obținem :

$$f(x) = \sum_{n \geqslant 0} \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) = \sum_{n \geqslant 0} \frac{x^n}{n!}$$

(II) Considerăm seria de puteri

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots,\ (x \in \mathbf{R}) \qquad (1)$$

Din P. 12.3.6. rezultă că seria (1) are raza de convergență $\rho = +\infty$;

fie f suma sa. Din T.12.3.4.(3°) rezultă că seria (1) este uniform convergentă pe orice interval compact inclus în $\mathbf{R}$. Funcțiile $\mathbf{R} \ni x \mapsto \frac{1}{n!}x^n (n \geqslant 1)$ fiind derivabile, deducem (P. 12.3.7.) că putem deriva (1) termen cu termen și obținem :

$$f'(x) = 1 + 2 \cdot \frac{x}{2!} + 3\,\frac{x^2}{3!} + \ldots + n\,\frac{x^{n-1}}{n!} + \ldots = f(x), \quad (\forall)\ x \in \mathbf{R}$$

deci $f'(x)/f(x) = 1$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$ și deci $\ln f(x) = x + C$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$.
Cum $f(0) = 1$ și $\ln f(0) = 0 + C$, rezultă $C = 0$, deci $\ln f(x) = x$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$ prin urmare $f(x) = \mathrm{e}^x$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$.

Definiție. Să punem prin definiție

$$\mathrm{e}^z := 1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots, (z \in \mathbf{C})$$

Obținem o funcție $\mathbf{C} \ni z \mapsto e^z \in \mathbf{C}$, numită *funcția exponențială* pe $\mathbf{C}$.

Observație. Seria $\sum_{n \geqslant 0} \frac{z^n}{n!}$ fiind, evident, absolut convergentă, este convergentă, deci definiția lui e^z are sens. Utilizînd teorema lui Mertens (T. 3.4.2.' varianta complexă, deducem imediat că $\mathrm{e}^{z+z'} = \mathrm{e}^z \cdot \mathrm{e}^{z'}$, $(\forall)\ z, z' \in \mathbf{C}$.

Corolar 1 (Formula lui Euler)

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} = \cos x + \mathrm{i} \sin x, \quad (\forall)\ x \in \mathbf{R}$$

Dem. $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} = 1 + \frac{\mathrm{i}x}{1!} - \frac{x^2}{2!} - \frac{\mathrm{i}x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{\mathrm{i}x^5}{5!} - \ldots =$

$$= \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots\right) + \mathrm{i}\left(\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots\right) =$$

$$= \cos x + \mathrm{i} \sin x$$

Corolar 2.

$$\cos x = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2}, \quad \sin x = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}}, \quad (\forall)\ x \in \mathbf{R}$$

Dem. Adunăm $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$ cu $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}$, ținînd seama că $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x} = \cos(-x) + \mathrm{i} \sin(-x) = \cos x - \mathrm{i} \sin x$ etc.

Corolar 3.

$$\mathrm{sh}\, x = \sum_{n \geqslant 0} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \mathrm{ch}\, x = \sum_{n \geqslant 0} \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad (x \in \mathbf{R})$$

Dem. Aplicăm P. 12.5.6. ținînd seama că $\mathrm{ch}\, x = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}$ și $\mathrm{sh}\, x = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$).

12.5.7. Propoziție

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \ldots, x \in (-1, 1]$$

Dem. (I) Considerăm seria geometrică

$$1 - x + x^2 - \ldots + (-1)^{n-1} x^{n-1} + \ldots, (x \in \mathbf{R}),$$

care are raza de convergență $\rho = 1$ și suma egală cu $\frac{1}{1+x}$, $(\forall)\ x \in (-1, 1)$.

Fie $x \in (-1, 1)$ fixat; din P. 12.3.8. rezultă:

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t} = \sum_{n\geqslant 1} \int_0^x (-1)^{n-1} t^{n-1}\, dt = \sum_{n\geqslant 1} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} \qquad (1)$$

Din T. 3.2.6. rezultă că seria $\sum_{n\geqslant 1} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$ este convergentă, deci (T. 12.3.11.)

$$\lim_{x \nearrow 1} (1+x) = \sum_{n\geqslant 1} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} \text{ și deci } \ln 2 = \sum_{n\geqslant 1} (-1)^{n-} \frac{1}{n}.$$

De aici și din (1) rezultă relația:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \ldots \ (\forall)\ x \in (-1, 1]$$

(II) Evident putem scrie

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \ldots + (-1)^{n-1} x^{n-1} + \frac{(-1)^n x^n}{1+x},\ (\forall)\ x \in \mathbf{R} \setminus \{1\}$$

Integrînd pe intervalul de capete 0 și x cu $x \in (-1, 1)$ fixat, obținem:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + (-1)^n \int_0^x \frac{t^n dt}{1+t}$$

Deoarece

$$\left| \int_0^x \frac{t^n dt}{1+t} \right| \leqslant \frac{1}{1+|x|} \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{(1-|x|)n+1} \to 0,\ (n \to \infty),$$

conchidem că

$$\ln(1+x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} = \sum_{n\geqslant 1} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} \text{ etc.}$$

(III) Considerăm funcția $f(x) = \ln(1+x)$, $x \in (-1, \infty)$.

Evident f este indefinit derivabilă și avem:

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n (n+1)!\, (1+x)^{-n},\ (\forall)\ x \in (-1, \infty),\ (\forall)\ n \geqslant 1,$$

de unde rezultă $f(0) = 0$ și $f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1} (n-1)!$, $(\forall)\ n \geqslant 1$.

Aplicăm formula lui Taylor cu restul integral (T.12.4.4.)

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} f^{(k)}(0)\, x^k + r_n(x; 0),\ (\forall)\ x \in (-1, 1),\ n \in \mathbf{N},$$

unde $r_n(x;\,0)$, pe care să-l notăm cu $r_n(x)$, are expresia

$$r_n(x)=\frac{1}{(n-1)\,!}\int_0^x (x-t)^{n-1}f^{(n)}(t)\mathrm{d}t = n(n+1)(-1)^n\int_0^x\left(\frac{x-t}{1+t}\right)^{n-1}\frac{\mathrm{d}t}{1+t}$$

(i) Dacă $x\in[0,1)$, rezultă $\left|\dfrac{x-t}{1+t}\right|\leqslant|x|$, $(\forall)\ t\in[0,x]$

$$\left(\left|\frac{x-t}{1+t}\right|=\frac{x-t}{1+t}\leqslant x\Leftrightarrow x-t\leqslant x+tx \text{ etc.}\right)$$

(ii) Dacă $x\in(-1,0)$, rezultă $\left|\dfrac{x-t}{1+t}\right|\leqslant|x|$, $(\forall)\ t\in[x,0]$

$$\left(\left|\frac{x-t}{1+t}\right|=\frac{t-x}{1+t}\leqslant -x\Leftrightarrow t-x\leqslant -x-tx \text{ etc.}\right)$$

Atunci

$$|r_n(x)|\leqslant n(n+1)\,|x|^{n-1}\int_{-|x|}^{|x|}\frac{\mathrm{d}t}{1+t},\ (\forall)\ x\in(-1,1),\ (\forall)\ n\geqslant 1,$$

deci (P.2.4.1.(2°)) $\lim\limits_{n\to\infty} r_n(x)=0$, $(\forall)\ x\in(-1,1)$, prin urmare:

$$f(x)=\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n\,!}f^{(n)}(0)\,x^n=\sum_{n\geqslant 1}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n},\ (\forall)\ x\in(-1,1)$$

Corolar 1.

$$\ln x=2\left[\frac{x-1}{x+1}+\frac{1}{3}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3+\ldots+\frac{1}{2n+1}\cdot\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{2n+1}+\ldots,\right],\ (\forall)\ x>$$

Dem. Considerăm funcția $\varphi:(-1,1)\to\mathbf{R}_+^*$ definită astfel $\varphi(t)=\dfrac{1+t}{1-t}$

evident φ este bijectivă și avem $\varphi^{-1}(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$, $(\forall)\ x\in\mathbf{R}_+^*$. Deoarece (P.12.5.7

$$\ln(1\pm t)=\pm t-\frac{t^2}{2}\pm\frac{t^3}{3}-\frac{t^4}{4}\pm\ldots,\ (\forall)\ t\in(-1,1),$$

rezultă

$$\ln\frac{1+t}{1-t}=\ln(1+t)-\ln(1-t)=$$

$$=2\left(t+\frac{t^3}{3}+\frac{t^5}{5}+\ldots+\frac{t^{2n+1}}{2n+1}+\ldots,\ (\forall)\ t\in(-1,1),\right.$$

deci

$$\ln x=2\left[\left(\frac{x-1}{x+1}+\frac{1}{3}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^5+\ldots\right],\ (\forall)\ x\in\mathbf{R}_+^*\right.$$

Corolar 2.

$$\ln\frac{1+x}{1-x}=2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\ldots\right),\ |x|<1$$

Corolar 3. *Seria* $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}$ *este divergentă.*

Dem. Din P.12.5.7. rezultă relația $\ln(1-x)=-\sum_{n\geq 1}\frac{x^n}{n}$, $(\forall)\ x\in(-1,1)$.

Punem $x=1-\frac{1}{m}$ cu $m\in\mathbf{N}$ fixat; obținem:

$$\ln\frac{1}{m}=-\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{m}\right)^n\Leftrightarrow\ln m=\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{m}\right)^n,$$

deci $\ln m<\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}$. Cum m a fost arbitrar, conchidem că $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}=+\infty$ etc.

Observație. Seria din Cor. 1 fiind foarte „repede" convergentă ea ne permite să calculăm ușor logaritmul natural al unui număr pozitiv.

12.5.8. Propoziție

$$\operatorname{arc\,tg} x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\ldots,\ (\forall)\ x\in[-1,1]$$

Dem. (I) Considerăm seria geometrică

$$1-x^2+x^4-\ldots+(-1)^n x^{2n}+\ldots,\ (x\in\mathbf{R}),$$

care are raza de convergență $\rho=1$ și suma egală cu $\frac{1}{1+x^2}$, $(\forall)\ x\in(-1,1)$.

Fie $x\in(-1,1)$ fixat; din P.12.3.8. rezultă:

$$\operatorname{arc\,tg} x=\int_0^x\frac{dt}{1+t^2}=\sum_{n\geq 1}\int_0^x(-1)^n t^{2n}\,dt=\sum_{n\geq 1}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Continuăm mai departe ca în P.12.5.7. (I)

(II) Evident putem scrie

$$\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-\ldots+(-1)^{n-1}x^{2n-2}+(-1)^n\frac{x^{2n}}{1+x^2},\ (\forall)\ x\in\mathbf{R}.$$

Fixăm $x\in(-1,1)$ și integrăm pe intervalul de capete 0 și x; obținem:

$$\operatorname{arc\,tg} x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+(-1)^n\int_0^x\frac{t^{2n}}{1+t^2}\,dt.$$

Continuăm mai departe ca în P.12.5.7. (II).

(III) Considerăm funcția $f(x)=\operatorname{arc\,tg} x$, $x\in(-1,1)$.

Se aplică formula lui Taylor cu restul lui Lagrange etc.

Corolar 1 (Formula lui Leibniz)

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\ldots,\ \textit{deci}\ \frac{\pi}{4}\approx\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1},\ \text{cu o}\ \textit{eroare}$$

$\leqslant\frac{4}{2n+3}$, *prin lipsă (resp. prin adaos), dacă n este impar (resp. par).*

12.5.9. Teoremă (Seria binominală)

$$(1+x)^p = 1 + \binom{p}{1}x + \binom{p}{2}x^2 + \ldots + \binom{p}{n}x^n + \ldots,\ x \in (-1,1),\ p \in \mathbf{R},$$

unde $\binom{p}{n} := \dfrac{p(p-1)\ldots(p-n+1)}{1.2.\ldots.n}$ $(n \geqslant 1)$ *sînt „coeficienții binominali".*

Dem. Dacă $p \in \mathbf{N}$, avem $\binom{p}{n} = 0$, $(\forall)\ n > p$, deci relația din enunț se scrie $(1+x)^p = 1 + \sum_{k=1}^{n}\binom{p}{k}x^k$ și ea rezultă din P.12.5.2. Fie deci $p \notin \mathbf{N}$ fixat și fie $a_0 := 1$ și $a_n := \binom{p}{n}$ $(n \geqslant 1)$. Evident $a_n \neq 0$, $(\forall)\ n \geqslant 0$ și avem $\lim_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\dfrac{p-n}{n+1} = 1$, deci seria de puteri $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$, $x \in \mathbf{R}$, are raza de convergență 1 și deci (P.12.3.7.) seria derivată $\sum_{n\geqslant 1} n a_n x^{n-1}$ are și ea raza de convergență 1, încî (P.3.1.4.):

$$\lim_{n\to\infty} n a_n x^{n-1} = 0,\ (\forall)\ x \in (-1,1) \qquad (1$$

Considerăm mai departe funcția $f(x) = (1+x)^p$, $x \in (-1,1)$. Eviden f este indefinit derivabilă și avem:

$$f^{(n)}(x) = p(p-1)\ldots(p-n+1)(1+x)^{p-n} = n!\ a_n(1+x)^{p-n},$$

$$(\forall)\ x \in (-1,1),\ n \in \mathbf{N},$$

de unde rezultă $f(0) = 0$ și $f^{(n)}(0) = n!\ a_n$, $(\forall)\ n \geqslant 1$. Aplicăm formula lui Taylo cu restul integral (T.12.4.4.):

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}(f^{(k)}(0)\,x^k + r_n(x;0)),\ (\forall)\ x \in (-1,1),\ n \in \mathbf{N},$$

unde $r_n(x;0)$, pe care să-l notăm cu $r_n(x)$, are expresia

$$r_n(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^x (x-t)^{n-1} f^{(n)}(t)\,\mathrm{d}t = n a_n \int_0^x (x-t)^{n-1}(1+t)^{n-1}\,\mathrm{d}t =$$

$$= n a_n \int_0^x \left(\frac{x-t}{1+t}\right)^{n-1}(1+t)^{p-1}\,\mathrm{d}t$$

Ca și în P.12.5.7. deducem:

$$(\forall)\ x \in [0,1)\ (\text{resp. } x \in (-1,0)) \Rightarrow \left|\frac{x-t}{1+t}\right| \leqslant |x|,\ (\forall)\ t \in [0,x]\ (\text{resp. } t \in [x,0]$$

Atunci

$$|r_n(x)| \leqslant n a_n |x|^{n-1}\int_{-|x|}^{|x|}(1+t)^{p-1}\,\mathrm{d}t,\ (\forall)\ x \in (-1,1),\ (\forall)\ n \geqslant 1,$$

deci (cf. (1)) $r_n(x) \to 0 (n \to \infty)$, $(\forall)\ x \in (-1,1)$, prin urmare

$$f(x) = \sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{n!}f^{(n)}(0)\,x^n = 1 + \sum_{n\geqslant 0}\binom{p}{n}x^n,\ (\forall)\ x \in (-1,1).$$

Corolar 1.

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 \pm \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{4} \pm \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{x^3}{6} -$$

$$-\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{x^4}{8} + \ldots, \quad (\forall)\ x \in (-1, 1)$$

Observație Dacă $x = 1$, atunci seria binominală este absolut convergentă, dacă $p \geqslant 0$ (aplicăm T.3.2.9.), semiconvergentă, dacă $-1 < p < 0$ și divergentă, dacă $p \leqslant 1$. Dacă $x = -1$, atunci seria binominală este absolut convergentă, dacă $p \geqslant 0$ și divergentă, dacă $p < 0$. Suma seriei binominale în punctele $x = 1$ resp. $x = -1$, în cazul convergenței, se calculează utilizînd a doua teoremă a lui Abel (T.12.3.11.).

12.5.10. Propoziție

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{x^5}{5} + \ldots +$$

$$+ \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots, \quad x \in (-1, 1).$$

Dem. Evident avem : $(\arcsin x)' = (1 - x^2)^{-1/2}$, $(\forall)\ x \in (-1, 1)$, deci (T.12.5.9.) :

$$(\arcsin x)' = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}x^4 + \ldots + \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n} + \ldots, \quad x \in (-1, 1).$$

Seria din dreapta are, evident, raza de convergență 1 (P.12.3.6.). Din P.12.3.8. rezultă :

$$\arcsin x = \int_0^x (\arcsin t)\, dt = 1 + \sum_{n \geqslant 1} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad (\forall)\ x \in (-1, 1)$$

Corolar 1.

$$\frac{\pi}{6} = 1 + \sum_{n \geqslant 1} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{1}{2n+1}\cdot\frac{1}{2^{2n+1}}.$$

Observație. Relația din Cor. 1 ne permite să calculăm ușor valoarea aproximativă a lui π, seria din dreapta fiind „rapid" convergentă.

12.5.11. Propoziție.

$$1^\circ\ \sin x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \begin{cases} o(x^{2n+2}) \\ O(x^{2n+3}) \end{cases}, \quad x \to 0;$$

$$2^\circ\ \cos x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \begin{cases} o(x^{2n+1}) \\ O(x^{2n+2}) \end{cases}, \quad x \to 0;$$

$$3^\circ\ e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \begin{cases} o(x^n) \\ O(x^{n+1}) \end{cases}, \quad x \to 0;$$

$$4^\circ\ \ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + \begin{cases} o(x^n) \\ O(x^{n+1}) \end{cases}, \quad x \to 0;$$

$$5^\circ \quad \operatorname{arc\,tg} x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + \begin{cases} o(x^{2n+2}) \\ O(x^{2n+3}) \end{cases}, \quad x \to 0;$$

$$6^\circ \quad (1+x)^p = 1 + \sum_{k=1}^{n} \binom{p}{k} x^k + \begin{cases} o(x^n) \\ O(x^{n+1}) \end{cases}, \quad x \to 0 \ (p \in \mathbf{R});$$

$$7^\circ \quad (1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \frac{x^{k+1}}{2k+2} + \begin{cases} o(x^{n+1}) \\ O(x^{n+2}) \end{cases}, \quad x \to 0;$$

$$8^\circ \quad \arcsin x = \sum_{k=1}^{n} \frac{(2k-1)!!}{2k!!} \frac{x^{2k-1}}{2k-1} + \begin{cases} o(x^{2k}) \\ O(x^{2k+1}) \end{cases}, \quad x \to 0.$$

Dem. Aplicăm P.12.5.5.—P.12.5.10.

Exemplul 1. *Să se calculeze* $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(\sin x) - x}{x^3}$.

Din (P.12.5.11. (1°)) rezultă că există $\alpha : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ continuă şi nulă în 0 a.î.

$$\sin t = \frac{t}{1!} - \frac{t^3}{3!} + t^4 \alpha(t), \quad (\forall)\ t \in \mathbf{R},$$

deci

$$\sin(\sin x) = \sin x - \frac{1}{6} \sin^3 x + \alpha(\sin x) \cdot \sin^4 x, \quad (\forall)\ x \in \mathbf{R}.$$

Cum $\sin x - x = -\dfrac{1}{6} x^3 + x^4 \alpha(x)$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$, deducem :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(\sin x) - x}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x - \frac{1}{6} \sin^3 x + \alpha(\sin x) \sin^4 x - x}{x^3} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \left[\left(-\frac{1}{6} + x\alpha(x) \right) - \frac{1}{6} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^3 + \left(\frac{\sin x}{x} \right)^4 x\alpha(\sin x) \right] = -\frac{1}{3}.$$

Exemplul 2. *Să se calculeze valoarea aproximativă a lui* $\sin 61^\circ$.
Scriem dezvoltarea în serie a funcţiei $f(x) = \sin x$, $x \in \mathbf{R}$:

$$f(x+h) = f(a) + \frac{h}{1!} f'(a) + \frac{h^2}{2!} f''(a) + \ldots, \quad (\forall)\ a, h \in \mathbf{R}.$$

Pentru $a = 60^\circ = \dfrac{\pi}{3}$ şi $h = 1^\circ = \dfrac{\pi}{180}$, obţinem :

$$\sin 61^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{180} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2!} \cdot \left(\frac{\pi}{180} \right)^2 \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right) + \frac{1}{3!} \left(\frac{\pi}{180} \right)^3 \cdot \left(\frac{-1}{2} \right) +$$

$$+ \frac{1}{4!} \cdot \left(\frac{\pi}{180} \right)^4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \ldots = \frac{1{,}7320508}{2} + 0{,}0174532 \cdot \frac{1}{2} -$$

$$- \frac{1}{2} \cdot \frac{1{,}7320508}{2} \cdot 0{,}0003040 - \frac{1}{12} \cdot 0{,}0000053 + \frac{1}{48} \cdot \frac{1{,}7320508}{2} \cdot 0{,}0000001 =$$

$$= 0{,}8660254 + 0{,}0087266 - 0{,}0001318 - 0{,}0000004 = 0{,}8746198.$$

Exemplul 3. *Să se calculeze cu aproximație logaritmii naturali* ln 2, ln 3 ln 4, ...

În P. 12.5.7. Cor. 1 punem $x = 2$; obținem :

$$\ln 2 = 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 3^3} + \frac{1}{5 \cdot 3^5} + \frac{1}{7 \cdot 3^7} + \dots\right)$$

Să luăm în considerație primii 5 termeni; atunci

$$\ln 2 \approx \frac{2}{3} + \frac{2}{3 \cdot 3^3} + \frac{2}{5 \cdot 3^5} + \frac{2}{7 \cdot 3^7} + \frac{2}{9 \cdot 3^9} =$$

$$= \frac{2}{3} + \frac{2}{81} + \frac{2}{1215} + \frac{2}{14309} + \frac{2}{177147} \approx 0{,}693147.$$

Să evaluăm eroarea, majorînd restul seriei

$$r_5 = 2\left(\frac{1}{11 \cdot 3^{11}} + \frac{1}{13 \cdot 3^{13}} + \dots\right)$$

Avem

$$r_5 < \frac{2}{11 \cdot 3^{11}} + \frac{2}{11 \cdot 3^{13}} + \frac{2}{11 \cdot 3^{15}} + \dots = \frac{2}{11 \cdot 3^{11}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{9}} =$$

$$= \frac{1}{3^{11}} \cdot \frac{9}{44} < \frac{1}{177 \cdot 147} < 10^{-5}.$$

Mai departe, fie $n \geqslant 1$ natural fixat. Avem :

$$\frac{1+x}{1-x} = \frac{n+1}{n} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2n+1},$$

deci (P.12.5.7. Cor. 2) rezultă :

$$\ln(n+1) - \ln n = 2\left(\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{3(2n+1)^3} + \frac{1}{5(2n+1)^5} + \dots\right).$$

Pentru $n = 2$ obținem :

$$\ln 3 = \ln 2 + 2\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{3 \cdot 5^3} + \frac{1}{5 \cdot 5^5} + \dots\right).$$

Pentru $n = 4$ obținem :

$$\ln 5 = 2 \ln 2 + 2\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{3 \cdot 9^3} + \frac{1}{5 \cdot 9^5} + \dots\right) \text{ etc.}$$

Înlocuind ln 2 cu valoarea dedusă anterior și calculînd cu aproximație suma seriei din dreapta, deducem valoarea lui ln 3, apoi ln 5 etc., cu o eroare oricît de mică.

Exemplul 4. *Să se stabilească relația lui J. M a c h i n*

$$\frac{\pi}{4} = 4 \operatorname{arctg} \frac{1}{5} - \operatorname{arctg} \frac{1}{239},$$

apoi să se deducă de aici valoarea lui π *cu o eroare* $\leqslant 10^{-7}$.

Fie $\alpha = \operatorname{arctg}\frac{1}{5}$. Evident avem relaţiile:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{2\cdot\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{25}} = \frac{5}{12};\quad \operatorname{tg} 4\alpha = \frac{2\cdot\frac{5}{12}}{1-\frac{25}{144}} = \frac{120}{119}$$

Cum $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1$ şi $\operatorname{tg} 4\alpha = 1 + \frac{1}{119}$, rezultă $0 < \beta := 4\alpha - \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2}$ şi deoarece

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{\operatorname{tg} 4\alpha - \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}{1 + \operatorname{tg} 4\alpha\cdot\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}} = \frac{\frac{120}{119} - 1}{1 + \frac{120}{119}} = \frac{1}{239},$$

deducem

$$\frac{\pi}{4} = 4\operatorname{arctg}\frac{1}{5} - \operatorname{arctg}\frac{1}{239} \tag{1}$$

Să scriem acum dezvoltarea în serie a funcţiei arctg

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots,\quad x \in [-1, 1] \tag{2}$$

Din (1) şi (2) se obţine:

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\left(\frac{4}{5^{2n-1}} - \frac{1}{239^{2n-1}}\right) \tag{3}$$

Aproximind suma seriei (3) cu o sumă parţială, eroarea este mai mică decît modulul primului termen neglijat. Să determinăm $n \geqslant 1$ a.î. $\frac{4}{2n-1}\cdot\frac{4}{5^{2n-1}} < 10^{-6}$. Pentru $n = 5$ se obţine $\frac{4}{9}\cdot\frac{4}{1\ 953\ 125} = \frac{16}{1\ 757\ 8125} < 10^{-6}$. Aşadar avem:

$$\frac{\pi}{4} = 4\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5^3} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5^5} - \frac{1}{7}\cdot\frac{1}{5^7} + \frac{1}{9}\cdot\frac{1}{5^9}\right) -$$

$$-\left(\frac{1}{239} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{239^3} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{239^5} - \frac{1}{7}\cdot\frac{1}{239^7} + \frac{1}{9}\cdot\frac{1}{239^9}\right) =$$

$$= 4(25\cdot 10^{-1} - 2{,}6666666\cdot 10^{-3} + 6{,}4\cdot 10^{-5} - 1{,}8285714\cdot 10^{-6} +$$

$$+ 5{,}6888888\cdot 10^{-8}) - (4{,}1841004\cdot 10^{-3} - 2{,}4416519\cdot 10^{-8} +$$

$$+ 2{,}5647232\cdot 10^{-3} - 3{,}2071309\cdot 10^{-18} + 4{,}3669821\cdot 10^{-23}) =$$

$$= 7{,}8958228\cdot 10^{-1} - 4{,}1840760\cdot 10^{-3} = 0{,}78539821,$$

Prin urmare

$$\pi \approx 4\cdot 0{,}78539821 = 3{,}14159284$$

CAPITOLUL 13

METODE NUMERICE ÎN ANALIZA MATEMATICĂ

Dezvoltarea actuală a matematicilor aplicate și importanța lor în fizică, tehnică și economie etc., face necesară introducerea unor noțiuni de Analiză numerică odată cu însușirea primelor noțiuni de Calcul diferențial și integral. Mai mult, în acest mod, noțiunile teoretice abstracte pot fi mai ușor însușite, dacă sînt însoțite de aplicații concrete, practice.

Vom prezenta în acest capitol cîteva elemente de Analiză numerică. Printre acestea enumerăm : rezolvarea numerică a ecuațiilor, interpolarea funcțiilor și integrarea numerică a funcțiilor.

13.1. Calculul cu aproximație. Exemple

Fie $a \in \mathbf{R}$ un număr a cărui valoare exactă nu o putem determina (spre exemplu π, e, $\sqrt{2}$ etc.) În acest caz vom înlocui a cu un număr $\tilde{a}$ *suficient de aproape* de a, a cărui valoare o cunoaștem.

13.1.1. Definiție. Fie $\tilde{a}$ și a două numere. Vom spune că a este *aproximativ egal* cu $\tilde{a}$ (în scris $a \approx \tilde{a}$), cu o *eroare absolută* $\varepsilon > 0$, dacă $|a - \tilde{a}| \leqslant \varepsilon$. Vom spune că a este *aproximativ egal cu* $\tilde{a}$ ($\tilde{a} \neq 0$) cu o *eroare relativă* $\delta > 0$, dacă $\left|\frac{a - \tilde{a}}{\tilde{a}}\right| \leqslant \delta$. Vom conveni să scriem atunci $a = \tilde{a} \pm \varepsilon$ (resp. $a = \tilde{a}(1 \pm \delta)$), unde $\tilde{a}$ și ε (resp. δ) au același număr de zecimale.

Expresiile „*$\tilde{a}$ este valoarea aproximativă a lui a*" și „*a este aproximativ egal cu $\tilde{a}$*" sînt sinonime.

Exemplu. Fie $a = \sqrt{2} = 1{,}4142135 \ldots$ Atunci $\sqrt{2} \approx 1{,}42$ (prin adaos) cu eroarea absolută $\varepsilon = 0{,}01$ și cu eroarea relativă $\delta = \frac{0{,}01}{1{,}42}$; $\sqrt{2} \approx 1{,}411$ (prin lipsă) cu eroarea absolută $\varepsilon = 0{,}004$ și cu eroarea relativă $\delta = \frac{0{,}004}{1{,}411}$.

Se știe (v. [23]) că orice număr $a \in \mathbf{R}_+$ admite o *reprezentare zecimală* :

$$a = \alpha_m 10^m + \alpha_{m-1} 10^{m-1} + \ldots + \alpha_{m-n+1} 10^{m-n+1} + \ldots ,$$

unde (cifrele) α_m, $\alpha_{m-1} \ldots \alpha_0$, α_1, α_2, ... aparțin mulțimii $\{0, 1, 2, \ldots 9\}$. Vom spune atunci că α_{m-n+1} este a n-a *cifră* a lui a și vom scrie

$$a = \alpha_m \alpha_{m-1} \ldots \alpha_0, \ \alpha_1, \ \alpha_2 \ldots \alpha_{m-n+1} \ldots$$

Exemplu. $8301{,}475 = 8 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0 +$

$$+ \frac{4}{10} + \frac{7}{10^2} + \frac{5}{10^3}.$$

13.1.2. Definiție. A n-a cifră a unui număr real reprezentat în baza zecimală se numește *semnificativă* dacă este nenulă sau urmează unei cifre nenule (i.e. primele $n-1$ cifre nu sînt toate nule).

Exemplu. Dacă $a = 0{,}\underline{90701}$; $a = \underline{4{,}03200}$; $a = 0{,}00\underline{650}$, atunci cifrele subliniate sînt semnificative.

13.1.3. Definiție. Fie $a,\ \tilde{a} \in \mathbf{R}$ cu $a \approx \tilde{a}$. Vom spune că primele n cifre semnificative din reprezentarea zecimală a lui $\tilde{a}$ sînt *exacte* (pentru a) dacă $|a - \tilde{a}| \leqslant \frac{1}{2} 10^{m-n+1}$.

Exemplu. Dacă $a = 715{,}996$, atunci $\tilde{a} = 916{,}000$ are primele 5 cifre semnificative exacte, deoarece $|a - \tilde{a}| = 0{,}004 < \frac{1}{2} 10^{2-5+1}$.

Dacă $a = \sqrt{2}$, atunci $\tilde{a} = 1{,}414$ are primele patru cifre semnificative exacte, deoarece $0 < a - \tilde{a} = 0{,}00021 \ldots < \frac{1}{2} 10^{0-4+1}$.

13.1.4. Definiție. Fie $a \in \mathbf{R}$ și $(\tilde{a}_n)_{n \geqslant 1}$ un șir convergent la a de valori aproximative ale lui a. Dacă primele p cifre semnificative din reprezentarea zecimală a lui $\tilde{a}_n$ sînt exacte (pentru a) și ele coincid ca poziție și sînt exacte și în reprezentarea zecimală a lui $\tilde{a}_{n+k}$, $(\forall)\ k \geqslant 1$, vom spune că aceste p cifre sînt *stabilizate.*

Exemplu. Fie $a = \sqrt{3} = 1{,}732058 \ldots$; $\tilde{a}_1 = 1, \ldots$; $\tilde{a}_2 = 1{,}7 \ldots$; $\tilde{a}_3 = 1{,}73 \ldots$; $\tilde{a}_4 = 1{,}732 \ldots$; $\tilde{a}_5 = 1{,}7320 \ldots$; $\tilde{a}_6 = 1{,}73205 \ldots$; $\tilde{a}_7 = 1{,}732058 \ldots$; Observăm mai întîi că cifra 1 este stabilizată, apoi cifrele 1 și 7 etc.

13.1.5. Propoziție. *Fie* $a_1, a_2, \ldots, a_n$; $b_1, b_2, \ldots, b_n \in \mathbf{R}$. *Dacă* $a_i \approx b_i$ *cu eroarea absolută* $\varepsilon_i (i = \overline{1, n})$, *atunci* $\sum_{i=1}^{n} a_i \approx \sum_{i=1}^{n} b_i$, *cu eroarea absolută* ε, *unde* $\varepsilon \leqslant \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i$.

Dem. Evident $\left| \sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{i=1}^{n} b_i \right| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |a_i - b_i| \leqslant \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i$.

13.1.6. Propoziție. *Fie* $a_1, a_2, \ldots a_n$; $b_1, b_2, \ldots b_n$ *din.* $\mathbf{R}_+^*$ *Dacă* $a_i \approx b_i$ *cu eroarea relativă* $\delta_i (i = \overline{1, n})$, *atunci* $\prod_{i=1}^{n} a_i \approx \prod_{i=1}^{n} b_i$, *cu eroarea relativă* $\leqslant \delta$, *unde* $\delta \leqslant \sum_{i=1}^{n} \delta_i$.

Dem. Deoarece avem : $\ln (x + h) - \ln x \approx \frac{h}{x}$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}_+^*$, $h \to 0$, rezultă

$$\ln a_i - \ln b_i \approx \frac{a_i - b_i}{b_i} \approx \frac{a_i - b_i}{a_i} = \delta_i (i = \overline{1, n})$$

Punînd $a := \prod_i a_i$ și $b := \prod_i b_i$, obținem:

$$\left|\frac{a-b}{a}\right| \approx |\ln a - \ln b| = \left|\sum_{i=1}^{n} (\ln a_i - \ln b_i)\right| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |\ln a_i - \ln b_i| = \sum_{i=1}^{n} \delta_i$$

13.1.7. Propoziție. *Fie* $a_1, a_2, \ldots a_n \in \mathbf{R}^*$ *toate avînd același semn și* $b_1, b_2 \ldots, b_n \in \mathbf{R}$. *Dacă* $a_i \approx b_i$, *cu eroarea relativă* $\delta_i (i = \overline{1, n})$, *atunci* $\sum_{i=1}^{n} a_i \approx$ $\approx \sum_{i=1}^{n} b_i$, *cu eroarea relativă* $\leqslant \delta$, *unde* $\delta = \max_{i=\overline{1,n}} \delta_i$.

Dem. Presupunem $a_i > 0$, $(\forall)$ $i = 1, n$. Deoarece $|a_i - b_i| \leqslant \delta_i a_i$, $(\forall) i = \overline{1, n}$, avem (P. 2.1.32):

$$\frac{\left|\sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{i=1}^{n} b_i\right|}{\sum_{i=1}^{n} a_i} \leqslant \frac{\sum_{i=1}^{n} |a_i - b_i|}{\sum_{i=1}^{n} a_i} \leqslant \frac{\sum_{i=1}^{n} \delta_i a_i}{\sum_{i=1}^{n} a_i} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{a_1 + a_2 + \ldots + a_n} \delta_i \leqslant (\max_{i=\overline{1,n}} \delta_i) \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{a_1 + a_2 + \ldots + a_n} = \max_{i=\overline{1,n}} \delta_i.$$

13.1.8. I — Aplicație. Fie $U \subseteq \mathbf{R}$ o mulțime deschisă, $f : U \to \mathbf{R}$ o funcție diferențiabilă (=derivabilă) și $a \in U$ un punct. Atunci avem:

$$f(a + h) - f(a) = f'(a) \cdot h + \circ(|h|), \; h \to 0,$$

de unde rezultă egalitatea aproximativă:

$$\boxed{f(a + h) \approx f(a) + f'(a) \cdot h, \; h \to 0} \tag{1}$$

eroarea avînd un ordin de mărime superior lui $|h|$.

Deoarece funcția $y(h) := f(a) + f'(a) \cdot h$, $h \in \mathbf{R}$, reprezintă ecuația tangentei la graficul lui f în punctul $(a, f(a))$, relația (1) are următoarea semnificație geometrică simplă: *într-o vecinătate suficient de mică a punctului* a *graficul lui* f *poate fi aproximat cu tangenta la grafic în punctul* $(a, f(a))$ (fig. 64).

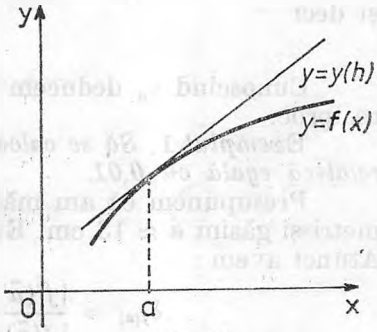


Fig. 64

Relația (1) ne permite să înlocuim $f(a+h)$, pentru h suficient de mic, care se calculează adeseori destul de complicat, prin $f(a) + f'(a) \cdot h$, care se calculează mai ușor.

Exemplul 1. Fie funcția $f(x) = \sqrt{x}$, $x \in \mathbf{R}_+$. Atunci avem:

$$f(x + h) \approx f(x) + f'(x) \cdot h, \quad (\forall) \, x \in \mathbf{R}_+^* \wedge h \in \mathbf{R}, \quad h \to 0,$$

deci

$$\sqrt{x + h} \approx \sqrt{x} + \frac{h}{2\sqrt{x}}, \quad (\forall) x \in \mathbf{R}_+^* \wedge h \in \mathbf{R}, \quad h \to 0,$$

În particular

$$\sqrt{1+h} \approx 1 + \frac{h}{2}, \quad (\forall)\ h \in \mathbf{R},\ h \to 0.$$

Exemplul 2. Fie funcţia $f(x) = \sin x$, $x \in \mathbf{R}$. Atunci avem :

$$\sin(x+h) \approx \sin x + \cos x \cdot h,\ (\forall) x, h \in \mathbf{R},\ h \to 0.$$

În particular

$$\sin h \approx h,\ (\forall)\ h \in \mathbf{R},\ h \to 0$$

Exemplul 3. Fie funcţia $f(x) = \ln x$, $x \in \mathbf{R}_+^*$. Atunci

$$\ln(x+h) \approx \ln x + \frac{h}{x},\ (\forall)\ x \in \mathbf{R}_+^* \ \blacktriangle\ h \in \mathbf{R},\ h \to 0.$$

În particular

$$\ln(1+h) \approx h,\ (\forall)\ h \in \mathbf{R},\ h \to 0.$$

Observaţie. În locul relaţiei $f(a+h) \approx f(a) + f'(a) \cdot h$, $h \to 0$, putem utiliza uneori relaţia $f(a+h) \approx f(a) + f'\left(a + \frac{h}{2}\right) \cdot h$, $h \to 0$.

13.1.9. **A II-a aplicaţie**

Fie $\mathring{U} = U \subseteq \mathbf{R}$ o mulţime, $f : U \to \mathbf{R}$ o funcţie diferenţiabilă (= derivabilă) şi $a \in U$ un punct. Dacă $a \approx \tilde{a}$, cu o eroare absolută ε_a, atunci $f(a) \approx f(\tilde{a})$, cu o eroare absolută $\boxed{\varepsilon_{f(a)} = \varepsilon_a |f'(a)|}$ (1), deci cu o eroare relativă $\boxed{\delta_{f(a)} = \varepsilon_a \left| \frac{f'(\tilde{a})}{f(\tilde{a})} \right|}$ (2), dacă $f(\tilde{a}) \neq 0$.

Într-adevăr, dacă $|a - \tilde{a}| < \varepsilon_a$ şi ε_a este suficient de mic, atunci avem :

$$f(a) - f(\tilde{a}) \approx (a - \tilde{a}) f'(\tilde{a}),$$

deci

$$|f(a) - f(\tilde{a})| \approx |a - \tilde{a}| \cdot |f'(\tilde{a})| < \varepsilon_a |f'(\tilde{a})|$$

şi deci

$$\varepsilon_{f(a)} = \varepsilon_a |f'(\tilde{a})|$$

Cunoscînd ε_a deducem pe $\varepsilon_{f(a)}$ (resp. $\delta_{f(a)}$) din relaţia (1) (resp. (2)) şi reciproc.

Exemplul 1. *Să se calculeze volumul unui cub de latură dată, cu o eroare relativă egală cu 0,01.*

Presupunem că am măsurat latura cubului cu o riglă gradată în centimetri şi găsim $a \approx 13$ cm. Evident $\varepsilon_a = 0{,}5$ cm. Fie funcţia $f(x) = x^3$, $x \in \mathbf{R}$. Atunci avem :

$$\delta_{f(a)} = \frac{|f'(\tilde{a})|}{|f(\tilde{a})|} \varepsilon_a = \frac{3 \cdot 13^2}{13^3} \cdot 0{,}5 = \frac{1{,}5}{13} \approx 0{,}12.$$

Aşadar, pentru a obţine un rezultat în limitele cerute, ne trebuie pentru ε_a o valoare mai mică. Mai precis :

$$\varepsilon_a = \frac{|f(\tilde{a})|}{|f'(\tilde{a})|} \delta_{f(a)} = \frac{13^3}{2 \cdot 13^2} \cdot 0{,}01 = \frac{0{,}13}{2} \approx 0{,}06$$

Prin urmare trebuie măsurată latura pătratului cu o riglă gradată în milimetri în care $\varepsilon_a = 0{,}05$ cm.

Exemplul 2. Să se calculeze aria unui triunghi în care se cunosc două laturi și valoarea aproximativă a unghiului dintre ele.

Fie ΔABC în care $b = 5$ cm, $c = 8$ cm și $A \approx 31°$ cu $\varepsilon_A = 0{,}5°$. Avem aria $(\Delta) = \frac{1}{2} bc \sin A$. Considerăm deci funcția $f(x) = \frac{1}{2} bc \sin x$, $x \in \mathbf{R}$. Atunci avem $f(A) \approx f(\tilde{A})$, cu eroarea absolută:

$$\varepsilon_{f(A)} = |f'(\tilde{A})| \cdot |A - \tilde{A}| = |f'(\tilde{A})| \varepsilon_A,$$

unde $A - \tilde{A}$ trebuie exprimat în radiani.

Însă $1^0 \approx 0{,}017$ rad., deci $0{,}5^0 \approx 0{,}008$ rad.; $\sin 31^0 \approx 0{,}515$ și $\cos 31^0 \approx \approx 0{,}857$, deci

$$\text{aria } (\Delta) \approx \frac{1}{2} \cdot 5{,}8 \,.\, 0{,}515 = 10{,}3$$

și

$$\varepsilon_{f(A)} = 0{,}008 \cdot \cos 31^0 \approx 0{,}008 \cdot 0{,}857 \approx 0{,}007$$

Pentru eroarea relativă avem:

$$\delta_{f(A)} = \frac{\varepsilon_f(A)}{|f(\tilde{A})|} = \frac{0{,}007}{10{,}3} \approx 0{,}001.$$

13.2. Separarea rădăcinilor unei ecuații

Fie $A \subseteq \mathbf{R}$ o mulțime și $f : A \to \mathbf{R}$ o funcție. Prin *soluție* (zerou) a ecuației $f(x) = 0$ se înțelege un element $x_0 \in A$ cu $f(x_0) = 0$. A *separa* soluțiile (zerourile) unei ecuații $f(x) = 0$ (1), înseamnă a determina o familie de intervale $(I_k)_{k \in K}$ disjuncte două cîte două și cu proprietatea că fiecare interval $I_k (k \in K)$ conține exact o soluție a ecuației (1).

Vom prezenta aici cîteva procedee de separare a rădăcinilor unei ecuații date.

13.2.1. Teoremă. *Fie $I \subseteq \mathbf{R}$ un interval și $f : I \to \mathbf{R}$ o funcție cu proprietatea Darboux, în particular f continuă. Atunci $(\forall)\, a, b \in I$, $a < b$, cu $f(a) \cdot f(b) < 0$, există $x_0 \in (a, b)$ a.î. $f(x_0) = 0$. Dacă în plus f este strict monotonă pe (a, b), rezultă că ecuația $f(x) = 0$ are în intervalul (a, b) o soluție unică.*

Dem. $J := f([a, b])$ este un interval (P.4.3.2.). Cum $f(a), f(b) \in J$ și $f(a), f(b)$ au semne contrare, avem $f(a) < 0 < f(b)$ sau $f(b) < 0 < f(a)$; fie, spre exemplu, primul caz. Atunci $0 \in [f(a), f(b)] \subseteq J$, deci $(\exists) x_0 \in [a, b]$ cu $f(x_0) = 0$. Evident $x_0 \neq a$ și $x_0 \neq b$, deci $x_0 \in (a, b)$ etc.

Corolar 1. *Fie $I \subseteq \mathbf{R}$ un interval și $f : I \to \mathbf{R}$ o funcție derivabilă. Dacă $a, b \in I$, $a < b$, $f(a) \cdot f(b) < 0$ și $f'(x) \neq 0$, $(\forall)\, x \in (a, b)$, atunci ecuația $f(x) = 0$ are în intervalul (a, b) o soluție unică.*

Dem. Din T.6.3.7. Cor. 2 rezultă f strict monotonă. Aplicăm mai departe T.13.2.1.

13.2.2. Teoremă. *Fie* $I \subseteq \mathbf{R}$ *un interval şi* $f : I \to \mathbf{R}$ *o funcţie continuă pe* I, *derivabilă pe* $\mathring{I}$, *cu proprietatea că* $(\exists)\ m_1, M_2 > 0$ *a.î.* $m_1 \leqslant |f'(x)| \leqslant M_2$, $(\forall)\ x \in \mathring{I}$. *Atunci* $(\forall)\ x_1, x_2 \in I$ *avem inegalităţile* :

$$\frac{1}{M_1}|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant |x_1 - x_2| \leqslant \frac{1}{m_1}|f(x_1) - f(x_2)|$$

Dem. Fie $x_1, x_2 \in I$ fixaţi, spre exemplu $x_1 < x_2$. Din T.6.3.4. rezultă că $(\exists)\xi \in (x_1, x_2)$ a.î.

$$f(x_1) - f(x_2) = (x_1 - x_2) f'(\xi)$$

Cum $m_1 \leqslant |f'(\xi)| \leqslant M_1$, rezultă

$$m|x_1 - x_2| \leqslant |f(x_1) - f(x_2)| \leqslant |x_1 - x_2| M \text{ etc.}$$

Corolar 1. *Fie* $I \subseteq \mathbf{R}$ *un interval,* $f : I \to \mathbf{R}$ *o funcţie derivabilă şi fie* $x_0 \in I$ *o soluţie a ecuaţiei* $f(x) = 0$. *Dacă* $(\exists)\ J \subseteq I$ *un interval a.î.* $x_0 \in J$ *şi* $|f'(x)| \geqslant m_1 > 0$, $(\forall)\ x \in J$, *atunci* $(\forall)\ x \in J$, *avem* $x \approx x_0$ *cu o eroare absolută* $\leqslant \dfrac{1}{m_1}|f(x)|$.

Exemplul 1. *Să se separe rădăcinile reale ale ecuaţiei* $x^4 - 8x + 1 = 0$, *apoi să se calculeze valorile lor aproximative.*

Evident $P(x) \geqslant P(0) = 1$, $(\forall)\ x \leqslant 0$ şi $P(x) \geqslant P(2) = 1$, $(\forall)\ x \geqslant 2$, deci soluţiile reale ale ecuaţiei $P(x) = 0$ se află (dacă există) în intervalul $(0, 2)$ şi cum $P(1) = -6 < 0$, ecuaţia are cel puţin două soluţii reale, una în intervalul $(0, 1)$ şi alta în intervalul $(1, 2)$. Însă $P'(x) = 4(x^3 - 2) < 0$ $(\forall)\ x \in (0, \sqrt[3]{2})$ şi $P'(x) > 0$ $(\forall)\ x > \sqrt[3]{2}$, deci P este strict descrescătoare pe $[0, \sqrt[3]{2}]$ şi strict crescătoare pe $(\sqrt[3]{2}, \infty)$. Cum $f(\sqrt[3]{2}) = 2 - 8\sqrt[3]{2} < 0$, conchidem că ecuaţia dată are numai două soluţii reale.

Fie x_0 prima soluţie. Deoarece $P\left(\frac{1}{2}\right) < 0$, avem că $x_0 \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$. Cum $P''(x) > 0$ $(\forall)\ x > 0$, rezultă că P' este strict crescătoare pe $[0, \infty)$, deci

$$m_1 = \inf_{x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]} |P'(x)| = \min\left\{|P'(0)|, \left|P'\left(\frac{1}{2}\right)\right|\right\} = \frac{15}{2}$$

şi deci

$$\left|x_0 - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{15/2}\left|P\left(\frac{1}{2}\right)\right| = \frac{47}{120};\quad |x_0 - 0| < \frac{1}{15/2}|P(0)| = \frac{2}{15}.$$

Prin urmare $\frac{1}{2}$ şi 0 aproximează pe x_0 cu o eroare absolută $< 47/120$ respectiv $< 2/15$.

Observînd că $P\left(\frac{1}{8}\right) = \frac{1}{8^4} > 0$ şi $P\left(\frac{1}{4}\right) = -\frac{255}{256} < 0$, rezultă că $x_0 \in \left(\frac{1}{8}, \frac{1}{4}\right)$, de unde deducem direct că $c = \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{3}{16}$ aproximează pe x_0 cu o eroare absolută $< \frac{1}{16}$.

Exemplul 2. *Să se calculeze o soluție aproximativă a ecuației* $x^4 - 10x^3 + 2x - 1 = 0$ *cu o eroare absolută* $\leqslant 1/10$.

Fie $P(x) = x^4 - 10x^3 + 2x - 1$, $x \in \mathbf{R}$. Din tabelul

x	-2	-1	0	1	2	3	5	6
$P(x)$	99	8	-1	-10	-63	-284	-995	5667

deducem că ecuația dată are o soluție cuprinsă în intervalul $(-1,0)$ și alta în intervalul (5.6).

Să facem o nouă diviziune a intervalului $(-1,0)$; obținem:

x	-1	$-\frac{4}{5}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	0
$P(x)$	8	$\frac{1831}{625}$	$\frac{67}{81}$	$-\frac{21}{16}$	$-\frac{104}{81}$	-1

Așadar ecuația dată are o soluție cuprinsă în intervalul $\left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{2}\right)$, să o notăm cu x_0. Fie c mijlocul intervalului $\left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{2}\right)$. Atunci

$$x_0 \approx c \text{ și } |x_0 - c| < \frac{-\frac{1}{2} - \left(-\frac{2}{3}\right)}{2} = \frac{1}{12} < \frac{1}{10}$$

Prin urmare $c = -\frac{2}{3} + \frac{1}{12} = -\frac{7}{12}$ este o soluție aproximativă a ecuației date, cu o eroare absolută $< \frac{1}{10}$.

Exemplul 3. *Să se determine soluțiile aproximative ale ecuației* $x^3 + 3x^2 - 6x + 1 = 0$.

Fie P polinomul $x^3 + 3x^2 - 6x + 1$. Din tabelul

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2
$P(x)$	-21	9	19	17	10	1	-1	9

deducem că ecuația dată are toate rădăcinile reale și acestea se află cuprinse respectiv în intervalele $(-5, -4)$, $(0, 1)$ și $(1, 2)$.

Cum $P\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{9}{8}$ și $P\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{17}{18}$, rezultă că rădăcina a doua se află în intervalul $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ iar a treia în intervalul $\left(1, \frac{3}{2}\right)$ etc.

Mai departe: $P'(x) = 3(x^2 + 3x - 3)$ $(\forall)$ $x \in \mathbf{R}$. Parabola $y = x^2 + 3x - 3$ are vîrful în punctul $\left(\frac{3}{2}, -\frac{21}{4}\right)$ și intersectează axa Ox în

punctele $x_1 \approx -3{,}79$ și $x_2 \approx 0{,}79$, deci

$$P'(x) \neq 0 \ (\forall)\, x \in [-5, 4] \cup \left[0, \frac{1}{2}\right] \cup \left[1, \frac{3}{2}\right]. \text{ Atunci avem :}$$

$$m_1 = \inf_{x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]} |P'(x)| = \min\left\{|P'(0)|, \left|P'\left(\frac{1}{2}\right)\right|\right\} = \min\left\{9, \frac{15}{4}\right\} = \frac{15}{4}$$

Notînd cu x^* rădăcina a doua a ecuației date, rezultă că

$$|x^* - x| \leqslant \frac{1}{m_1} |P(x)| \ (\forall)\ x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$$

Cum $P'(x) < 0 \ (\forall)\ x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, funcția P este strict descrescătoare pe intervalul $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, deci

$$|P(x)| \leqslant \max\left\{|P(0)|, \left|P\left(\frac{1}{2}\right)\right|\right\} = \max\left\{1, \frac{9}{8}\right\} = \frac{9}{8} \ (\forall) x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$$

și deci

$$|x^* - x| \leqslant \frac{4}{15} \cdot \frac{9}{8} = \frac{3}{10} \ (\forall)\ x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$$

Prin urmare orice număr x din intervalul $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ aproximează rădăcina x^* cu o eroare $< \frac{3}{10}$. În particular avem :

$$\left|x^* - \frac{1}{4}\right| \leqslant \frac{4}{15}\left|P\left(\frac{1}{4}\right)\right| = \frac{23}{192} < 0{,}12$$

Analog se procedează pentru prima și a treia rădăcină.

13.2.3. Definiție. Fie $I \subseteq \mathbf{R}$ un interval de capete $a, b \in \overline{\mathbf{R}}$ și $f : I \to \mathbf{R}$ o funcție derivabilă a.î. f' se anulează într-un număr finit de puncte : $x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1}$. Atunci șirul finit $f(a+), f(x_1), \ldots f(x_{n-1}), f(b-)$ se numește *șirul lui Rolle* asociat funcției f.

13.2.4. Propoziție. *Fie $I \subseteq \mathbf{R}$ un interval de capete $a, b \in \overline{\mathbf{R}}$ și $f : I \to \mathbf{R}$ o funcție derivabilă a.î. f' se anulează într-un număr finit de puncte : $x_1 < x_2 < \ldots$ $\ldots < x_{n-1}$. Dacă $(\exists)\ i = \overline{1, n-1}$ a.î. $f(x_{i-1}) \cdot f(x_i) < 0$ (resp. > 0), atunci între x_{i-1} și x_i se află o soluție (resp. nici o soluție) a ecuației $f(x) = 0$; unde am notat $f(a+)$ cu $f(x_0)$ și $f(b-)$ cu $f(x_n)$.*

Dem. 1° Fie $2 \leqslant i \leqslant n-1$ fixat. Presupunem $f(x_{i-1}) \cdot f(x_i) < 0$. Funcția f fiind derivabilă, este continuă ; evident $f'(x) \neq 0$, $(\forall)\ x \in (x_{i-1}, x_i)$. Aplicăm mai departe T. 13.1.1.

Dacă $f(x_{i-1})\, f(x_i) > 0$, avem că $f(x_{i-1})$ și $f(x_i)$ au același semne, spre exemplu pozitive. Cum $f'(x) \neq 0$, $(\forall)\ x \in (x_1, x_2)$, avem (T. 6.3.7. Cor. 2) f strict monotonă pe (x_1, x_2), deci $f(x) > f(x_{i-1})$, $(\forall)\ x \in (x_{i-1}, x_i)$.

2° Dacă $f(a+) \cdot f(x_1) < 0$, avem că $f(a+)$ și $f(x_1)$ au semne contrare, spre exemplu $f(a+) < 0 < f(x_1)$. Atunci $(\exists)\ \alpha \in (a, x_1)$ a. î. $f(a+) < f(\alpha) < 0$. Aplicînd T.13.2.1. pe intervalul $[\alpha, x_1]$, rezultă că $(\exists)\, x^* \in (\alpha, x_1)$ cu $f(x^*) = 0$ etc.

Corolar 1. *In acelaşi cadru avem: numărul variaţiilor de semn din şirul lui Rolle, din care am suprimat termenii nuli, este egal cu numărul soluţiilor reale ale ecuaţiei* $f(x) = 0$ *situate în mulţimea* $(a, b) \setminus \{x_1, x_2, \ldots x_{n-1}\}$.

Exemplul 1. *Să se discute cu ajutorul şirului lui Rolle natura rădăcinilor reale ale ecuaţiei* $x^3 - 12x + \lambda - 4 = 0$ *în funcţie de parametrul real* λ.

Fie funcţia $f(x) = x^3 - 12x + \lambda - 4$, $x \in \mathbf{R}$. Atunci $f'(x) = 3x^2 - 12 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2$. Obţinem următorul tablou :

$f'(x) = 0$	$-\infty$	-2	2	$+\infty$	
$f(x)$ / λ	$-$	$\lambda + 12$	$\lambda - 20$	$+\infty$	rădăcini
$\lambda < -12$	$-$	$-$	$-$	$+$	$x_1 \in (2, \infty)$
$\lambda = -12$	$-$	$\boxed{0}$	$-$	$+$	$x_1 = x_2 = -2$, $x_3 \in (2, \infty)$
$-12 < \lambda < 20$	$-$	$+$	$-$	$+$	$x_1 \in (-\infty, -2)$, $x_2 \in (-2, 2)$ $x_3 \in (2, \infty)$
$\lambda = 20$	$-$	$+$	$\boxed{0}$	$+$	$x_{1,2} \in (-\infty, -2)$, $x_3 = x_4 = 2$
$\lambda > 20$	$-$	$+$	$+$	$+$	$x_3 \in (-\infty, -2)$

Am scris că rădăcinile 2 şi -2 sînt duble, deoarece $f''(+2) \neq 0$ şi $f''(-2) \neq 0$.

Să observăm că ajungem la aceleaşi concluzii, dacă reprezentăm grafic funcţiile $y = x^3 - 12x - 4$, $x \in \mathbf{R}$ şi $y = \lambda$, $x \in \mathbf{R}$.

Exemplul 2. *Să se discute cu ajutorul şirului lui Rolle natura rădăcinilor reale ale ecuaţiei* $\sin^3 x - 3 \sin x + \lambda = 0$, *în funcţie de parametrul real* λ.

Fie funcţia $f(x) = \sin^3 x - 3\sin x + \lambda$, $x \in \mathbf{R}$. Funcţia f fiind periodică de perioadă 2π este suficient să considerăm $x \in [0, 2\pi]$.

$$f'(x) = 3 \cos x(\sin^2 x - 1) = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{0, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, 2\pi\right\}$$

Obţinem următorul tablou :

$f'(x) = 0$	0	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$	2π	
$f(x)$ / λ	λ	$\lambda - 2$	$\lambda + 2$	λ	rădăcini
$\lambda < -2$	$-$	$-$	$-$	$-$	$\emptyset$
$\lambda = -2$	$-$	$-$	$\boxed{0}$	$-$	$x_1 = \frac{3\pi}{2}$ dublă
$-2 < \lambda < 0$	$-$	$-$	$+$	$-$	$x_1 \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$, $x \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$
$\lambda = 0$	$\boxed{0}$	$-$	$+$	$\boxed{0}$	$x_1 \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$; $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ simple
$0 < \lambda < 2$	$+$	$-$	$+$	$+$	$x_1 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$
$\lambda = 2$	$+$	$\boxed{0}$	$+$		$x_1 = \frac{\pi}{2}$ dublă
$\lambda > 2$	$+$	$+$	$+$	$+$	

Am scris că rădăcinile $\frac{\pi}{2}$ și $\frac{3\pi}{2}$ sînt duble, deoarece $f''\left(\frac{\pi}{2}\right) \neq 0$ și $f''\left(\frac{3\pi}{2}\right) \neq$ $\neq 0$, apoi că rădăcinile 0 și 2π sînt simple deoarece $f'(0) \neq 0$ și $f'(2\pi) \neq 0$.

13.2.5. Definiție. Fie $I \subseteq \mathbf{R}$ un interval și $f : I \to \mathbf{R}$ o funcție derivabilă. Se numește *șir Sturm asociat lui* f un șir finit de funcții continui $f_0, f_1, \ldots$ $\ldots f_s : I \to \mathbf{R}$ cu proprietățile : 1° $f_0 = f$; 2° $f_s(x) \neq 0$, $(\forall) x \in I$; 3° Dacă $(\exists)$ $c \in I$ și $i \in \overline{1, s-1}$ cu $f_i(c) = 0$, rezultă că $f_{i-1}(c) \cdot f_{i+1}(c) < 0$; 4° Dacă $(\exists)$ $c \in I$ cu $f(c) = 0$, rezultă că $f'_0(c) \cdot f_1(c) > 0$.

Notație. Fie $f : I \to \mathbf{R}$ o funcție derivabilă și $f_0, f_1, \ldots f_s$ un șir Sturm asociat lui f. Atunci $(\forall)$ $x \in I$ vom nota cu $V(x)$ numărul *variațiilor de semn* din *șirul numeric* $f_0(x), f_1(x), \ldots, f_s(x)$, din care am suprimat elementele nule. De asemenea pentru $(\forall)$ $a, b \in I$, $a < b$ vom nota cu $N(a, b)$ numărul rădăcinilor reale din intervalul (a, b) ale ecuației $f(x) = 0$.

13.2.6. Teoremă. *Fie* $I \subseteq \mathbf{R}$ *un interval și* $f : I \to \mathbf{R}$ *o funcție de clasă* $\mathcal{C}^1$ *care admite un șir Sturm* $f_0, f_1, \ldots, f_s$. *Atunci* $(\forall)$ $a, b \in I$, $a < b$ *cu* $f(a) \neq 0$ *și* $f(b) \neq 0$, *rezultă că numărul rădăcinilor reale din intervalul* (a, b) *ale ecuației* $f(x) = 0$, *este egal cu* $V(a) - V(b)$, *adică*

$$\boxed{N(a, b) = V(a) - V(b)}$$

Dem. [27]

Corolar 1. (th. Sturm). *Fie* $P \in \mathbf{R}[X]$ *un polinom care nu posedă rădăcini multiple și fie* $P_0, P_1, \ldots, P_s \in \mathbf{R}[X]$ *un șir finit de polinoame definit astfel* : $P_0 = P$; $P_1 = P'$; $\ldots$; P_i *este restul cu semn schimbat al împărțirii lui* P_{i-2} *la* P_{i-1}, *pentru* $(\forall)$ $1 < i \leqslant s$; *ultimul polinom* P_s *fiind o constantă nenulă. Atunci* $P_0, P_1, \ldots, P_s$ *este un șir Sturm asociat lui* P, *deci* $(\forall)$ $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$ *cu* $P(a) \neq 0$ *și* $P(b) \neq 0$, *rezultă că numărul rădăcinilor reale din intervalul* (a, b) *ale ecuației* $P(x) = 0$ *este egal cu* $V(a) - V(b)$, *adică*

$$\boxed{N(a, b) = V(a) - V(b)}$$

Observația 1. Putem pune în th. Sturm $a = -\infty$ (resp. $b = +\infty$) înlocuind valoarea polinomului P_i în a (resp. b) prin limita în punctul $-\infty$ (resp. $+\infty$).

Observația 2. Dacă $f_0 f_1, f_2, \ldots, f_s$ este un șir Sturm asociat lui f și $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s \in \mathbf{R}_+^*$, atunci șirul $f_0, \lambda_1 f_1, \ldots, \lambda_s f_s$ este de asemenea un șir Sturm asociat lui f.

Observația 3. Fie $P \in \mathbf{R}[X]$ un polinom care are rădăcini multiple și fie $Q \in \mathbf{R}[X]$ cel mai mare divizor comun al polinoamelor P și P'. Atunci șirul $\frac{P_0}{Q}, \frac{P_1}{Q}, \ldots, \frac{P_k}{Q} = 1$, unde $P_0, P_1, P_2, \ldots,$ sînt definite ca în th. Sturm reprezintă un șir Sturm asociat lui P.

Exemplul 1. *Să se determine numărul soluțiilor reale ale ecuației* $x^4 - 8x^2 + 2 = 0$, *utilizînd șirul lui Sturm.*

Punem $\boxed{P_0 = P}$; $P'(x) = 4x^3 - 16x + 8$, deci $\boxed{P_1(x) = x^3 - 4x + 2}$; P_0 împărțit la P_1 ne dă cîtul $x^3 - 4x + 2$ și restul $-4x^2 + 6x + 2$, deci punem $\boxed{P_2(x) = x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}}$; P_1 împărțit la P_2 ne dă cîtul $x + \frac{3}{2}$ și restul

$-\frac{19}{4}x+\frac{11}{4}$, deci punem $\boxed{P_3(x)=x-\frac{11}{19}}$; P_2 împărțit la P_3 ne dă câtul $x-\frac{35}{38}$ și restul $-\frac{1}{2}-\frac{11}{19}-\frac{11.35}{19.38}$, deci punem $\boxed{P_4(x)=1}$. Formăm tabelul:

x	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	Nr. var. de semn	Nr. răd. reale
$-\infty$	+	−	+	−	+	$V(-\infty)=4$	
-4	+	−	+	−	+	$V(-4)=4$	$N(-\infty,-4)=0$
-1	−	+	+	−	+	$V(-1)=3$	$N(-4,-1)=1$
0	+	+	−	−	+	$V(0)=2$	$N(-1,0)=1$
$7/4$	+	+	−	+	+	$V(7/4)=2$	$N(0,7/4)=0$
$15/8$	+	+	+	+	+	$V(15/8)=0$	$N(7/4,15/8)=2$

din care deducem că ecuația dată are toate soluțiile reale și sînt distribuite astfel : o soluție este cuprinsă în intervalul $(-4,-1)$, alta în intervalul $(-1,0)$ și în fine două soluții în intervalul $(7/4, 15/8)$.

Exemplul 2. *Să se determine numărul soluțiilor reale ale ecuației* $3x^2-e^x=0$ *din intervalul* $[0,1]$, *utilizînd șirul lui Sturm.*

Fie funcția $f(x)=3x^2-e^x$, $x\in[0,1]$. Să arătăm că șirul $\boxed{f_0=f}$; $\boxed{f_1(x)=5x-e^x,\ x\in[0,1]}$; $\boxed{f_2(x)=6-e^x,\ x\in[0,1]}$ este un șir Sturm asociat lui f. Verificăm condițiile $2^\circ-4^\circ$ din D. 13.2.5 :

2° $1\leqslant e^x\leqslant e<6$ $(\forall)$ $x\in[0,1]$ deci $f_2(x)\neq 0$ $(\forall)$ $x\in[0,1]$

3° Dacă $(\exists)$ $c\in[0,1]$ a.î. $f_1(c)=0\Leftrightarrow 5c=e^c$, atunci $f_0(c)\cdot f_2(c)=$
$=(3c^2-5c)(6-5c)=15c\left(c-\frac{5}{6}\right)\left(\frac{6}{5}-c\right)<0.$

4° Dacă $(\exists)$ $c\in[0,1]$ a.î. $f_0(c)=0\Leftrightarrow 3c^2=e^c$, atunci $f_0'(c)\cdot f_1(c)=$
$=(6c^2-3c^2)(5c-3c^2)=9c^2(2-c)\left(\frac{5}{3}-c\right)>0.$

Evident avem $V(0)=V(-,-,+)=1$ și $V(1)=V(+,+,+)=0$, deci cf. th Sturm numărul soluțiilor reale ale ecuației date este $V(0)-V(1)=1$, ceea ce era vizibil direct, reprezentînd grafic funcțiile $f_1(x)=3x^2$, $x\in[0,1]$ și $f_2(x)=e^x$, $x\in[0,1]$.

13.3. Rezolvarea numerică a ecuațiilor algebrice

Fie $A\subseteq\mathbf{R}$ o mulțime și $f:A\to\mathbf{R}$ o funcție. Determinarea exactă a unei soluții a ecuației $f(x)=0$ este destul de complicată și uneori imposibilă, chiar și în cazul unor ecuații dintre cele mai simple, cum ar fi spre exemplu $x-\cos x=0$

sin $x - \ln x = 0$ etc. În aplicații însă este suficient să cunoaștem o soluție aproximativă a ecuației $f(x) = 0$, cu o eroare suficient de mică, dată. Acest lucru face necesară cunoașterea unor metode de calcul aproximativ a soluțiilor unei ecuații date. Ne vom opri aici asupra metodei tangentei (a lui Newton), metoda coardei și principiului aproximațiilor succesive (a lui Picard).

13.3.1. Teoremă (Metoda coardei). *Fie* $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ *o funcție de două ori derivabilă cu proprietățile* : $f'(x) \neq 0$, $f''(x) \neq 0$, $(\forall)\ x \in [a, b]$ *și* $f(a) \cdot f(b) < 0$. *Atunci unica soluție a ecuației* $f(x) = 0$ *poate fi obținută ca limită a șirului strict monoton din* $[a, b]$ *definit astfel* :

$$x_0 = a\ ;\ x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f(x_{n-1}) - f(b)}\,(x_{n-1} - b)\ (\forall)\ n \geq 1,\ \textit{dacă}\ f(a) \cdot f''(a) < 0$$

și

$$x_0 = b\ ;\ x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f(x_{n-1}) - f(a)}\,(x_{n-1} - a)\ (\forall)\ n \geq 1,\ \textit{dacă}\ f(b) \cdot f''(b) < 0.$$

Dem. f fiind continuă și $f(a) \cdot f(b) < 0$, rezultă că f posedă cel puțin o soluție. Cum $f'(x) \neq 0$, $(\forall)\ x \in [a, b]$ și f' are proprietatea lui Darboux, avem $f' > 0$ sau $f' < 0$, deci f este strict monotonă și deci f posedă exact o soluție ; să o notăm cu x^*. Presupunem $f(a) \cdot f''(a) < 0$ și $f(a) < 0$, Deoarece $f''(x) \neq 0$, $(\forall)\ x \in [a, b]$, ca mai sus deducem că $f'' > 0$ sau $f'' < 0$ și fiindcă $f''(a) > 0$, avem $f'' > 0$, deci f este convexă. Notăm $P := P(b, f(b))$ și $P_n := P_n(x_n, f(x_n))$ $(n \geq 1)$. Ecuația dreptei care trece prin punctele P_n și P este

$$y = f(x_{n-1}) + \frac{f(x_{n-1}) - f(b)}{x_{n-1} - b}\,(x - x_{n-1}),$$

deci

$$y = 0 \Leftrightarrow x = x_{n-1} - \frac{x_{n-1} - b}{f(x_{n-1}) - f(b)}\,f(x_{n-1}),$$

de unde rezultă că x_n este abscisa punctului obținut prin intersecția coardei $\overline{P_n P}$ cu axa Ox (Fig. 65). Fie acum $n \geq 1$ cu $a \leq x_{n-1} < x^*$. Atunci $f(x_{n-1}) < 0$ și deoarece $f'(x_{n-1}) > 0$, avem :

$$x_n = x_{n-1} - \frac{x_{n-1} - b}{f(x_{n-1}) - f(b)}\,f(x_{n-1}) = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(c_n)} > x_{n-1},\ (x_{n-1} < c_n < b)$$

Funcția f fiind convexă, avem $x_n < x^*$. Continuînd acest raționament deducem prin inducție că

$$a \leq x_{n-1} < x_n < x^*,\ (\forall)\ n \geq 1,$$

deci $(x_n)_{n \geq 1}$ este convergent ; fie $\tilde{x}$ limita sa. Trecînd la limită, $n \to \infty$, în relația

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f(x_{n-1}) - f(b)}\,(x_{n-1} - b),\ n \geq 1, \tag{1}$$

obținem

$$\tilde{x} = \tilde{x} - \frac{f(\tilde{x})}{f(\tilde{x}) - f(b)}\,(\tilde{x} - b) \Leftrightarrow f(\tilde{x}) = 0,$$

de unde, în virtutea unicității soluției, conchidem că $\tilde{x} = x^*$.

Corolar 1. *În același cadru ca și dacă* $(\exists)\ m_1,\ M_1 > 0$ *a.î.* $m_1 \leqslant |f'(x)| \leqslant M_1$, $(\forall)\ x \in [a, b]$, *atunci unica soluție a ecuației* $f(x) = 0$, *să o notăm cu* x^*, *satisface inegalitățile* :

$$\left.\begin{aligned} 1^\circ\ & |x^* - x_n| \leqslant \frac{|f(x_n)|}{m_1} \\ 2^\circ\ & |x^* - x_n| \leqslant \frac{M_1 - m_1}{m_1} \cdot |x_n - x_{n-1}| \end{aligned}\right\}, \ (\forall)\ n \geqslant 1$$

Dem. Fie $x \in [a, b]$ fixat. Cf. th. Lagrange există c cuprins între x și x^* a.î.

$$f(x^*) - f(x) = (x^* - x) f'(c),$$

deci

$$|x^* - x| = \frac{|f(x)|}{|f'(c)|} \leqslant \frac{|f(x)|}{m_1}$$

și deci

$$|x^* - x| \leqslant \frac{|f(x_n)|}{m_1}, \ (\forall)\ \ n \geqslant 1$$

Cum $f(x^*) = 0$, din (1) rezultă

$$f(x^*) - f(x_{n-1}) = -f(x_{n-1}) = \frac{f(x_{n-1}) - f(b)}{x_{n-1} - b}(x_n - x_{n-1}),\ (\forall) n \geqslant 1$$

Of formulei lui Legrange $(\exists)\ x_n \leqslant \xi_n \leqslant x^*$, $(\exists)\ x_{n-1} < \eta_n < b$ a.î.

$$(x^* - x_{n-1}) f'(\xi_n) = (x_n - x_{n-1})\ f'(\eta_n),$$

deci

$$x^* - x_{n-1} = \frac{f'(\eta_n)}{f'(\xi_n)}\ x_n - x_{n-1})$$

și deci

$$x^* - x_n = (x^* - x_{n-1}) - (x_n - x_{n-1}) = \left(\frac{f'(\eta_n)}{f'(\xi_n)} - 1\right)(x_n - x_{n-1}),$$

de unde, ținînd seama că f' are semn constant, deducem

$$|x^* - x_n| = \frac{|f'(\eta_n) - f'(\xi_n)|}{|f'(\xi_n)|}\ |x_n - x_{n-1}| \leqslant \frac{M_1 - m_1}{m_1}\ |x_n - x_{n-1}|$$

Observație. Din ipoteza T. 13.3.1. avem echivalențele; $f(b) \cdot f''(b) < 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow f(a) \cdot f''(a) > 0$; $f(a) \cdot f''(a) < 0 \Leftrightarrow f(b) \cdot f''(b) > 0$. De aici rezultă că condițiile $f(a) \cdot f''(a) < 0$ și $f(b) \cdot f''(b) < 0$ sînt complementare una față de alta.

13.3.2. Semnificația geometrică a metodei coardei

Cazul 1. Dacă $\boxed{f(a)\cdot f''(a) < 0}$, atunci $(\forall)\ n \geqslant 1$, x_n este punctul obținut prin intersecția axei Ox cu coarda BP_{n-1} dusă prin punctele $B(b, f(b))$ și $P_{n-1}\ (x_{n-1}, f(x_{n-1}))$, unde $x_0 = a$ (fig. 65)

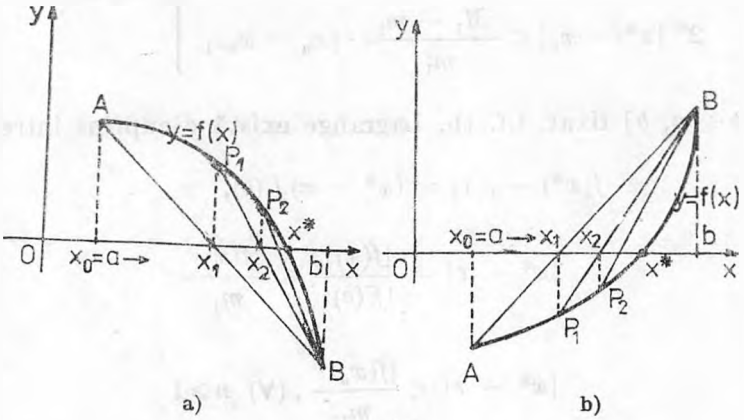


Fig. 65

Cazul 2. Dacă $\boxed{f(b)\cdot f''(b) < 0}$, atunci $(\forall)\ n \geqslant 1$ x_n este punctul obținut prin intersecția axei ox cu coarda AP_{n-1} dusă prin punctele $A(a, f(a))$ și $P_{n-1}\ (x_{n-1}, f(x_{n-1}))$, unde $x_0 = b$. (fig. 66).

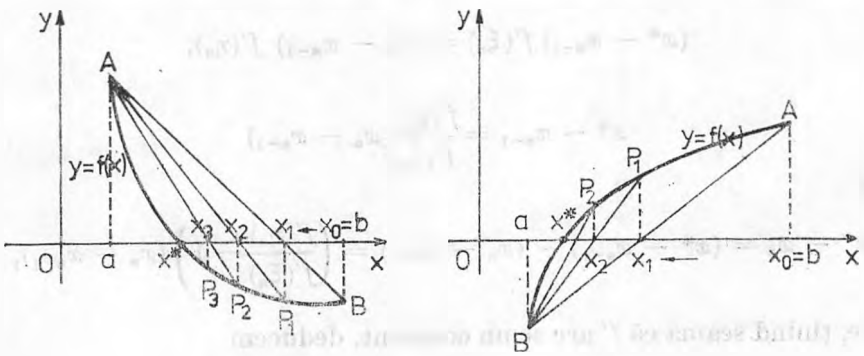


Fig. 66

Exemplul 1. *Să se calculeze cu aproximație rădăcinile reale ale ecuației* $x^3 - 6x^2 + 10x - 4 = 0$, *utilizînd metoda coardei.*

Fie $f(x) = x^3 - 6x^2 + 10x - 4$, $x \in \mathbf{R}$. Observăm că $f(0) = -4 < 0$, $f(1) = 1 > 0$, $f(3) = -1 < 0$ și $f(\infty) > 0$, deci ecuația dată are toate rădăcinile reale și acestea sînt cuprinse respectiv în intervalele $(0,1)$, $(1,3)$ și $(3, \infty)$. Apoi avem $f'(x) = 3x^2 - 12x + 10 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \pm \sqrt{2/3}$. Fie x^* prima rădă-

cină a ecuației date. Observăm că $f'(x) > 0$ $(\forall)$ $x \in [0,1]$ (deoarece $2 \pm \sqrt{2/3} > 1$), $f''(x) < 0$, $(\forall)$ $x \in [0,1]$ și $f(1)\, f''(1) < 0$, deci șirul (strict descrescător)

$$x_1 = 1, \quad x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f(x_{n-1}) - f(0)}\,(x_{n-1} - 0)\ (\forall)\ n \geqslant 1 \tag{1}$$

este convergent și are limita x^*.

Funcția f' fiind strict descrescătoare și pozitivă pe $[0,1]$, rezultă

$$m_1 = \inf_{x \in [0,1]} |f'(x)| = f'(1) = 1\,;\ M_1 = \sup_{x \in [0,1]} f'(x)| = f'(0) = 10$$

Atunci (T. 13.3.1. Cor. 1) avem :

$$\left.\begin{aligned} |x^* - x_n| &\leqslant \frac{1}{m_1}\,|f(x_n)| = |f(x_n)| \\ |x^* - x_n| &\leqslant \frac{M_1 - m_1}{m_1}\,|x_n - x_{n-1}| = 9\,|x_n - x_{n-1}| \end{aligned}\right\},\ (\forall)\ m \geqslant 1 \tag{2}$$

Prin urmare din (1) deducem :

$$x_1 = 1 - \frac{f(1)}{f(1) - f(0)}\,(1 - 0) = 1 - \frac{1}{1+4} = \frac{4}{5} = 0{,}8$$

$$x_2 = 0{,}8 - \frac{f(0{,}8)}{f(0{,}8) - f(0)}\,(0{,}8 - 0) \approx 0{,}8 - \frac{0{,}672}{0{,}672 + 4} \cdot 0{,}8 \approx 0{,}68$$

$$x_3 = 0{,}68 - \frac{f(0{,}68)}{f(0{,}68) - f(0)}\,(0{,}68 - 0) \approx 0{,}68 - \frac{0{,}34}{0{,}34 + 4} \approx 0{,}63$$

Apoi utilizînd (2) avem :

$$|x^* - x_3| \leqslant |f(0{,}63)| < 0{,}15$$

$$|x^* - x_3| \leqslant 9\,|x_3 - x_2| = 9 \cdot 0{,}05 = 0{,}45 \quad \text{etc.}$$

Exemplul 2. *Să se calculeze cu aproximație soluțiile reale ale ecuației* $x^3 - 20x + 1 = 0$, *utilizînd metoda coardei.*

Să separăm soluțiile ecuației date în ajutorul șirului lui Rolle. Fie $f(x) = x^5 - 20x + 1$, $x \in \mathbf{R}$; atunci $f'(x) = 5(x^2 - 2)(x^2 + 2) = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}$, deci șirul lui Rolle se scrie :

$$f(-\infty) < 0, f(-\sqrt{2}) = 4\sqrt{2} + 1 > 0, f(+\sqrt{2}) = -4\sqrt{2} + 1 < 0, f(+\infty) > 0$$

și deci ecuația dată are trei soluții reale cuprinse respectiv în intervalele $(-\infty, -\sqrt{2})$, $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ și $(\sqrt{2}, \infty)$ și două soluții complexe. Cum $f(2) = -7 < 0$ și $f(9/4) \approx 13{,}66 > 0$, a treia soluție, să o notăm cu x^*, se află în intervalul $(2, 9/4)$. Observăm că $f'(x) > 0$ și $f''(x) > 0$, $(\forall)$ $x \in [2, 9/4]$ și $f(2)$. $f''(2) < 0$, deci șirul :

$$x_0 = 2, \ x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f(x_{n-1}) - f(9/4)}\,(x_{n-1} - 9/4),\ (\forall)\ n \geqslant 1$$

este convergent (crescător) și are limita x^*.

Funcția f' fiind strict crescătoare și nenulă pe $[2,9/4]$ avem :

$$m_1 = \inf_{x\in[2,9/4]} |f'(x)| = \min\{|f'(2)|, |f'(9/4)|\} = 60$$

Prin urmare

$$x_1 = 2 - \frac{f(2)}{f(2) - f(9/4)}(2 - 9/4) \approx 2 + \frac{7}{7 + 13{,}66}\cdot\frac{1}{4} \approx 2{,}08$$

$$x_2 = 2{,}08 - \frac{f(2{,}08)}{f(2{,}08) - f(9/4)}(2{,}08 - 9/4) \approx 2{,}08 + \frac{1{,}66}{1{,}66 + 13{,}66}\cdot 0{,}17 \approx 2{,}09$$

$$|x^* - x_2| < \frac{1}{60}|f(x_2)| \approx \frac{1}{60}\cdot 0{,}922 < \frac{1}{60} \text{ etc.}$$

13.3.3. Teoremă. (Metoda tangentei a lui Newton). *Fie* $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ *o aplicație de două ori derivabilă cu* $f'(x) \neq 0$, $f''(x) \neq 0$, $(\forall)\, x \in [a, b]$ *și* $f(a) \cdot f(b) < 0$. *Atunci unica soluție* x^* *a ecuației* $f(x) = 0$ *poate fi obținută ca limită a șirului* $(x_n)_{n\geqslant 1}$ *definit astfel :*

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})},\ (\forall)\, n \geqslant 1, \tag{1}$$

unde $x_0 \in [a, b]$ *este fixat arbitrar a.î.* $f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$.

Dem. Din continuitatea lui f și din condiția $f(a) \cdot f(b) < 0$ rezultă că ecuația $f(x) = 0$ posedă cel puțin o soluție. Deoarece $f'(x) \neq 0$, $(\forall)\, x \in [a, b]$, avem că f este strict monotonă, deci ecuația $f(x) = 0$ posedă, exact o soluție; fie x^* cu $f(x^*) = 0$. Înlocuind eventual f cu $-f$ putem presupune că $f(a) < 0$ și $f(b) > 0$. Atunci f fiind strict monotonă este strict crescătoare, deci $f' > 0$. Din $f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$ avem că $f'' > 0$ și $f(x_0) > 0$ sau $f'' < 0$ și $f(x_0) < 0$. Să presupunem că sîntem în primul caz, deci avem $x_0 > x^*$; să arătăm prin inducție că $x_n > x^*$, $(\forall)\, n \geqslant 0$. Fie $n \geqslant 0$ cu $x_i > x^*$, $(\forall)\, i = \overline{0, n}$. Aplicăm mai departe formula lui Taylor cu restul lui Lagrange :

$$0 = f(x^*) = f(x_n) + \frac{x^* - x_n}{1!}f'(x_n) + \frac{(x^* - x_n)^2}{2!}f''(\xi_n), \tag{2}$$

unde ξ_n este cuprins între x^* și x_n. Deoarece $f''(\xi_n) > 0$, din (2) rezultă :

$$f(x_n) + (x^* - x_n)\ f'(x_n) < 0,$$

deci

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} > x^*$$

Așadar $x_n > x^*$, $(\forall)\, n \geqslant 0$.

Aplicația f fiind strict crescătoare, avem

$$f(x_n) > f(x^*) = 0,\ (\forall)\, n \geqslant 0,$$

deci

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} < x_{n-1},\ (\forall)\, n \geqslant 1$$

și deci $(x_n)_{n\geq 0}$ este strict descrescător. Cum $(x_n)_{n\geq 1}$ este minorat, el este convergent; fie $\tilde{x}$ limita sa. Trecînd la limită în relația (1) obținem $\tilde{x} = \tilde{x} - \frac{f(\tilde{x})}{f'(\tilde{x})}$, deci $f(\tilde{x}) = 0$. Ecuația $f(x) = 0$ avînd o soluție unică, concluzionăm că $\tilde{x} = x^*$.

Corolar 1. *În același cadru, avem inegalitățile:*

$$\left.\begin{aligned} 1^\circ\ & |x^* - x_n| \leqslant \frac{|f(x_n)|}{m_1}, \\ 2^\circ\ & |x^* - x_n| \leqslant \frac{M_2}{2m_1}(x_n - x_{n-1})^2 \\ 3^\circ\ & |x^* - x_n| \leqslant \frac{M_2}{2m_1}(x^* - x_{n-1})^2 \end{aligned}\right\} (\forall)\ n > 1,$$

unde $m_1 = \inf_{x\in[a,b]} |f'(x)|$ *și* $M_2 = \sup_{x\in[a,b]} |f''(x)|$.

Dem. Fie $x \in [a, b]$ fixat. Cf. th. lui Lagrange există c cuprins între x și x^* a.î.

$$f(x^*) - f(x) = (x^* - x)\,(f'(c),$$

deci

$$|x^* - x| = \frac{|f(x)|}{|f'(c)|} \leqslant \frac{|f(x)|}{m_1}$$

și deci

$$|x^* - x_n| \leqslant \frac{|f(x_n)|}{m_1},\ (\forall)\ n \geqslant 1 \tag{3}$$

Aplicînd formula lui Taylor avem:

$$f(x_n) = f(x_{n-1}) + \frac{x_n - x_{n-1}}{1!} f'(x_{n-1}) + \frac{(x_n - x_{n-1})}{2!} f''(c_n), \tag{4}$$

unde c_n este cuprins între x_{n-1} și x_n. Din (1) rezultă

$$f(x_{n-1}) + (x_n - x_{n-1})\, f'(x_{n-1}) = 0 \tag{5}$$

Din (4) și (5) deducem

$$f(x_n) = \frac{(x_n - x_{n-1})^2}{2} f''(c_n),$$

de unde ținînd cont de (3) obținem:

$$|x^* - x_n| \leqslant \frac{1}{2m_1}(x_n - x_{n-1})^2 |f''(c_n)| \leqslant \frac{M_2}{2m_1}(x_n - x_{n-1})^2$$

Mai departe, din (2) rezultă

$$x^* - x_n = -\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - \frac{1}{2}(x^* - x_n)^2 \frac{f''(\xi_n)}{f'(x_n)} \tag{6}$$

Din (1) și (6) rezultă

$$x^* - x_{n+1} = \frac{1}{2}(x^* - x_n)^2 \frac{f''(\xi_n)}{f'(x_n)},$$

deci

$$|x^* - x_{n+1}| = \frac{1}{2}(x^* - x_n)^2 \frac{M_2}{2m_1}.$$

Din Cor. 1 rezultă imediat afirmațiile :

Corolar 2. *Există* $N \geqslant 1$ *a.î.* $|x^* - x_n| \leqslant |x_n - x_{n-1}|$ $(\forall)$ $n \geqslant N$, *deci primele cifre „stabilizate" ale lui* x_n *și* x_{n-1} *sînt cifre exacte pentru* x^*.

Corolar 3.

$$|x^* - x_n| \leqslant \left(\frac{M_2}{2m_1}\right)^{1+2+2^2+\ldots+2^{n-1}} |x^* - x_0|^{2^n}, \quad (\forall)\ n \geqslant 1,$$

deci dacă $\dfrac{M_2}{2m_1} \leqslant 1$, *avem :*

$$\left.\begin{aligned} |x^* - x_n| &\leqslant |x^* - x_{n-1}|^2 \\ |x^* - x_n| &\leqslant |x^* - x_0|^{2^n} \end{aligned}\right\}, \ (\forall)\ n \geqslant 1$$

și deci dacă x^* *și* x_{n-1} *au primele* p *cifre egale, atunci* x^* *și* x_n *au primele* $2p$ *cifre egale.*

Corolar 4 (Formula lui Heron). *Fie* $(x_n)_{n\geqslant 1}$ *un șir definit astfel* $x_n := \dfrac{1}{2}\left(x_{n-1} + \dfrac{c}{x_{n-1}}\right)$, $(\forall)\ n \geqslant 1$, *unde* $x_0 > 0$ *și* $c > 0$ *sînt fixați. Atunci* $(x_n)_{n\geqslant 1}$ *este strict descrescător și are limita egală cu* $\sqrt{c}$. *Mai precis : dacă* $\alpha_n = \sqrt{c} - x_n$, *atunci* $|\alpha_n| \leqslant \dfrac{1}{2}|\alpha_{n-1}|$, *deci* $|\alpha_n| \leqslant \dfrac{1}{2^n}|\alpha_0|$ *și deci* $|\sqrt{c} - x_n| \leqslant$ $\leqslant \dfrac{1}{2^n}|\sqrt{c} - x_0|$ $(\forall)$ $n \geqslant 1$.

Dem. Fie $f(x) = x^2 - c$, $x \in [0, b]$ cu $b > \max\{x_0, \sqrt{b}\}$ fixat arbitrar. Evident avem $f' > 0$, $f'' > 0$ și $x_1 = \dfrac{1}{2}\left(x_0 + \dfrac{c}{x_0}\right) > 0$, deci $f(x_1)\ f''(x_1) > 0$ și deci sîntem în cadrul T. 13.3.3. Deoarece

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})} = x_{n-1} - \frac{x_{n-1}^2 - c}{2x_{n-1}} = \frac{1}{2}\left(x_{n-1} + \frac{c}{x_{n-1}}\right),$$

rezultă că $(x_n)_{n\geqslant 1}$ este srrict descrescător și converge către soluția unică a ecuației $f(x) = 0$, deci către $\sqrt{c}$.

Observația 1. Alegerea punctului x_0, prima aproximație a soluției x^* în T.13.3.3. nu este întîmplătoare. Condiția $f(x_0)\ f''(x_0) > 0$, cum vom observa din semnificația geometrică a metodei lui Newton, asigură că $x_n \in [a, b]$ $(\forall)$ $n \geqslant 1$, deci definiția șirului $(x_n)_{n\geqslant 1}$ este coerentă.

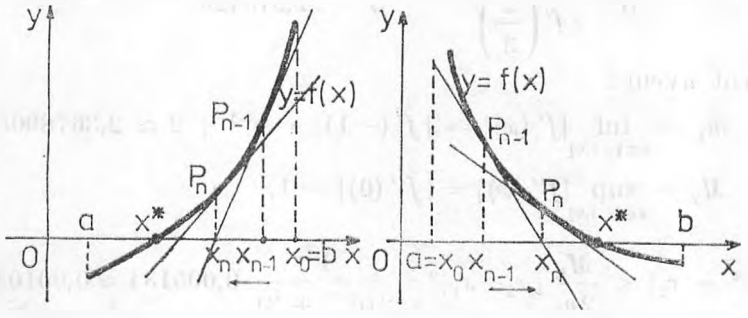
Observația 2. Metoda lui Newton este convenabilă mai ales în cazul cînd f' are valori mari în vecinătatea rădăcinii x^* a ecuației $f(x) = 0$, cînd x^* nu diferă esențial de x_n, deci convergența șirului $(x_n)_{n\geq 1}$ este rapidă. Dacă f' are valori apropiate de 0 în vecinătatea lui x^*, metoda lui Newton este uneori practic inaplicabilă.

Observația 3. Fie $(x_n)_{n\geq 1}$, $(z_n)_{n\geq 1}$ șirurile obținute prin metoda coardei respectiv a tangentei pentru determinarea soluției x^* a ecuației $f(x) = 0$. Atunci cele două șiruri sînt strict monotone și de sens contrar și avem că x^* este cuprins între x_n și z_m $(\forall)$ $n, m \geq 1$. De aceea putem combina cele două metode utilizînd la fiecare pas (n, m) oricare dintre ele. Putem aproxima x^* prin $\frac{1}{2}|x_n - z_m|$ cu $n, m \geq 1$ fixați.

13.3.4. Semnificația geometrică a metodei tangentei

Fixăm $x_0 \in [a, b]$ cu $f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$. Atunci x_n este punctul obținut prin intersecția axei Ox cu tangenta geometrică la graficul lui f în punctul $P_{n-1}(x_{n-1}, f(x_{n-1}))$ (fig. 67).

Cazul 1. $\boxed{f'' > 0}$



Cazul 2. $\boxed{f'' < 0}$

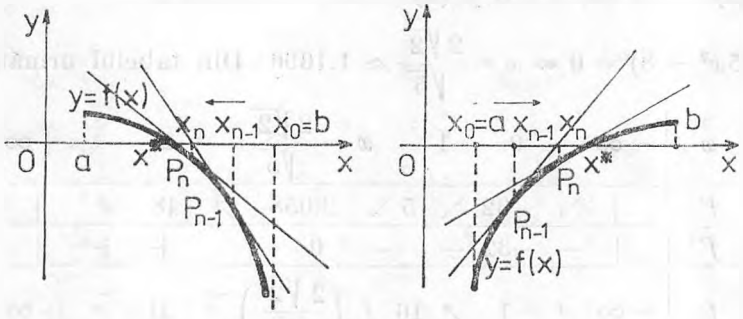


Fig. 67

Exemplul 1. *Să se calculeze cu aproximație soluțiile reale ale ecuației transcendente* $e^x + 2x + 1 = 0$, *utilizînd metoda tangentei.*

Fie $f(x) = e^x + 2x + 1$, $x \in \mathbf{R}$. Atunci $f'(x) = e^x + 2 > 0$ și $f''(x) = e^x > 0$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$. Din tabelul

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
f'	$-\infty$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	∞
f''	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	∞
f	$-\infty$	$\nearrow$	$e^{-1}-1$	$\nearrow$	2	$\nearrow$	∞

rezultă că ecuația $f(x) = 0$ admite o singură soluție reală, să o notăm cu x^* și avem $x^* \in (-1, 0)$. Deoarece $f'(x) > 0$, $f''(x) > 0$, $(\forall)\ x \in [0, 1]$ și $f(0) \cdot f''(0) > 0$, rezultă că șirul

$$x_0 = 0,\ x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})},\ (\forall)\ n \geqslant 1,$$

este convergent (descrescător) și are limita x^*. Obținem :

$$x_1 = 0 - \frac{f(0)}{f'(0)} = -\frac{2}{3} \approx -0{,}6666666$$

$$x_2 = -\frac{2}{3} - \frac{f\left(\frac{2}{3}\right)}{f'\left(\frac{2}{3}\right)} = -\frac{2}{3} - \frac{0{,}1800927}{2{,}513426} \approx -0{,}7383188$$

Evident avem :

$$m_1 = \inf_{x \in [-1,0]} |f'(x)| = |f'(-1)| = e^{-1} + 2 \approx 2{,}3678905$$

$$M_2 = \sup_{x \in [-1,0]} |f''(x)| = |f''(0)| = 1,$$

deci

$$|x^* - x_2| \leqslant \frac{M_2}{2n_1} |x_2 - x_1|^2 = \frac{1}{2(e^{-1} + 2)} \cdot 0{,}005134 \approx 0{,}001084$$

Exemplul 2. *Să se calculeze cu aproximație soluțiile reale ale ecuației algebrice* $x^5 - 16x^2 + 32x - 1 = 0$, *utilizînd metoda tangentei.*

Fie $f(x) = x^5 - 16x^2 + 32x - 1$, $x \in \mathbf{R}$. Evident avem :

$f(x) \leqslant -1\ (\forall)\ x \leqslant 0, f'(x) = 5x^4 - 32x + 32$ și

$f''(x) = 4(5x^2 - 8) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \approx 1{,}1696$. Din tabelul următor :

x	$-\infty$		0	1	$x = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$	2	$+\infty$
f'	$\|$	$\searrow$	32	$\searrow\ 5\ \searrow$	$2{,}058$	$\nearrow\ 48\ \nearrow$	$\|$
f''	$\|$	$-$	-32	$-$	0	$+$	$+\ +$	$\|$
f	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\nearrow$	16	$f\left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\right)$	$\nearrow$	31	$\nearrow$	$+\infty$

observăm că $f' > 0$, deci f este strict crescătoare şi deoarece $f(0) < 0$ şi $f(1) > 0$, rezultă că ecuaţia $f(x) = 0$ admite o singură soluţie reală x^* şi avem $x^* \in (0,1)$. Cum $f'(x) > 0$, $f''(x) < 0$, $(\forall)\ x \in [0,1]$ şi $f(0) \cdot f''(0) < 0$, deducem că şirul

$$x_0 = 0,\ x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})},\ (\forall)\ n \geqslant 1,$$

este convergent (crescător) şi are limita x^*. Obţinem

$$x_1 = 0 - \frac{f(0)}{f'(0)} = \frac{1}{32} = 0{,}03125$$

$$x_2 = \frac{1}{32} - \frac{f(1/32)}{f'(1/32)} \approx \frac{1}{32} + \frac{0{,}0097655}{31{,}000004} \approx 0{,}031565$$

Evident avem :

$$m_1 = \inf_{x \in [0,1]} |f'(x)| = |f'(1)| = 5,\quad M_2 = \sup_{x \in [0,1]} |f''(x)| = |f''(0)| = 32,$$

deci

$$|x^* - x_2| \leqslant \frac{M_2}{2m_1} |x_2 - x_1|^2 = \frac{32}{10}(3,\ 15 \cdot 10^{-4})^2 = 0{,}31752 \cdot 10^{-6}.$$

Să observăm că $f(x_2) \approx 1{,}1654 \cdot 10^{-4} > 0$, deci x_2 a fost aproximat prin adaos şi avem că $x_2 > x^*$. Notînd $c = \frac{x_1 + x_2}{2}$, deducem direct că

$$|x^* - c| \leqslant \frac{1}{2} |x_1 - x_2| \leqslant 0{,}158 \cdot 10^{-3}$$

Reamintim (v.D.4.1.10) că o funcţie $f : A \to \mathbf{R}$, unde $A \subseteq \mathbf{R}$, se numeşte *contracţie*, dacă $(\exists)\ \lambda \in (0,1)$ a. î. $|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant \lambda |x_1 - x_2|$, $(\forall)\ x_1, x_2 \in A$. Cum aplicaţiile lipschitiziene sînt uniform continue (D.5.7.1. Exemplul 4),rezultă că contracţiile sînt funcţii continue (P.5.7.2. Cor. 1).

13.3.5. Teoremă (Principiul contracţiei). *Fie $A \subseteq \mathbf{R}$ o mulţime închisă şi $f : A \to \mathbf{R}$ o λ-contracţie. Atunci $(\forall)\ x_0 \in A$ cu $f^n(x_0) \in A$, $(\forall)\ n \geqslant 1$, rezultă că şirul $(f^n(x_0))_{n \geqslant 1}$ are limită un punct $x^* \in A$ care are proprietăţile : $f(x^*) = x^*$ şi*

$$|x^* - f^n(x_0)| \leqslant \frac{\lambda^n}{1 - \lambda} |x_0 - f(x_0)|,\ (\forall)\ n \geqslant 1 \qquad (1)$$

Dem. Fie $x_0 \in A$ fixat cu $f^n(x_0) \in A$, $(\forall)\ n \geqslant 1$ şi $x_n := f^n(x_0)$ $(n \geqslant 1)$. Atunci $(\forall)\ n \geqslant 1$, avem

$$|x_{n+1} - x_n| = |f(x_n) - f(x_{n-1})| \leqslant \lambda |x_n - x_{n-1}|,$$

deci continuînd, rezultă

$$|x_{n+1} - x_n| \leqslant \lambda |x_n - x_{n-1}| \leqslant \lambda^2 |x_{n-1} - x_{n-2}| \leqslant \ldots \leqslant \lambda^n |x_1 - x_0|$$

şi deci

$$|x_{n+p} - x_n| \leqslant |x_{n+p} - x_{n+p-1}| + |x_{n+p-1} - x_{n+p-2}| + \ldots + |x_{n+1} - x_n| \leqslant$$
$$\leqslant (\lambda^{n+p-1} + \lambda^{n+p-2} + \ldots + \lambda^n) |x_1 - x_0| = \lambda^n (1 + \lambda + \ldots + \lambda^{p-1}) |x_1 - x_0|$$

Deoarece $1+\lambda+\ldots+\lambda^{p-1}<\sum_{k\geq 0}\lambda^k=\frac{1}{1-\lambda}$, $(\forall)\ p>1$, obţinem:

$$|x_{n+p}-x_n|\leqslant \lambda^n\cdot\frac{1}{1-\lambda}|x_1-x_0|\ (\forall)\ n,\ p\geqslant 1 \tag{2}$$

Cum $\lim_{n\to\infty}\lambda^n=0$ (P.2.4.1.(7°)), din (2) rezultă că pentru $\varepsilon>0$ fixat, există $n_\varepsilon\geqslant 1$, a.î.

$$|x_{n+p}-x_n|\leqslant\varepsilon,\ (\forall)\ n,\ p\geqslant 1,$$

deci (P.2.3.11). $(x_n)_{n\geq 1}$ este şir Cauchy şi deci (T.2.3.21.(6°)) este convergent, fie x^* limita sa. Mulţimea A fiind închisă, avem (P.5.1.15.(5°)) $x^*\in A$. Trecînd cu p la limită în relaţia (2), $p\to\infty$, obţinem:

$$|x^*-x_n|=\lim_{p\to\infty}|x_{n+p}-x_n|\leqslant\frac{\lambda^n}{1-\lambda}|x_1-x_0|,\ (\forall)\ n\geqslant 1.$$

În fine, funcţia f fiind continuă, din relaţia evidentă $x_n=f(x_{n-1})$, $(\forall)\ n\geqslant 1$, prin trecere la limită, $n\to\infty$, rezultă

$$x^*=\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}f(x_{n-1})=f(x^*)$$

Corolar 1. *Fie $I\subseteq\mathbf{R}$ un interval închis şi $f:I\to I$ o funcţie derivabilă cu proprietatea că $\lambda:=\sup_{x\in I}|f'(x)|<1$. Atunci are loc concluzia din* T.13.3.5.

Dem. Fie $x, y\in I$, $x<y$, fixaţi. Din T.6.3.4. rezultă că $(\exists)\ c\in(x,y)$ a.î. $f(x)-f(y)=(x-y)f'(c)$, deci

$$|f(x)-f(y)|=|x-y|\cdot|f'(c)\leqslant\lambda|x-y|$$

şi deci f este o λ-contracţie etc.

Corolar 2. *Fie $A\subseteq\mathbf{R}$ o mulţime închisă şi $f:A\to A$ o λ-contracţie. Atunci f posedă un punct fix unic determinant.*

Dem. Presupunem că $(\exists)\ x, y\in A$ cu $f(x)=x$ şi $f(y)=y$. Atunci

$$|x-y|=|f(x)-f(y)|\leqslant\lambda|x-y|<|x-y|,$$

absurd, etc.

Corolar 3. *Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ un şir definit astfel $x_n:=a\,x_{n-1}+b$, $(\forall)\ n\geqslant 1$, unde a, b, x_0 sînt numere reale fixate şi $|a|<1$. Atunci $(x_n)_{n\geq 1}$ este convergent şi are limita egală cu $\frac{b}{1-a}$.*

Dem. Punem $f(x):=ax+b$, $x\in\mathbf{R}$. Atunci f este o contracţie şi avem $f^n(x_0)=x_n$, $(\forall)\ n\geqslant 1$, deci şirul $(f^n(x_0))_{n\geq 1}$ este convergent către unicul punct fix al aplicaţiei f. Cum $f(x)=x\Leftrightarrow ax+b=x\Leftrightarrow x=\frac{b}{1-a}$, rezultă că $x_n\to\frac{b}{1-a}$.

Corolar 4. *Ecuaţia lui Kepler $x-\varepsilon\sin x=t$, unde t, ε sînt numere reale fixate şi $|\varepsilon|<1$, admite o soluţie unică.*

Dem. Fixăm $t, \varepsilon \in \mathbf{R}$ cu $|\varepsilon| < 1$ şi punem $f(x) := \varepsilon \sin x + t$, $x \in \mathbf{R}$. Atunci f este o contracţie :

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |\varepsilon|\,|\sin x_1 - \sin x_2| \leqslant |\varepsilon|\,|x_1 - x_2|, \ (\forall)\ x_1, x_2 \in \mathbf{R},$$

deci posedă un mic punct fix etc.

Corolar 5 (Formula lui Heron). *Fie* $(x_n)_{n\geqslant 1}$ *un şir definit astfel* $x_n := \frac{1}{2}\left(x_{n-1} + \frac{c}{x_{n-1}}\right)$, $(\forall)\ n \geqslant 1$, *unde* $x_0, c \in \mathbf{R}_+^*$ *sînt fixaţi. Atunci* $(x_n)_{n\geqslant 1}$ *este convergent şi are limita* $\sqrt{c}$.

Dem. Fie : $f\ \mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R}_+^*$ o funcţie definită astfel $f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{c}{x}\right)$. Atunci f este derivabilă şi avem $f'(x) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{c}{x^2}\right)$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}_+^*$, deci $f'(x) < 0$, dacă $x \in (0, \sqrt{c})$ şi $f'(x) > 0$, dacă $x > \sqrt{c}$ şi deci $\sqrt{c}$ este minim absolut pentru f.

Cum $f(\sqrt{c}) = \sqrt{c}$, rezultă că $f\ \mathbf{R}_+^*) \subseteq A$, pentru $A := [\sqrt{c}, \infty)$. Deoarece $0 \leqslant f'(x) \leqslant \frac{1}{2}$, $(\forall)\ x \in A$, putem aplica Cor. 2 pentru $f|_A$. Aşadar $f|_A$ posedă un unic punct fix $x^* \in A$, egal cu limita şirului $(f^n(x))_{n\geqslant 1}$ cu $x \in A$ fixat. Dacă $x = f(x_0)$, avem $f^{n-1}(x) = x_n$, $(\forall)\ n \geqslant 1$, prin urmare $x_n \to x^*$, unde $f(x^*) = x^* \Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(x^* + \frac{c}{x^*}\right) = x^* \Leftrightarrow x^* = \sqrt{c}$.

Exemplul 1. *Să se calculeze* $\sqrt{2}$ *cu o eroare* $\leqslant 10^{-2}$, *utilizînd principiul contracţiei.*

Fie $f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right)$, $x \in \mathbf{R}_+^*$. Am văzut (Cor. 5) că f este o contracţie pe mulţimea $A = [\sqrt{2}, \infty)$; $f(\mathbf{R}_+^*) \subseteq A$ şi $x_n := f^n(x_0)$ $(n \geqslant 1)$ converge la $\sqrt{2}$, unicul punct fix al aplicaţiei f. Din T.13.3.5. rezultă

$$|\sqrt{2} - x_n| \leqslant \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}}\left|x_0 - \frac{1}{2}\left(x_0 + \frac{2}{x_0}\right)\right| = \frac{1}{2^{n-1}}\left|\frac{x_0}{2} - \frac{1}{x_0}\right|, \ (\forall)\ n \geqslant 1$$

Luînd $x_0 = \frac{3}{2}$ obţinem :

$$|\sqrt{2} - x_n| \leqslant \frac{1}{2^{n-1}} \cdot \frac{1}{12} = \frac{1}{3 \cdot 2^{n+1}}, \ (\forall)\ n \geqslant 1$$

Cum $\frac{1}{3 \cdot 2^{n+1}} \leqslant 10^{-2} \Leftrightarrow 3.2^{n+1} \geqslant 100 \Leftrightarrow n \geqslant 5$, conchidem că $\sqrt{2} \approx x_5$ cu o eroare $< 10^{-2}$.

Evident avem :

$$x_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} + \frac{2}{\frac{3}{2}}\right) = \frac{17}{12}; \ x_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{17}{12} + \frac{2}{\frac{17}{12}}\right) = \frac{765}{408};$$

$$x_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{765}{408} + \frac{2}{765}\right) = \frac{765}{816} + \frac{408}{765} \text{ etc.}$$

*

Pentru a calcula cu aproximație rădăcinile reale ale unui polinom $P \in \mathbf{R}[X]$ cu ajutorul principiului contracției se procedează astfel. Printr-un procedeu oarecare se separă rădăcinile reale ale lui P și se ia în considerație fiecare rădăcină în parte. Fie $[a, b]$ un interval care conține o rădăcină a lui P. Se scrie ecuația $P(x) = 0$ sub forma echivalentă $Q(x) = x$, unde $Q \in \mathbf{R}[X]$ și se consideră aplicația $f(x) = Q(x)$, $x \in \mathbf{R}$. Presupunem că f satisface proprietățile :

$$1^\circ\ f([a, b]) \subseteq [a, b]\,;\ 2^\circ\ \lambda := \sup_{a \leqslant x \leqslant b} |f'(x)| < 1$$

Atunci putem aplica pentru f principiul contracției : $(\exists\,!)\ x^* \in [a, b]$ cu $f(x^*) = x^* \Leftrightarrow (\exists\,!)\ x^* \in [a, b]$ cu $P(x^*) = 0$. Așadar rădăcina (unică) a lui P situată în $[a, b]$ este punct fix pentru f. În plus $(\forall)\ x_0 \in [a, b]$ avem inegalitatea :

$$|x^* - f^n(x_0)| \leqslant \frac{\lambda}{1-\lambda}\,|x_0 - f(x_0)|,\ (\forall)\ n \geqslant 1,$$

de unde deducem că $x^* \approx f^n(x_0)$ cu o eroare $\varepsilon \leqslant \dfrac{\lambda^n}{1-\lambda}\,|x_0 - f(x_0])|$. Mărind pe n putem face eroarea oricît de mică.

Exemplul 2. *Să se calculeze rădăcinile reale ale ecuației* $x^5 - 5x + 1 = 0$ *cu o eroare* $\leqslant 10^{-3}$, *utilizînd principiul contracției.*

Se separă rădăcinile ecuației date cu șirul lui Rolle :

$$P(x) = x^5 - 5x + 1,\ x \in \mathbf{R}\,;\ P'(x) = 5(x^4 - 1) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$$

Deoarece avem :

$$P(-\infty) = -\infty < 0,\ P(-1) = 5 > 0,\ P(1) = -3 < 0,\ P(+\infty) = +\infty > 0,$$

rezultă că ecuația dată are (exact) trei rădăcini reale și acestea sînt situate în intervalele : $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$ și $(1, \infty)$. Fie x^* rădăcina situată din interiorul $(-1, 1)$. Cum $P(0) = 1 > 0$ și $P\left(\frac{1}{2}\right) < 0$, avem că $x^* \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$. Evident ecuația $x^5 - 5x + 1 = 0$ este echivalentă cu ecuația $\frac{1}{5}(x^5 + 1) = x$. Considerăm aplicația $f(x) = \frac{1}{5}(x^5 + 1)$, $x \in \mathbf{R}$. Atunci avem :

$$1^\circ\ f\left(\left[0, \frac{1}{2}\right]\right) \subseteq \left[0, \frac{1}{2}\right];\ 2^\circ\ \lambda = \sup_{0 < x < \frac{1}{2}} |f'(x)| = \frac{1}{16} < 1.$$

Așadar f este λ-contracție a lui $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ cu $\lambda = \frac{1}{16}$. Punctul fix al lui f din $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ coincide cu x^*, rădăcina lui P din $\left(0, \frac{1}{2}\right)$. Prin urmare $(\forall)\ x_0 \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, șirul $x_n := f(x_{n-1})$, $(\forall)\ n \geqslant 1$, converge la x^* și avem inegalitatea :

$$|x^* - x_n| \leqslant \left(\frac{1}{16}\right)^n \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{16}}\,|x_0 - f(x_0)|,\ (\forall)\ n \geqslant 1$$

Alegem $x_0 = 0$, deci $f(x_0) = \frac{1}{5}$ și deci

$$|x^* - x_n| \leqslant \frac{15}{16^{n-1}} \cdot \frac{1}{5} = \frac{3}{16^{n-1}} \quad (\forall)\ n \geqslant 1$$

Să determinăm $n \geqslant 1$ a. î. $\frac{3}{16^{n-1}} < \frac{1}{1000} \Leftrightarrow n \geqslant 4$. Rămîne să calculăm pe x_4. Avem $x_1 = f(0) = \frac{1}{5}$, $x_2 = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{5^5} + 1\right) = \frac{3126}{15 \cdot 625}$; $x_3 = f(x_2) = \frac{1}{5}\left(\left(\frac{3126}{15 \cdot 625}\right)^2 + 1\right) = 0{,}3601536$ etc.

Exemplul 3. *Să se calculeze soluțiile reale ale ecuației* $x - \cos x = 0$ *cu o eroare* $\leqslant 10^{-1}$, *utilizînd principiul contracției.*

Fie $\varphi(x) = x - \cos x$, $x \in \mathbf{R}$. Deoarece $\varphi' > 0$ rezultă că φ este strict crescătoare, deci ecuația $\varphi(x) = 0$ are cel mult o soluție. Însă $\varphi(0) < 0$ și $\varphi(1) > 0$, deci ecuația $\varphi(x) = 0$ are exact o soluție x^* și avem $x^* \in (0,1)$. Ecuația dată este echivalentă cu ecuația $\frac{1}{2}(x + \cos x) = x$. Considerăm funcția $f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ definită astfel $f(x) = \frac{1}{2}(x + \cos x)$. Cum $f'(x) = \frac{1}{2}(1 - \sin x)$ și $0 \leqslant 1 - \sin x \leqslant 1$, $(\forall)\ x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, rezultă că $\|f\|_\infty = \frac{1}{2}$, deci f este o λ—contracție cu $\lambda = \frac{1}{2}$. Atunci ecuația $f(x) = x$ posedă un punct fix $\bar{x}$ unic determinat. Însă evident $f(x^*) = x^*$, deci $\bar{x} = x^*$.

Prin urmare soluția x^* este limita șirului $(x_n = f(x_{n-1}),\ (\forall)\ n \geqslant 1$, unde $x_0 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ este fixat arbitrar și avem inegalitatea:

$$|x^* - x| \leqslant \frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} |x_0 - f(x_0)| \quad (\forall)\ n \geqslant 1.$$

Alegem $x_0 = 0$, deci $f(x_0) = \frac{1}{2}$. Să determinăm $n_0 \geqslant 1$ a.î. $\frac{1}{2^n} \cdot 2 \left| 0 - \frac{1}{2} \right| \leqslant \frac{1}{10} \Leftrightarrow n \geqslant 4$. Rămîne să calculăm pe x_4. Avem: $x_1 = f(0) = \frac{1}{2}$,

$$x_2 = f(x_1) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \cos\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + 0{,}87758\right) \approx 0{,}68879,$$

$$x_3 = f(x_2) \approx \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \cos 0{,}68879\right) \approx 0{,}63601;$$

$$x_4 \approx f(x_3) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \cos 0{,}63601\right) \approx 0{,}652235.$$

13.4. Aproximarea funcţiilor

Să formulăm noţiunea de aproximare într-un mod general. Fie E o mulţime : o funcţie $d : E \times E \to \mathbf{R}$ se numeşte *semimetrică* pe E dacă satisface proprietăţile : (i) $d(x, y) \geqslant 0$, $d(x, x) = 0$ $(\forall)$ $x, y \in E$; (ii) $d(x, y) = d(y, x)$, $(\forall)$ $x, y \in E$; (iii) $d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y)$, $(\forall)$ $x, y, z \in E$. Dacă în plus $d(x, y) = 0$ implică $x = y$, atunci d se numeşte *metrică* pe E. O mulţime E pe care s-a definit o (semi)metrică d se numeşte *spaţiu (semi)metric* şi se notează cu E $[d]$. Fie acum $E[d]$ un spaţiu semimetric şi $A \subseteq E$ o mulţime. *Dacă $x \in E$ este fixat, se pune problema dacă există un element $x_0 \in A$, eventual unic determinat, a.î. $d(x, x_0) = d(x, A) = \inf_{a \in A} (x, a)$?* Elementul x_0, dacă există, se numeşte *element de cea mai bună aproximare* (fig. 68).

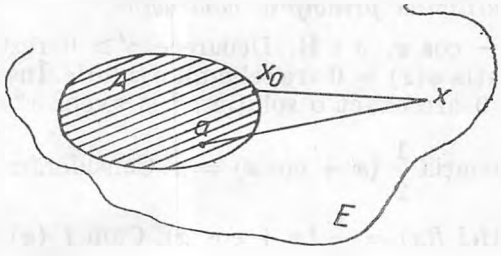


Fig. 68

Exemplul 1. Fie $E = \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ înzestrat cu distanţa euclidiană şi E_0 un subspaţiu, deci o dreaptă care trece prin origine. Atunci $(\forall)$ $z = (x, y) \in E$, există $z_0 = (x_0, y_0) \in E_0$ unic determinat a.î. $d(z, z_0) = d(z, E_0)$, adică $d(z, z_0) \leqslant d(z, z')$, $(\forall)$ $z' \in E_0$ (fig. 69).

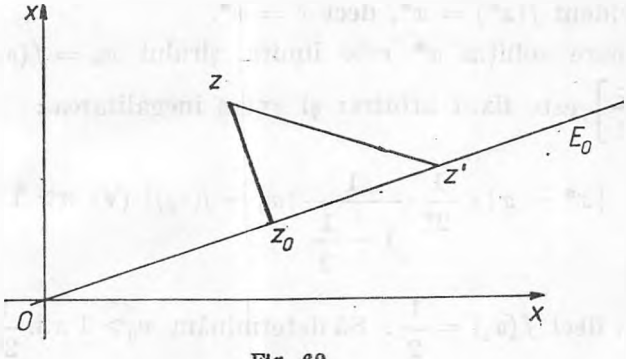


Fig. 69

Exemplul 2. Fie $E = C([a, b])$ — mulţimea tuturor funcţiilor continue $f : [a, b] \to \mathbf{R}$, $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|$ şi $d(f, g) = \|f - g\|_\infty$. Atunci d este o metrică pe E şi avem $d(f, f_n) \to 0 \Leftrightarrow f_n \overset{u}{\to} f$, de aceia aproximarea în metrica d se numeşte *aproximarea uniformă* pe $[a, b]$. Fie

$$A = \{f \in E;\ (\exists)\ P \in \mathbf{R}[X] \text{ a.î. } f(x) = P(x)\ (\forall)\ x \in [a, b]\}$$

Din teorema lui Weierstrass (T.12.1.8 Cor. 1) rezultă că

$$\inf_{f \in A} \|f - g\|_\infty = 0,\ (\forall)\ f \in E$$

Fie mai departe $n \geqslant 1$ fixat și mulțimea:

$$A = \{f \in E;\ (\exists)\ P \in \mathbf{R}[X] \text{ a.î. grad } P \leqslant n \text{ și } f(x) = P(x)\ (\forall)\ x \in [a, b]\}$$

Atunci se poate arăta că pentru $(\forall)\ f \in E$ există $f_0 \in A$ a.î. $d(f, f_0) = d(f, A)$

Exemplul 3. Fie $E = \mathcal{C}([a, b])$ înzestrat cu metrica

$$d(f, g) = \left(\int_a^b |f-g|^2\right)^{1/2},\quad f, g \in E.$$

Aproximarea în metrica d se numește *aproximarea în medie pătratică.*

13.4.1. Definiție. Fie $I \subseteq \mathbf{R}$ un interval $\mathcal{F}(I) = \{f : I \to \mathbf{R}\}$, $f \in \mathcal{F}(I)$ o funcție și $x_1, x_2, \ldots, x_n \in I$, n punte distincte. Prin *interpolarea* lui f printr-o funcție dintr-o clasă $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{F}(I)$ vom înțelege determinarea unei funcții $\varphi \in \mathcal{C}$ a.î. $f(x_i) = \varphi(x_i)$, $(\forall)\ 1 = \overline{i, n}$. Punctele $x_i (i = \overline{1, n})$ se numesc atunci *puncte de interpolare* (noduri) iar φ *funcția de interpolare asociată lui* f *și punctelor* x_i $(i = \overline{1, n})$. Dacă $\mathcal{C}$ este formată din funcții polinomiale de grad $\leqslant n-1$, atunci φ se numește *polinom de interpolare asociat lui* f *și punctelor* $x_i (i = \overline{1, n})$.

Dacă punem $d(f, g) := \sup_{1 \leqslant i \leqslant n} |f(x_i) - g(x_i)|$, $(\forall)\ f, g \in \mathcal{F}(I)$, atunci d este o semimetrică pe $\mathcal{F}(I)$ și avem: $\varphi \in \mathcal{F}(I)$ este o funcție de interpolare asociată lui f și punctelor $x_i (i = \overline{1, n}) \Leftrightarrow d(f, g) = 0$.

Observație. În esență pentru a defini polinomul de interpolare avem nevoie de n numere reale distincte $x_1, x_2, \ldots x_n$ și de n numere reale arbitrare $y_1, y_2, \ldots y_n$. Se caută apoi un polinom $P \in \mathbf{R}[X]$ de grad $\leqslant n-1$, care să satisfacă proprietatea: $P(x_i) = y_i\ (\forall)\ i = \overline{1, n}$.

Exemplu. Fie $x_1, x_2, x_3 \in \mathbf{R}$, $x_1 < x_2 < x_3$ fixate și f o funcție reală definită pe o mulțime care conține cele trei numere. Dacă punctele din plan $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$, unde $y_i = f(x_i)$, $i = \overline{1, 3}$, sînt coliniare, atunci polinomul de interpolare asociat lui f și punctelor x_1, x_2, x_3 este de gradul 1 deci o dreaptă care trece prin A, B, C (fig. 70). Dacă punctele A, B, C sînt necolineare, atunci polinomul de interpolare este de grad 2, deci o parabolă care trece prin A, B, C (fig. 71).

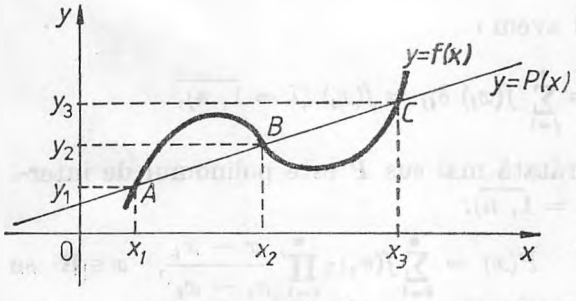


Fig. 70

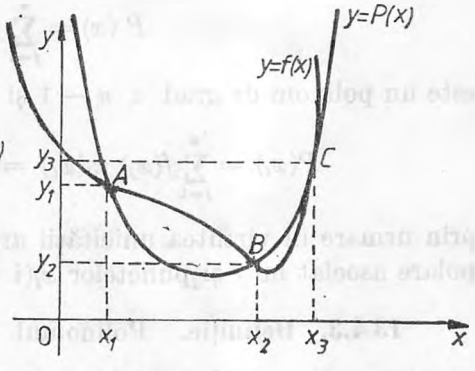


Fig. 71

13.4.2. Teoremă. *Fie* $A \subseteq \mathbf{R}$ *o mulțime,* $f : A \to \mathbf{R}$ *o funcție și* $x_1, x_2, \ldots, x_n \in A$ *n puncte distincte. Atunci* $(\exists)\ P \in \mathbf{R}[X]$ *un polinom de grad* $\leqslant n-1$,

unic determinat, a.î. $f(x_i) = P(x_i)$, $(\forall)\ i = \overline{1, n}$; *polinomul* P *poate fi reprezentat sub forma* *) :

$$P(x) = \sum_{j=1}^{n} f(x_j) \cdot \prod_{i=1}^{n}{}' \frac{x - x_i}{x_j - x_i}, \quad x \in \mathbf{R}$$

Dem. Fie $\mathbf{R}_{n-1}[X]$ mulțimea polinoamelor cu coeficienți reali de grad $\leqslant n-1$. Atunci $(\forall)\ P \in \mathbf{R}_{n-1}[X]$, avem $P(x) = c_0 + c_1 x + \ldots + c_n x^n (x \in \mathbf{R})$. Condiția $P(x_i) = f(x_i)$ $(i = \overline{1, n})$ se transcrie

$$c_0 + c_1 x_i + c_2 x_i^2 + \ldots + c_{n-1} x_i^{n-1} = f(x_i)\ (i = \overline{1, n}), \tag{1}$$

A găsi un polinom $P \in \mathbf{R}[X]$ cu proprietatea că $P(x_i) = f(x_i)$, $(\forall)\ i = \overline{1, n}$ revine la a rezolva sistemul de ecuații liniare (1) în necunoscutele $c_0, c_1, \ldots, c_{n-1} \in \mathbf{R}$. Or, determinantul sistemului (1) este un determinant Wandermonde

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^{n-1} \\ \vdots & & & & \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^{n-1} \end{vmatrix},$$

care este nenul, fiind egal cu $\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_j - x_i)$, deci (1) admite o soluție unică prin urmare $(\exists\ !)\ P \in \mathbf{R}_{n-1}[X]$ a.î. $P(x_i) = f(x_i)$, $(\forall)\ i = \overline{1, n}$.

Mai departe $(\forall)\ j = \overline{1, n}$, punem :

$$\pi_j(x) = \frac{(x - x_1) \ldots (x - x_{j-1})(x - x_{j+1}) \ldots (x - x_n)}{(x_j - x_1) \ldots (x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1}) \ldots (x_j - x_n)}$$

pe care îl notăm cu $\prod_{i=1}^{n}{}' \frac{x - x_i}{x_j - x_i}$. Observăm că π_j este un polinom de grad $n - 1$ și $\pi_j(x_j) = \delta_{ij}$, $(\forall)\ i, j = \overline{1, n}$, deci

$$P(x) = \sum_{j=1}^{n} f(x_j)\, \pi_j(x), \quad x \in \mathbf{R}$$

este un polinom de grad $\leqslant n - 1$ și avem :

$$P(x_i) = \sum_{j=1}^{n} f(x_j)\, \pi_j(x_i) = \sum_{j=1}^{n} f(x_j)\, \delta_{ij} = f(x_i)\ (i = \overline{1, n}),$$

prin urmare în virtutea unicității arătată mai sus P este polinomul de interpolare asociat lui f și punctelor $x_i (i = \overline{1, n})$.

13.4.3. Definiție. Polinomul $P(x) = \sum_{i=1}^{n} f(x_j) \cdot \prod_{i=1}^{n}{}' \frac{x - x_i}{x_j - x_i}$, $x \in \mathbf{R}$ se numește *polinomul de interpolare al lui Lagrange*, asociat funcției f și punctelor x_i $(i = \overline{1, n})$ și se notează cu $L_n(x)$ sau $L(x_1, x_2, \ldots, x_n; f)$.

*) Semnul semnifică că se face produsul de la $i = 1$ la $i = n$ cu excepția lui $i = j$.

Corolar 1. *Polinomul de interpolare asociat funcției f și punctelor* $x_1 \dots x_n$ *poate fi reprezentat sub forma*:

$$P(x) = \sum_{j=1}^{n} f(x_j) \cdot \frac{\omega(x)}{(x - x_j)\,\omega'(x_j)},$$

unde $\omega(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)$.

Dem. Într-adevăr avem:

$$\omega'(x) = \sum_{k=1}^{n} \prod_{\substack{i=\overline{1,n} \\ i \neq k}} (x - x_i),$$

deci

$$\omega'(x_j) = \prod_{i=1}^{n}{}' (x_j - x_i)$$

Cum însă

$$P(x) = \sum_{j=1}^{n} f(x_j) \prod_{i=1}^{n}{}' \frac{x - x_i}{x_j - x_i}$$

și

$$\prod_{i=1}^{n}{}' \frac{x - x_i}{x_j - x_i} = \left(\prod_{i=1}^{n} (x - x_i)\right) \cdot \frac{1}{(x - x_j) \prod_{i=1}^{n}{}' (x_j - x_i)} = \frac{\omega(x)}{(x - x_j)\omega'(x_j)},$$

obținem relația căutată.

13.4.4. Teoremă. *Fie* $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ *o funcție de n ori derivabilă;* $x_1, x_2, \dots$ $\dots x_n \in [a, b]$ *n puncte distincte și* P_n *polinomul de interpolare asociat lui f și punctelor* $x_i (i = \overline{1, n})$. *Atunci* $(\forall)\, x \in [a, b]$, $(\exists)\, \xi \in (a, b)$ *a.î.*

$$f(x) - P_n(x) = \frac{1}{n!} f^{(n)}(\xi) \prod_{j=1}^{n} (x - x_j)$$

Să demonstrăm în prealabil două leme ajutătoare.

Lema 1. *Fie* $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ *o funcție de n ori derivabilă și* $x_0, x_1, \dots, x_n \in$ $\in [a, b]$ $n+1$ *puncte distincte în care f ia aceiași valoare. Atunci* $(\exists)\, \xi \in (a, b)$ *a.î.* $f^{(n)}(\xi) = 0$.

Dem. Renumerotînd putem presupune $a \leqslant x_0 < x_1 < \dots < x_n \leqslant b$. Aplicînd th. Rolle pe fiecare interval $[x_{i-1}, x_i]$ $(i = \overline{1, n})$, rezultă că f' admite cel puțin n zerouri distincte. Continuînd deducem că f'' admite cel puțin $n - 1$ zerouri distincte etc.

Lema 2. *Fie* $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ *o funcție de n ori derivabilă;* $x_1, x_2, \dots, x_n \in$ $\in [a, b]$ *n puncte distincte în care f se anulează. Atunci* $(\forall)\, x \in [a, b]$ $(\exists)\, \xi \in$ $\in (a, b)$ *a.î.*

$$f(x) = \frac{1}{n!} f^{(n)}(\xi) \prod_{j=1}^{n} (x - x_j)$$

Dem. Dacă $x \in \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ afirmația este evidentă. Fie deci $x_0 \in$ $\in [a,b] \setminus \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ fixat; notăm $\lambda = f(x_0) \prod_{j=1}^{n} (x - x_j)^{-1}$ și fie

$$\varphi(x) := f(x) - \lambda \prod_{j=1}^{n} (x - x_j)\ x \in [a, b] \qquad (1)$$

Evident φ este de n ori derivabilă şi avem

$$\varphi(x_0) = f(x_0) - f(x_0)\left(\prod_{j=1}^{n}(x_0 - x_j)^{-1}\right)\cdot\prod_{j=1}^{n}(x - x_j) = 0$$

$$\varphi(x_i) = f(x_i) - \lambda\prod_{j=1}^{n}(x_i - x_j) = 0 \quad (\forall)\ i = \overline{1, n}.$$

Aplicînd lema 1 rezultă că $(\exists)\ \xi \in (a, b)$ a.î. $\varphi^{(n)}(\xi) = 0$.

Cum polinomul $\omega(x) = \prod_{j=1}^{n}(x - x_j)$ este de grad n şi are coeficientul dominant 1, avem $\omega^{(n)}(x) = n!$ Ţinînd seama de (1) avem :

$$\varphi^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) - \lambda\omega^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) - \lambda\, n!,$$

deci

$$f^{(n)}(\xi) - \lambda n! = 0$$

şi deci

$$f(x_0) = \frac{1}{n!}\, f^{(n)}(\xi)\prod_{j=1}^{n}(x_0 - x_j)$$

Dem. T.13.4.4. Fie $\varphi(x) = f(x) - P_n(x)$, $x \in [a, b]$. Atunci φ este de n ori derivabilă şi se anulează în fiecare punct x_i $(i = \overline{1, n})$, deci cf. Lemei 2 $(\forall)\ x \in [a, b]\ (\exists)\ \xi \in (a, b)$ a.î.

$$\varphi(x) = \frac{1}{n!}\,\varphi^{(n)}(\xi)\prod_{j=1}^{n}(x - x_j)$$

Cum P_n are gradul $\leqslant n - 1$, avem $P^{(n)} = 0$, deci $\varphi^{(n)}(\xi) = f^{(n)}(\xi)$ şi deci

$$f(x) - P_n(x) = \frac{1}{n!} f^{(n)}(\xi)\prod_{j=1}^{n}(x - x_j)$$

Corolar 1. *Fie* $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ *o funcţie de clasă* $\mathcal{C}^n$; $x_1, x_2, \ldots, x_n \in [a, b]$ *n puncte distincte şi* P_n *polinomul de interpolare asociat lui* f *şi punctelor* $x_i (i = \overline{1, n})$. *Atunci avem* :

$$|f(x) - P_n(x)| \leqslant \frac{1}{n!}\,\|f^{(n)}\|_\infty \cdot \prod_{j=1}^{n}|x - x_j| \quad (\forall)\ x \in [a, b]$$

Observaţie. Inegalitatea din Cor. 1 ne permite să determinăm eroarea pe care o facem aproximînd $f(x)$ prin $P_n(x)$ cu x din $[a, b]$.

13.4.5. Definiţie. Fie P_n polinomul de interpolare asociat funcţiei $f : I \to \mathbf{R}$ şi punctelor distincte $x_1, x_2, \ldots, x_n \in I$. Vom spune că $P_n(x)$ reprezintă *valoarea prin interpolare* (resp. *extrapolare*) a funcţiei f în punctul $x \in I$, dacă $x \in [x_m, x_M]$ (resp. $x \notin [x_m, x_M]$), unde $x_m = \min_{1 \leqslant i \leqslant n} x_i$, $x_M = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} x_i$.

13.4.6. Definiţie. Fie $I \subseteq \mathbf{R}$ un interval şi $f : I \to \mathbf{R}$ o funcţie. Să punem :

$$f(x_1 ; x_2) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1},\ f(x_1 ; x_2 ; x_3) = \frac{f(x_2 ; x_3) - f(x_1 ; x_2)}{x_3 - x_1}$$

și în general :

$$f(x_1\,;\,x_2\,;\,\ldots\,;\,x_n)=\frac{f(x_2\,;\,x_3\,;\,\ldots\,;\,x_n)-f(x_1\,;\,x_2\,;\,\ldots\,;\,x_{n-1})}{x_n-x_1}$$

pentru orice sistem de n puncte distincte $x_1, x_2, \ldots, x_n$ din I. Funcțiile astfel definite se numesc *diferențe divizate* ale lui f de ordinul $1, 2, \ldots, n-1$ respectiv. În loc de $f(x_1\,;\,x_2\,;\,\ldots\,;\,x_n)$ vom mai scrie $[x_1, x_2, \ldots, x_n f]$.

13.4.7. Teoremă. *Fie $I \subseteq \mathbf{R}$ un interval, $f : I \to \mathbf{R}$ o funcție și P_n polinomul de interpolare asociat lui f și punctelor distincte $x_1, x_2, \ldots, x_n$ din I. Atunci P_n poate fi reprezentat sub forma*

$$P_n(x)=f(x_1)+f(x_1\,;\,x_2)\,(x-x_1)+\ldots+f(x_1\,;\,\ldots\,;\,x_n)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})$$

13.4.8. Definiție. Polinomul $P_n(x)=f(x_1)+\sum_{i=1}^{n} f(x_1\,;\,x_2\,;\ldots\,;\,x_i)\prod_{j=1}^{i-1}(x-x_j)$, $x\in\mathbf{R}$ se notează cu N_n și se numește *polinomul de interpolare a lui Newton* asociat funcției f și punctelor $x_i (i=\overline{1,\ n})$.

Teorema 13.4.8. poate fi reformată astfel :

13.4.9. Teoremă. *Fie $I\subseteq\mathbf{R}$ un interval $f : I\to\mathbf{R}$ o funcție și $x_1, x_2, \ldots, x_n \in I$ n puncte distincte. Atunci polinomul de interpolare asociat lui f și punctelor $x_i (i=\overline{1,\ n})$ (care există și este unic determinat cf.* T.13.4.2) *poate fi reprezentat sub forma dată de Newton.*

Exemplul 1. *Să se scrie polinomul de interpolare, sub forma lui Lagrange, asociat funcției $f(x)=\sin \pi x$, $x\in\mathbf{R}$ și punctelor $x_1=\frac{1}{6}$, $x_2=\frac{1}{3}$ și $x_3=\frac{1}{2}$.*

Expresia generală a polinomului de interpolare, sub forma lui Lagrange, asociat unei funcții f și punctelor $x_1, x_2, x_3 \in D_f$ se scrie

$$L_3(x)=f(x_1)\frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}+f(x_2)\frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)}+f(x_3)\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}$$

În cazul nostru se obține :

$$L_3(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{2}\right)}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\left(x-\frac{1}{6}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)}+$$

$$+1\cdot\frac{\left(x-\frac{1}{6}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right)}{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)},$$

deci

$$L_3(x)=\frac{3}{2}(3x-1)\,(2x-1)-\frac{3\sqrt{3}}{2}(6x-1)(2x-1)+(6x-1)(3x-1)$$

și deci

$$L_3(x) = (27 - 18\sqrt{3})\,x^2 + \left(12\sqrt{3} - \frac{33}{2}\right)x + \frac{5}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

De aici rezultă în particular valoarea prin interpolare a lui $\sin\frac{\pi}{4}$ și anume:

$$\sin\frac{\pi}{4} = f\left(\frac{1}{4}\right) \approx L_3\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{6\sqrt{3}+1}{16} \approx 0{,}712019$$

Exemplul 2. *Să se scrie polinomul de interpolare, sub forma lui Newton asociat funcției* $f(x) = \cos \pi x$, $x \in \mathbf{R}$ *și punctelor* $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{1}{6}$ *și* $x_3 = \frac{1}{3}$.

Expresia generală a polinomului de interpolare, sub forma lui Newton, asociat unei funcții f și punctelor $x_1, x_2, x_3 \in D$ se scrie:

$$N_3(x) = f(x_1) + f(x_1; x_2)(x - x_1) + f(x_1; x_2 : x_3)(x - x_1)(x - x_2)$$

În cazul nostru avem: $f(x_1) = 1$, $f(x_2) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $f(x_3) = \frac{1}{2}$,

$$f(x_1; x_2) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{\sqrt{3}/2 - 1}{1/6 - 0} = 3\sqrt{3} - 6,$$

$$f(x_2; x_3) = \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} = \frac{1/2 - \sqrt{3}/2}{1/3 - 1/6} = 3 - 3\sqrt{3},$$

$$f(x_1;\ x_2;\ x_3) = \frac{f(x_2;\ x_3) - f(x_1 : x_2)}{x_3 - x_1} = \frac{(3 - \sqrt{3}) - (3\sqrt{3} - 6)}{1/3 - 0} = 27 - 18\sqrt{3},$$

deci

$$N_3(x) = 1 + (3\sqrt{3} - 6)(x - 0) + (27 - 18)\sqrt{3})\,x\left(x - \frac{1}{6}\right)$$

și deci

$$N_3(x) = (27 - 18\sqrt{3})\,x^2 + \frac{1}{6}(36\sqrt{3} - 63)\,x + 1.$$

De aici rezultă în particular valoarea prin interpolare a lui $\cos\frac{\pi}{4}$ și anume:

$$\cos\frac{\pi}{4} = f\left(\frac{1}{4}\right) \approx N_3\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{6\sqrt{3}+1}{16} \approx 0{,}712019.$$

13.4.10. Propoziție (Polinoamele lui Cebîșev). *Să se arate că funcția* $T_n(x) := \cos(n \arccos x)$, $x \in [-1, 1]$ *reprezintă un polinom, numit poli-*

nom Cebîşev de grad n, care are coeficientul termenului de grad n egal cu 2^{n-1}. *Să se rezolve ecuaţia* $T_n(x) = 0$ *şi să se determine valorile lui* x *din* $[-1, 1]$ *pentru care* $T_n(x)$ *este maxim resp. minim.*

Dem. Pentru un $x \in [-1, 1]$, fie $\alpha =$ arc cos x. Cu formula lui Moivre avem : cos $n\alpha$ + i sin $n\alpha = (\cos \alpha + 1 \sin \alpha)^n$ de unde, dezvoltînd şi egalînd părţile reale rezultă :

$$\cos\ n\ \alpha = \cos^n\alpha - C_n^2\cos^{n-2}\alpha \sin^2\alpha + C_n^4 \cos^{n-4}\ \alpha \sin^4\ \alpha\ - \ldots$$

Cum $\cos \alpha = x$, iar $\sin \alpha = \sqrt{1 - x^2}$ găsim :

$$T_n(x) = x^n - C_n^2 x^{n-2}\,(1 - x^2) + C_n^4 x^{n-4}\,(1 - x^2)^2 \ldots$$

deci T_n este un polinom de grad n, iar coeficientul lui x^n este $1 + C_n^2 + C_n^4 + \ldots = 2^{n-1}$.

Ecuaţia $T_n(x) = 0$ scrisă sub forma $\cos(n \arccos x) = 0$ duce la n arc cos $x = \frac{2k-1}{2}\pi$, deci $x = \cos \frac{2k-1}{2n}\pi$, avînd n soluţii distincte pentru $k = \overline{1, n}$. Ecuaţia are toate rădăcinile reale, în intervalul $[-1, 1]$.

Pentru determinarea punctelor de extrem observăm că maximul este 1 iar minimul -1 ; apoi $\cos(n \text{ arc cos } x)$ ia valorile ± 1 dacă n arc cos $x = k\pi$ sau altfel spus $x = \cos \frac{k\pi}{n}$.

Pe intervalul $[-1, 1]$ valorile de maxim şi minim sînt luate succesiv, adică $T_n(\cos 0) = 1$, $T_n\left(\cos \frac{\pi}{n}\right) = -1$, $T_n\left(\cos \frac{2\pi}{n}\right) = 1$ şi la fel în continuare $T_n(\cos \pi) = (-1)^n$.

Cunoscînd zerourile şi punctele de maxim putem reprezenta uşor pe T_n grafic. De exemplu, T_4 are graficul din fig. 72.

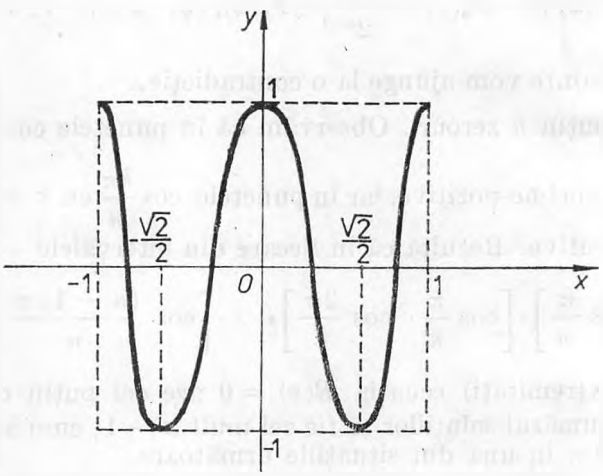


Fig. 72

13.4.11. Propoziţie (C e b î ş e v). *Să se arate că abaterea de la zero pe intervalul* $[-1, 1]$ *a polinomului* $x \mapsto a_0x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$ *cu* $a_0 = 1$, *nu poate fi mai mică decît* $1/2^{n-1}$ *şi este egală cu* $1/2^{n-1}$ *doar pentru polinomul* $1/2^{n-1}\,T_n$, *unde* T_n *este polinomul lui Cebîşev.*

Dem. Presupunem că există un polinom P_n de grad n a.î. să avem $|P_n(x)| < 1/2^{n-1} (\forall)\ x \in [-1, 1]$ adică

$$P_n(x) + 1/2^{n-1} < 0 \text{ și } P_n(x) + 1/2^{n-1} > 0.$$

Vom ajunge la o contradicție.

Fie $R(x) = P_n(x) - (1/2^{n-1})\ T_n(x)$ care este un polinom de grad cel mult $n - 1$. Din P.13.4.1.0 rezultă : $(\forall)\ 0 \leqslant k \leqslant n$, avem

$$R\left(\cos\frac{k\pi}{n}\right) = P_n\left(\cos\frac{\pi}{n}\right) - \frac{1}{2^{n-1}}\ (-1)^k,$$

iar presupunerea de la început conduce la $R\ (\cos 0) < 0$, $R\left(\cos\frac{\pi}{n}\right) > 0$, $R\left(\cos\frac{2\pi}{n}\right) < 0$ ... adică în fiecare din intervalele

$$\left(\cos 0,\ \cos\frac{\pi}{n}\right), \left(\cos\frac{\pi}{n}, \cos\frac{2\pi}{n}\right), \ \ldots\ \left(\cos\frac{(n-1)\pi}{n},\ \cos\frac{n\pi}{n}\right)$$

polinomul $R(x)$ trebuie să se anuleze.

Prin urmare, $R(x) = 0$, are cel puțin n soluții, absurd.

Să arătăm tot prin reducere la absurd că $\frac{1}{2^{n-1}}\ T_n$ este singurul polinom care pe $[-1, 1]$ are abaterea de la zero $\frac{1}{2^{n-1}}$.

Presupunem că P_n diferit de $\frac{1}{2^{n-1}}\ T_n$ este un polinom cu aceeași proprietate și să luăm

$$R(x) := P_n(x) - \frac{1}{2^{n-1}}\ T_n(x), (\forall)\ \ x \in [-1, 1].$$

La fel ca înainte vom ajunge la o contradicție.

R are cel puțin n zerouri. Observăm că în punctele $\cos\frac{k\pi}{n}$ cu $k = 0, 2, 4, \ldots$ R are valori ne-pozitive, iar în punctele $\cos\frac{k\pi}{n}$ cu $k = 1, 3, 5, \ldots$ valorile sînt ne-negative. Rezultă că în fiecare din intervalele

$$\left[\cos 0,\ \cos\frac{\pi}{n}\right], \left[\cos\frac{\pi}{n},\ \cos\frac{2\pi}{n}\right], \ \ldots\ \left[\cos\frac{(n-1)\pi}{n},\ \cos\frac{n\pi}{n}\right]$$

(eventual și la extremități) ecuația $R(x) = 0$ are cel puțin o soluție.

Pentru ca numărul soluțiilor să fie cel mult $n - 1$, cum avem n intervale trebuie să ne aflăm în una din situațiile următoare :

— există două intervale vecine și în ele doar o singură rădăcină (evident extremitatea comună) sau

— există trei intervale vecine conținînd două soluții, iar acestea sînt capetele de interval comune, ...

— există $k + 1$ intervale vecine conținînd k soluții, acestea fiind capetele comune.

Vom arăta că aceste cazuri nu sînt posibile.

Metoda fiind aceeași luăm doar prima situație și pentru precizare să presupunem intervalele vecine $\left[\cos 0, \cos \frac{\pi}{n}\right]$ și $\left[\cos \frac{\pi}{n}, \cos \frac{2\pi}{n}\right]$ soluția conținută fiind $\cos \frac{\pi}{n}$.

Cum $R(1)$ și $R\left(\cos \frac{2\pi}{n}\right)$ sînt negative și nenule (altfel ne-am afla în altă situație ...) iar $R\left(\cos \frac{\pi}{n}\right) = 0$, este necesar fie ca ecuația să mai aibă încă o soluție dacă funcția R ia pe $\left[1, \cos \frac{2\pi}{n}\right]$ vreo valoare strict pozitivă (folosim proprietatea Darboux), fie ca graficul ei să fie tangent la axa Ox.

Însă în această situație $\cos \frac{\pi}{n}$ este rădăcină dublă.

Într-adevăr, $R(x) = \left(x - \cos \frac{\pi}{n}\right) R_1(x)$ și să presupunem că $R_1(x)$ nu se anulează în $\cos \frac{\pi}{n}$; el păstrează semn constant pe o vecinătate a lui $\cos \frac{\pi}{n}$.

Cum $x - \cos \frac{\pi}{n}$ își schimbă semnul iar R și-l păstrează, rezultă o contradicție (sau altfel — condiția de tangență ≡ anularea derivatei).

Oricum, am arătat că în intervalul $\left[1, \cos \frac{2\pi}{n}\right]$ se află cel puțin două soluții.

Astfel am exclus primul caz și analog celelalte.

Corolar 1. *Polinomul de grad n de cea mai bună aproximare a funcției identic nule pe* $[-1, 1]$, *este polinomul lui Cebîșev normalizat.*

13.5. Integrarea numerică a funcțiilor

Fie $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ o funcție continuă. Pentru a calcula integrala definită $\int_a^b f(x)\,dx$ se pot utiliza mai multe metode : (i) se pleacă de la definiția integralei cu ajutorul sumelor Riemann sau a sumelor Darboux ; (ii) se dezvoltă f în serie Taylor cu centrul într-un punct x_0 din $[a, b]$, deci $f(x) = \sum_{n\geq 0} c_n(x - x_0)^n$, apoi se integrează seria dată termen cu termen ; (iii) Dacă se cunoaște o primitivă F a lui f se utilizează formula lui Leibniz-Newton : $\int_a^b f = F(b) - F(a)$. Aceste metode însă sînt uneori imposibile sau extrem de laborioase, deci impracticabile

chiar și în cazul unor funcții dintre cele mai simple cum ar fi spre exemplu : $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$, $\int_0^{\pi} \sin x^2 dx$, $\int_0^1 \ln(1+x^2)dx$ etc. Pentru necesitățile ridicate de practică este însă suficient să cunoaștem valoarea aproximativă a integralei $\int_a^b f$ cu o eroare dată oricît de mică. Să indicăm mai jos cîteva metode în acest sens.

13.5.1. Formulă generală de cuadratură numerică

Fie $f,\ \rho : [a, b] \to \mathbf{R}$ două funcții, unde f este de clasă $\mathcal{C}^n$ și ρ de clasă $\mathcal{C}^0$. Ne punem problema *să calculăm valoarea aproximativă a integralei* $\int_a^b \rho(x) f(x)dx$ · Fie pentru aceasta $t_1, t_2, \ldots, t_n \in [-1, 1]$ fixați și L_n polinomul de interpolare al lui Lagrange asociat lui f și punctelor :

$$x_j = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}\, t_j,\ j = \overline{1,n} \tag{1}$$

Să scriem egalitatea aproximativă :

$$\int_a^b \rho(x) f(x)\,dx \cong \int_a^b \rho(x)\, L_n(x)\,dx,$$

și să deducem o evaluare a erorii $r_n(f)$ realizate. Avem :

$$r_n(f) = \int_b^b \rho(x)\,[f(x) - L_n(x)]\,dx$$

și cum (T.13.4.4. Cor. 1) :

$$|f(x) - L_n(x)| \leqslant \frac{\|f^{(n)}\|_\infty}{n!}\,|\omega_n(x)|\ (\forall)\ x \in [a, b],$$

rezultă că

$$|r_n(f)| \leqslant \frac{\|f^{(n)}\|\infty}{n!} \int_a^b |\rho(x)| \cdot |\omega_n(x)|\,dx$$

Cu schimbarea de variabilă

$$x = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}t,\quad t \in [-1,\ 1], \tag{2}$$

obținem : $\int_a^b |\rho(x)\,\omega_n(x)|\,dx =$

$$= \int_{-1}^1 \left|\rho\left(\frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}\,t\right)\right| \prod_{j=1}^n \left|\frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}t - x_j\right| \frac{b-a}{2}\,dt =$$

$$= \int_{-1}^1 \left|\rho\left(\frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}t\right)\right| \left(\frac{b-a}{2}\right)^{n+1} \prod_{j=1}^n |t - t_j|\,dt$$

Așadar :

$$|r_n(f)| \leqslant \frac{1}{n!}\,\|f^{(n)}\|_\infty \left(\frac{b-a}{2}\right)^{n+1} \int_{-1}^{+1} \left|\rho\left(\frac{b+a}{2}+\frac{b-a}{2}t\right)\right| \cdot \prod_{j=1}^{n} |t-t_j|\,dt \quad (3)$$

Să presupunem acum că toate punctele $t_j (j = \overline{1, n})$ sînt distincte, deci punctele x_j $(j = \overline{1, n})$ sînt distincte și deci (T.13.4.2.) :

$$L_n(x) = \sum_{j=1}^{n} f(x_j) \cdot \prod_{i=1}^{n}{}' \frac{x - x_i}{x_j - x_i}$$

Ținînd seama de (1), cu schimbarea de variabilă (2), avem :

$$\int_a^b \rho(x)\, L_n(x)\,dx = \sum_{j=1}^{n} f(x_j) \int_{-1}^{+1} \rho\left(\frac{b+a}{2}+\frac{b-a}{2}t\right) \prod_{i=1}^{n}{}' \frac{\frac{b+a}{2}+\frac{b-a}{2}t - x_i}{\frac{b-a}{2}(t_j - t_i)} \cdot$$

$$\cdot \frac{b-a}{2}\,dt = \frac{b-a}{2} \sum_{j=1}^{n} f(x_i) \int_{-1}^{+1} \rho\left(\frac{b+a}{2}+\frac{b-a}{2}t\right) \prod_{i=1}^{n}{}' \frac{t-t_i}{t_j - t_i}\,dt$$

Prin urmare obținem :

$$\int_a^b \rho(x) f(x)\,dx =$$

$$= \frac{b-a}{2} \sum_{j=1}^{n} f\left(\frac{b+a}{2}+\frac{b-a}{2}t_j\right) \int_{-1}^{+1} \rho\left(\frac{b+a}{2}+\frac{b-a}{2}t\right) \cdot \prod_{i=1}^{n}{}' \frac{t-t_i}{t_j - t_i}\,dt \quad (4),$$

cu o eroare dată de (3).

13.5.2. Teoremă (formula dreptunghiurilor). *Fie* $f : [a, b] \to$ *o funcție de clasă* $\mathcal{C}^2$, $x_i = a + \frac{i}{n}(b-a)$ *și* $S_n = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n} f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)$.

Atunci S_n *aproximează pe* $\int_a^b f$ *cu o eroare cel mult egală cu* $\frac{(b-a)^2}{4n} \cdot \|f'\|_\infty$.

Dem. Să aplicăm 13.5.1. relația (4), pentru $n = 1$, $t_1 = 0$ și $\rho = 1$. Atunci avem :

$$\int_a^b f \cong \frac{b-a}{2} \cdot f\left(\frac{b+a}{2}\right) \cdot \int_{-1}^{+1} 1\,dt = (b-a) f\left(\frac{b+a}{2}\right),$$

cu o eroare

$$\leqslant \frac{\|f'\|_\infty}{1!} \cdot \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 \cdot \int_{-1}^{+1} 1 \cdot |t|\,dt = \frac{(b-a)^2}{4} \|f'\|_\infty.$$

Prin urmare

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx \cong (x_{i+1} - x_i) f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right) = \frac{b-a}{n} \cdot f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right),$$

cu o eroare

$$\leqslant \frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{4} \cdot \sup_{x_i \leqslant x \leqslant x_{i+1}} |f'(x)| \leqslant \frac{(b-a)^2}{4n^2} \cdot \|f'\|_\infty.$$

deci

$$\int_a^b f \cong \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{(x_i + x_{i+1})}{2}\right),$$

cu o eroare

$$\leqslant \frac{(b-a)^2}{4n} \cdot \|f'\|_\infty. \text{ (cf. P.13.1.5.)}$$

Observație. Relația

$$\int_a^b f \cong \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n-1} f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)$$

poartă numele de *formula dreptunghiurilor.*

Semnificația geometrică a formulei dreptunghiurilor

Fie D_i dreptunghiul care are baza intervalul $[x_i, x_{i+1}]$ și înălțimea de lungime $f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)$ (fig. 73). Atunci aria $D_i = \frac{b-a}{n} f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)$, deci formula dreptunghiurilor ne arată că $\int_a^b f$ se poate aproxima cu suma ariilor dreptunghiurilor D_i, pentru $0 \leqslant i \leqslant n-1$.

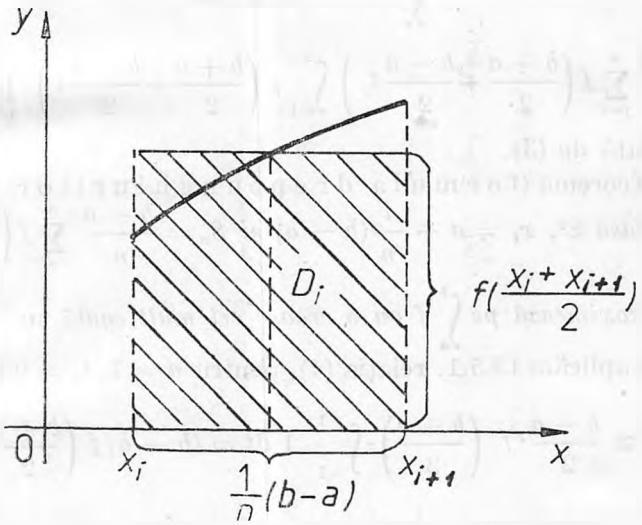


Fig. 73

Exemplul 1. *Să se calculeze valoarea aproximativă a integralei* $\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$ *cu o eroare* $\leqslant \frac{1}{40}$, *utilizînd formula dreptunghiurilor.*

Avem $f(x) = \frac{1}{1+x}$, $x \in [0,1]$, $f'(x) = \frac{-1}{(1+x)^2}$, $x \in [0,1]$, deci $\|f'\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} \frac{1}{(1+x)^2} = 1$. Determinăm pe $n \geqslant 1$ a.î. $\frac{(1-0)^2}{4n} \cdot 1 \leqslant \frac{1}{40} \Leftrightarrow n \geqslant 10$.

Atunci avem :

$$\int_0^1 f \approx \frac{1}{10}\left[f\left(\frac{0+\frac{1}{10}}{2}\right)+f\left(\frac{\frac{1}{10}+\frac{2}{10}}{2}\right)+\ldots+f\left(\frac{\frac{9}{10}+1}{2}\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{10}\left[f\left(\frac{1}{20}\right)+f\left(\frac{3}{20}\right)+\ldots+f\left(\frac{19}{20}\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{10}\left[\frac{1}{1+\frac{1}{20}}+\frac{1}{1+\frac{1}{20}}+\cdots+\frac{1}{1+\frac{19}{20}}\right]=$$

$$=2\left(\frac{1}{21}+\frac{1}{23}+\frac{1}{25}+\ldots+\frac{1}{39}\right)=$$

$$=2(4{,}7619047+4{,}3478260+4{,}0000000+3{,}7037037+$$
$$+3{,}4482758+3{,}2258064+3{,}0303030+2{,}8571428+2{,}7027027+$$
$$+2{,}5641025)\,10^2=0{,}69283526$$

Prin urmare $\int_0^1 \frac{dx}{1+x} \approx 0{,}69283526$ cu o eroare $\leqslant \frac{1}{40}$, deci $\ln 2 \approx$ $\approx 0{,}69283526$ cu o eroare $\leqslant \frac{1}{40}$.

Exemplul 2. *Să se calculeze valoarea aproximativă a integralei* $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ *cu o eroare* $\leqslant \frac{1}{40}$, *utilizînd formula dreptunghiurilor.*

Avem $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$, $x\in[0,1]$, $f'(x)=\frac{-2x}{(1+x^2)^2}$, $x\in[0,1.]$.

Atunci

$$\sup_{x\in[0,\,1]}\frac{2x}{(1+x^2)^2}\leqslant 1 \Leftrightarrow 2x\leqslant(1+x^2)^2\ (\forall)\ x\in[0,1]\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \varphi(x):=x^4+2x^2-2x+1\geqslant 0,\quad (\forall)\ x\in[0,1]$$

Or evident $\varphi'(x)=2(2x^3+2x-1)$ şi $4p^3+27q^2=4.8+27.4>0$, deci φ' admite o singură rădăcină reală x^*. Cum $\varphi'(0)<0$ şi $\varphi'\left(\frac{1}{2}\right)>0$, rădăcină x^* se află între 0 şi $\frac{1}{2}$.

x	0	x^*		$\frac{1}{2}$		1
φ'	$-$	$-\ 0$	$+$	$+$	$+$	$+$
φ	$1\searrow$	$\varphi(x^*)$	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	5

$$\varphi(x)>\varphi\left(\frac{1}{2}\right)>0,\quad (\forall)\ x\in\left[\frac{1}{2},1\right]$$

Însă $2x \leqslant 1 \leqslant (1+x^2)^2$, $(\forall)\, x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, deci $\varphi(x) \geqslant 0$, $(\forall)\, x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ și deci $\varphi \geqslant 0$, de unde conchidem că $\|f'\|_\infty \leqslant 1$. Determinăm pe n a.î. $\frac{(1-0)^2}{4n} \cdot 1 \leqslant \frac{1}{40} \Leftrightarrow n \geqslant 10$. Atunci

$$\int_0^1 f \approx \frac{1}{10}\left[f\left(\frac{1}{20}\right) + f\left(\frac{3}{20}\right) + \ldots + f\left(\frac{19}{20}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{10}\left[\frac{1}{1+\frac{1}{20^2}} + \frac{1}{1+\left(\frac{3}{20}\right)^2} + \ldots + \frac{1}{1+\left(\frac{19}{20}\right)^2}\right] =$$

$$= 40\left[\frac{1}{400+1^2} + \frac{1}{400+3^2} + \ldots + \frac{1}{400+19^2}\right] =$$

$$= 40(2{,}4937655 + 2{,}4449877 + 2{,}3529411 + 2{,}2271714 + 2{,}0760020 + 1{,}9193857 +$$

$$+ 1{,}7574692 + 1{,}6000000 + 1{,}4513788 + 1{,}3140604)10^{-3} = 0{,}78560636$$

Prin urmare $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \approx 0{,}78560636$, cu o eroare $\leqslant \frac{1}{40}$ și cum avem $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc\,tg} 1 = \frac{\pi}{4}$, obținem $\pi = 3{,}14242534$, cu o eroare $\leqslant \frac{1}{10}$.

13.5.3. Teoremă (Formula trapezelor). *Fie* $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ *o funcție de clasă* $\mathcal{C}^2$, $x_i = a + \frac{i}{n} \cdot (b-a)$ *și* $S_n = \frac{b-a}{n}\left[\frac{f(x_0)+f(x_n)}{2} + f(x_1) + \ldots + f(x_{n-1})\right]$. *Atunci* S_n *aproximează pe* $\int_a^b f$ *cu o eroare cel mult egală cu* $\frac{(b-a)^3}{12 \cdot n^3}\|f''\|_\infty$.

Dem. Să punem în 13.5.1. relația (4), $n = 2$, $t_1 = -1$, $t_2 = 1$ și $\rho = 1$. Atunci avem:

$$\int_a^b f \cong \frac{b-a}{2}\left[f(x_1)\int_{-1}^{+1}\frac{t-t_2}{t_1-t_2}\,dt + f(x_2)\int_{-1}^{+1}\frac{t-t_1}{t_2-t_1}\,dt\right] =$$

$$= \frac{b-a}{2}\left[f(a)\int_{-1}^{1}\frac{t-1}{-2}\,dt + f(b)\int_{-1}^{1}\frac{t+1}{2}\,dt\right] = \frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)],$$

cu o eroare

$$\leqslant \frac{1}{2!}\|f''\|_\infty \left(\frac{b-a}{2}\right)^3 \int_{-1}^{+1} |t^2-1|\,dt = \frac{1}{2!}\|f''\|_\infty \left(\frac{b-a}{2}\right)^3 \cdot \frac{4}{3}.$$

Aşadar avem :

$$\left.\begin{aligned} &\int_a^b f \cong \frac{b-a}{2}\,[f(a)+f(b)], \\ &\text{cu o eroare} \qquad \leqslant \frac{(b-a)^3}{12}\,\|f''\|_\infty \end{aligned}\right| \tag{1}$$

Din (1) aplicat intervalului $[x_{i-1},\ x_i]$ rezultă că

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f \cong \frac{x_i - x_{i-1}}{2}\,[f(x_{i-1}) + f(x_i)] = \frac{b-a}{2n}\,[f(x_{i-1}) + f(x_i)],$$

cu o eroare

$$\leqslant \frac{(x_i - x_{i-1})^3}{12} \cdot \sup_{x\in[x_{i-1},\,x_i]} |f''(x)| \leqslant \frac{(b-a)^3}{12n^3}\,\|f''\|_\infty$$

Sumăm ultimele relaţii după i şi obţinem :

$$\int_a^b f = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f \cong \frac{b-a}{2n} \sum_{i=1}^{n} [f(x_{i-1}) + f(x_i)] = S_n\,,$$

cu o eroare $\leqslant n\,\dfrac{(b-a)^3}{12\,n^3}\,\|f''\|_\infty$ (cf.P.13.1.5.)

Observaţie. Relaţia :

$$\int_a^b f \cong \frac{b-a}{n}\left[\frac{f(x_0)+f(x_n)}{2} + f(x_1) + \ldots + f(x_{n-1})\right.$$

poartă numele de *formula trapezelor.*

Semnificaţia geometrică a formulei trapezelor

Fie T_i trapezul determinat de dreptele $x = x_{i-1}$, $x = x_i$, axa şi graficul lui f (fig. 7.4). Atunci aria $T_i = \dfrac{b-a}{n} \cdot \dfrac{f(x_{i-1})+f(x_i)}{2}$, deci formula trapezelor ne arată că $\int_a^b f$ se poate aproxima cu suma ariile trapezelor T_i pentru $i = \overline{1,\ n}$.

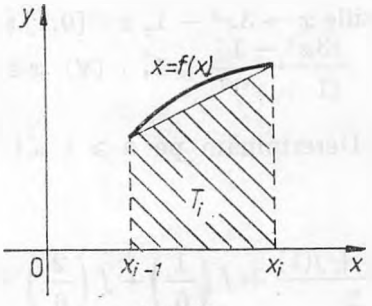


Fig. 74

Exemplul 1. *Să se calculeze valoarea aproximativă a integralei* $\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$, *cu o eroare* $\leqslant \frac{1}{600}$, *utilizînd formula trapezelor.*

Avem $f(x) = \frac{1}{1+x}$, $x \in [0, 1]$, deci $f''(x) = \frac{-2}{(1+x)^3}$, $(\forall)\ x \in [0, 1]$ și deci $\|f''\|_\infty = \sup_{x \in [0, 1]} \frac{2}{(1+x)^3} = 2$. Determinăm pe $n \geqslant 1$ a.î. $\frac{(1-0)^3}{12n^2} \cdot 2 \leqslant \frac{1}{600} \Leftrightarrow n \geqslant 10$. Atunci avem:

$$\int_0^1 f \approx \frac{1}{10}\left[\frac{f(0)+f(1)}{2} + f\left(\frac{1}{10}\right) + f\left(\frac{2}{10}\right) + \ldots + f\left(\frac{9}{10}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{10}\left[\frac{1+\frac{1}{2}}{2} + \frac{1}{1+\frac{1}{10}} + \frac{1}{1+\frac{2}{10}} + \ldots + \frac{1}{1+\frac{9}{10}} =\right]$$

$$= \frac{3}{40} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \ldots + \frac{1}{19} =$$

$$= (7{,}500000 + 9{,}0909090 + 8{,}3333333 + 7{,}6923076 + 7{,}1428571 + 6{,}6666666 +$$
$$+ 6{,}25\,00000 + 5{,}8823529 + 5{,}5555555 + 5{,}2631578)10^{-2} = 0{,}69377136$$

Prin urmare $\int_0^1 \frac{dx}{1+x} \approx 0{,}69377136$ cu o eroare $\leqslant \frac{1}{600}$, deci $\ln 2 \approx$ $\approx 0{,}69377136$ cu o eroare $\leqslant \frac{1}{600}$.

Exemplul 2. *Să se calculeze valoarea aproximativă a integralei* $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$, *cu o eroare* $\leqslant \frac{1}{200}$, *utilizînd formula trapezelor.*

Avem $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $x \in [0, 1]$, deci $f''(x) = \frac{2(3x^2-1)}{(1+x^2)^3}$, $(\forall)\ x \in [0, 1]$. Reprezentînd grafic funcțiile $x \mapsto 3x^2 - 1$, $x \in [0,1]$ și $x \mapsto (1+x^2)^3$, $x \in [0, 1]$. Se vede imediat că $\frac{|3x^2-1|}{(1+x^2)^3} \leqslant 1$, $(\forall)\ x \in [0, 1]$, deci $\|f''\|_\infty = \sup_{x \in [0, 1]} \frac{|3x^2-1|}{(1+x^2)^3} = 2$. Determinăm pe $n \geqslant 1$ a.î. $\frac{(1-0)^3}{10n^2} \cdot 2 \leqslant \frac{1}{200} \Leftrightarrow n \geqslant 6$. Atunci avem:

$$\int_0^1 f \approx \frac{1}{6}\left[\frac{f(0)+f(1)}{2} + f\left(\frac{1}{6}\right) + f\left(\frac{2}{6}\right) + \ldots + f\left(\frac{5}{6}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{6}\left[\frac{1+\frac{1}{2}}{2} + \frac{1}{1+\left(\frac{1}{6}\right)^2} + \frac{1}{1+\left(\frac{2}{6}\right)^2} + \ldots + \frac{1}{1+\left(\frac{5}{6}\right)^2}\right] =$$

$$= \frac{1}{8} + 6\left(\frac{1}{36+1^2} + \frac{1}{36+2^2} + \ldots + \frac{1}{36+5^2}\right) \approx 0{,}125 + 6(2{,}7027027 +$$

$$+ 2{,}500000 + 2{,}2222222 + 1{,}9230769 + 1{,}6393442)\ 10^{-2} \approx 0{,}7842070.$$

Prin urmare $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \approx 0{,}78424070$ cu o eroare $\leqslant \frac{1}{200}$ și cum avem $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \text{arc tg } 1 = \frac{\pi}{4}$, obținem $\pi \approx 3{,}1369628$ cu o eroare $\leqslant \frac{1}{50}$.

13.5.4. Teoremă (formula lui Simpson). *Fie* $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ *o funcție de lasă* $\mathcal{C}^4$, $x_i = a + \frac{i}{n}(b-a)$ *și* $S_n = \frac{b-a}{6n}\left\{[f(x_0) + f(x_n)] + \right.$

$$\left. + 2[f(x_1) + \ldots + f(x_{n-1})] + 4\left[f\left(\frac{x_0+x_1}{2}\right) + \ldots + f\left(\frac{x_{n-1}+x_n}{2}\right)\right]\right\}.$$

Atunci S_n *aproximează pe* $\int_a^b f$ *cu o eroare cel mult egală cu* $\frac{(b-a)^5}{2880\, n^4}\|f^{(IV)}\|_\infty$.

Dem. Să punem în 13.5.1. relația (4), $n = 4$, $t_1 = -1$, $t_2 = 0$, $t_3 = 1$, $t_4 = 0$ și $\rho = 1$. Atunci avem:

$$\int_a^b f \approx \int_a^b L_4(x)\, dx,$$

cu o eroare

$$\leqslant \frac{1}{4!}\|f^{(IV)}\|_\infty \left(\frac{b-a}{2}\right)^5 \int_{-1}^{+1} |t^2(t+1)(t-1)|\, dt =$$

$$= \frac{(b-a)^5}{4!\cdot 2^5}\|f^{(IV)}\|_\infty \cdot 2\int_0^1 t^2(1-t^2)\, dt = \frac{(b-a)^2}{2880}\|f^{(IV)}\|_\infty$$

Însă:

$$L_4(x) = L_3(x) + f(a; b; \frac{a+b}{2};\ \frac{a+b}{2})(x-a)(x-b)\left(x - \frac{a+b}{2}\right)$$

și funcția $x \mapsto (x-a)(x-b)\left(x - \frac{a+b}{2}\right)$, $x \in [a, b]$, este impară în raport cu punctul $\frac{a+b}{2}$, deci (P.9.4.9.) avem:

$$\int_a^b (x-a)(x-b)\left(x - \frac{a+b}{2}\right) dx = 0$$

și deci

$$\int_a^b L_4(x)\, dx = \int_a^b L_3(x)\, dx.$$

Cum L_3 este polinomul lui Lagrange asociat lui f și punctelor distincte $t_1 = -1$, $t_2 = 0$, $t_3 = 1$ și $t_4 = 0$, avem :

$$\int_a^b L_3(x)\,dx = \frac{b-a}{2}\sum_{j=1}^{3}(f(x_j)\int_{-1}^{+1}\prod_{i=1}{}'\frac{t-t_i}{t_j-t_i}\,dt =$$

$$= \frac{b-a}{2}\left[f(a)\int_{-1}^{+1}\frac{(t-t_2)(t-t_3)}{(t_1-t_2)(t_1-t_3)}\,dt + f\left(\frac{b+a}{2}\right)\int_{-1}^{1}\frac{(t-t_1)(t-t_3)}{(t_2-t_1)(t_2-t_3)}\,dt + \right.$$

$$\left. + f(b)\int_{-1}^{+1}\frac{(t-t_1)(t-t_2)}{(t_3-t_1)(t_3-t_2)}\,dt\right] = \frac{b-a}{2}\left[\frac{1}{3}f(a) + \frac{4}{3}f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{3}f(b)\right],$$

Așadar avem :

$$\int_a^b f \approx \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right], \tag{1}$$

cu o eroare $\leqslant \dfrac{(b-a)^5}{2880}\|f^{(IV)}\|_\infty$.

Scriem acum relația (1) pentru fiecare interval $[x_{i-1}, x_i]$ $(i = \overline{1, n})$; obținem :

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f \cong \frac{x_i - x_{i-1}}{6}\left[f(x_{i-1}) + 4f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right) + f(x_i)\right],$$

cu o eroare $\leqslant \dfrac{(x_i - x_{i-1})^5}{2880}\sup_{x\in[x_{i-1}, x_i]}|f^{(IV)}(x)| = \dfrac{(b-a)^5}{2880\,n^5}\|f^{[IV]}\|_\infty$

Sumăm mai departe după i $(i = \overline{1, n})$ și deducem :

$$\int_a^b f = \sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i} f \cong \frac{b-a}{6n}\sum_{i=1}^{n}\left[[f(x_{i-1}) + 4f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right) + f(x_i)\right] = S_n,$$

cu o eroare $\leqslant n\cdot\dfrac{1}{2880\ n^5}\|f^{(IV)}\|_\infty$ (cf. P.13.1.5.) etc.

Observație. Relația

$$\int_a^b f \approx \frac{b-a}{6n}\left\{[f(x_0) + f(x_n)] + 2[f(x_1) + \ldots + f(x_{n-1})] + \right.$$

$$\left. + 4\left[f\left(\frac{x_0+x_1}{2}\right) + f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) + \ldots + f\left(\frac{x_{n-1}+x_n}{2}\right)\right]\right\},$$

poartă numele de *formula lui Simpson* sau *a parabolelor.*

Exemplul 1. *Să se calculeze valoarea aproximativă a integralei* $\int_0^1 \dfrac{dx}{x+1}$, *cu o eroare* $\leqslant \dfrac{1}{10.000}$, *utilizînd formula lui Simpson.*

Avem $f(x) = \frac{1}{1+x}$, $x \in [0, 1]$ deci $f^{IV}(x) = 4\ (1+x)^{-5}$ şi deci $\|f^{IV}\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |4!(1+x)^{-5}| = 4!$. Determinăm pe $n \geqslant 1$ a.î. $\frac{(1-0)^5}{2880n^4} \cdot 4! < \frac{1}{10^4} \Leftrightarrow \frac{24}{5!\,24n^4} < \frac{1}{10^4} \Leftrightarrow n \geqslant 4$. Atunci avem:

$$\int_0^1 f \cong \frac{1-0}{6\cdot 4}\left\{[f(0)+f(1)] + 2\left[f\left(\frac{1}{4}\right)+f\left(\frac{2}{4}\right)+f\left(\frac{3}{4}\right)\right] + \right.$$

$$\left. + 4\left[f\left(\frac{1}{8}\right)+f\left(\frac{3}{8}\right)+f\left(\frac{5}{8}\right)+f\left(\frac{7}{8}\right)\right]\right\} =$$

$$= \frac{1}{24}\left\{\left[1+\frac{1}{2}\right] + 2\left[\frac{1}{1+\frac{1}{4}} + \frac{1}{1+\frac{2}{4}} + \frac{1}{1+\frac{3}{4}}\right] + \right.$$

$$\left. + 4\left[\frac{1}{1+\frac{1}{8}} + \frac{1}{1+\frac{3}{8}} + \frac{1}{1+\frac{5}{8}} + \frac{1}{1+\frac{7}{8}}\right]\right\} =$$

$$= \frac{1}{16} + \frac{1}{15} + \frac{1}{18} + \frac{1}{21} + \frac{4}{27} + \frac{4}{33} + \frac{4}{39} + \frac{4}{45} =$$

$$= (6{,}2500000 + 6{,}6666666 + 5{,}5555555 + 4{,}7619047)10^{-1} +$$

$$+ (1{,}4814814 + 1{,}2121212 + 1{,}0256410 + 0{,}8888838)10^{-2} = 0{,}69315449.$$

Prin urmare $\int_0^1 \frac{dx}{1+x} \approx 0{,}69315449$ cu o eroare $\leqslant \frac{1}{10.000}$. Cum $\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln 2$, obţinem că $\ln 2 \approx 0{,}69315449$ cu o eroare $\leqslant \frac{1}{10.000}$.

Exemplul 2. *Să se calculeze valoarea aproximativă a integralei* $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ *cu o eroare* $\leqslant \frac{1}{100.000}$, *utilizînd formula lui Simpson.*

Avem $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $x \in [0,1]$. Atunci

$$f^{(IV)}(x) = 284\ x^4(1+x^2)^{-5} - 48\ x^2(1+x^2)^{-4} = \frac{48x^2(5x^2-1)}{(1+x^2)^5}$$

Observăm că

$$\frac{x^2}{(1+x^2)^4} \leqslant \frac{1}{\lambda^4}, (\forall)\ x \in [0,1] \Leftrightarrow \lambda\sqrt{x} \leqslant 1 + x^2\ (\forall) x \in [0,1].$$

Considerăm funcţia $\varphi(x) = 1 + x^2 - \lambda\sqrt{x}$, $x \in [0, 1]$. Din condiţia $\varphi'(x_0) = 0$ şi $\varphi(x_0) \geqslant 0$, deducem că $\lambda^4 \leqslant \frac{256}{27}$, deci $\frac{x^2}{(1+x^2)^4} \leqslant \frac{27}{256}$ $(\forall)$ $x \in [0, 1]$.

De asemenea avem:

$$|5x^2 - 1| = \begin{cases} 5x^2 - 1 \leqslant 2(1 + x^2), & \frac{1}{\sqrt{5}} \leqslant x \leqslant 1 \\ 1 - 5x^2 \leqslant 1 \leqslant 2(1 + x^2), & 0 \leqslant x < \frac{1}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

Prin urmare $|f^{(IV)}(x)| = 48 \cdot \frac{x^2}{(1+x^2)^4} \cdot \frac{|5x^2-1|}{1+x^2} \leqslant 48 \cdot \frac{27}{256} \cdot 2 = \frac{81}{8}$.

Rămîne să determinăm pe $n \geqslant 1$ a.î. $\frac{(1-0)^5}{2880\, n^4} \cdot \frac{81}{8} \leqslant \frac{1}{10^8} \Leftrightarrow n \geqslant 6$. Atunci avem:

$$\int_0^1 f \approx \frac{1-0}{6.6}\left\{[f(0) + f(1)] + 2\left[f\left(\frac{1}{6}\right) + f\left(\frac{2}{6}\right) + f\left(\frac{3}{6}\right) + f\left(\frac{4}{6}\right) + f\frac{5}{6}\right] + \right.$$

$$\left. + 4\left[f\left(\frac{1}{12}\right) + f\left(\frac{3}{12}\right) + f\left(\frac{5}{12}\right) + f\left(\frac{7}{12}\right) + f\left(\frac{9}{12}\right) + f\left(\frac{11}{12}\right)\right]\right\} =$$

$$= \frac{1}{36}\left\{\left[1 + \frac{1}{2}\right] + 2\left[\frac{1}{1+\left(\frac{1}{6}\right)^2} + \frac{1}{1+\left(\frac{3}{6}\right)^2} + \frac{1}{1+\left(\frac{4}{6}\right)^2} + \frac{1}{1+\left(\frac{5}{6}\right)^2}\right] + \right.$$

$$\left. + 4\left[\frac{1}{1+\left(\frac{1}{12}\right)^2} + \frac{1}{1+\left(\frac{3}{12}\right)^2} + \frac{1}{1+\left(\frac{5}{12}\right)^2} + \frac{1}{1+\left(\frac{7}{12}\right)^2} + \frac{1}{1+\left(\frac{9}{12}\right)^2} + \frac{1}{1+\left(\frac{11}{12}\right)^2}\right]\right\} =$$

$$= \frac{1}{24} + 2\left(\frac{1}{37} + \frac{1}{40} + \frac{1}{45} + \frac{1}{52} + \frac{1}{61}\right) + 16\left(\frac{1}{145} + \frac{1}{153} + \frac{1}{169} + \frac{1}{193} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{225} + \frac{1}{265}\right) = 4{,}1666666 \cdot 10^{-2} + 2(2{,}7027027 + 2{,}5000000 +$$

$$+ 2{,}2222222 + 1{,}9230769 + 1{,}6393442) \cdot 10^{-2} + 16(6{,}8965517 +$$

$$+ 6{,}5359477 + 5{,}9171597 + 5{,}1813471 + 4.4444444 +$$

$$+ 3{,}7735849) \cdot 10^{-3} = 0{,}78539810$$

În definitiv $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \approx 0{,}78539810$, cu o eroare $\leqslant \frac{1}{10^5}$ şi cum $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc\,tg}\, 1 = \frac{\pi}{4}$, obţinem $\pi \approx 3{,}14159240$, cu o eroare $\leqslant \frac{4}{10^5}$.

Indice de termeni

A

acoperire deschisă, 143
aderență, 136
argument al unui număr, 72
arie (măsură Jordan), 366
aria unei suprafețe, 375
asimptotă, 234
— oblică, 235
— orizontală, 235
— verticală, 235

B

bază de vecinătăți, 132

C

cardinalul unei mulțimi, 25
cerc osculator, 258
clasă de echivalență, 21
cifră exactă, 454
cifră semnificativă, 454
cifră stabilizată, 454
coeficient dominant, 129
coeficienți binomiali, 34
complementară (a unei mulțimi), 14
compunere a două funcții, 16
continuitate unghiulară, 435
continuitate radială, 435
contracție, 113
corp, 29
— comutativ, 29
— complet ordonat, 29
— de numere complexe, 71
— de numere reale, 29
— ordonat, 29
curbă (plană), 257
— continuă, 369
— de clasă infinit, 369
— rectificabilă, 369

D

derivata funcției, 191
— dreapta, 191
— stînga, 191
— derivată de ordin superior, 200
— derivata dreaptă (stîngă) a unei mulțimi 134
diametru, 42
diferență divizată, 482
diferență a două mulțimi, 14
difeomorfism, 213
diferențiala unei funcții, 224
disc deschis (închis), 430
discontinuitate de prima speță, 162
discontinuitate de speța a doua, 162
diviziune a unui interval, 308
diviziune echidistantă, 308

E

egalitate de funcții, 16
element maximal (minimal), 21
element neutru, 29
element nul, 29
element opus, 29
element simetrizabil, 29
element unitate, 29
enumerare (a unei mulțimi), 25
eroare absolută, 457
eroare relativă, 457
extrem local, 124
exteriorul unei mulțimi, 139

F

familie de mulțimi, 14
familie echicontinuă, 421
familie echimărginită, 421
frontiera unei mulțimi, 136
funcție (aplicație), 15
— afină, 126

funcție aditivă, 126
— antiderivabilă, 260
— bijectivă, 18
— concavă, 226
— convexă, 226
— continuă (secvențial), 161
— continuă la stînga, 161
— continuă la dreapta, 161
— constantă, 110
— caracteristică a unei mulțimi, 112
— diferențiabilă, 224
— derivabilă, 191
— derivată, 208
— dezvoltabilă în serie Taylor, 438
— de clasă $\mathcal{C}^n$, 200
— Dirichlet, 111
— discontinuă, 161
— etajată, 112
— exponențială, 181, 444
— Hahn, 111
— Heaviside, 112
— identic nulă, 110
— identitate, 16
— impară, 162
— indefinit derivabilă, 200
— injectivă, 18
— integrabilă Darboux, 311
— integrabilă impropriu, 379
— integrabilă Riemann, 309
— inversabilă, 18
— liniară, 126
— lipschitziană, 113
— logaritm, 182
— majorată, minorată, 123
— mărginită, 123
— modul, 35
— monoton crescătoare într-un punct, 119
— monoton crescătoare, 27
— multiplicativă, 126
— nemărginită, 123
— omeomorfă (omeomorfism), 161
— omogenă, 126
— parte întreagă, 110
— parte zecimală, 110
— pară, 122
— periodică. 123
— poligonală, 262
— polinomială, 129
— propozițională, 23
— putere, 183
— rațională, 130
— rațională de k variabile, 279
— Riemann, 112
— riglată, 173
— signum. 110
— strict crescătoare, 27
— strict monotonă, 27
— strict convexă. concavă, 226
— subaditivă, 126
— submultiplicativă, 126
— surjectivă, 18
— uniform continuă, 186

I

incluziune, 14
incluziune strictă, 14
inelul polinoamelor, 129
injecție canonică, 16
intersecție de mulțimi, 14, 15
integrala Riemann, 309
integrala Darboux, 311
integrala Darboux inferioară, superioară, 311
integrala improprie. 379
— absolut convergentă, 379
— convergentă, 379
— divergentă, 379
— semiconvergentă, 379
interiorul unei mulțimi, 139
interpolarea unei funcții, 479
interval, 45
— deschis, 45
— închis, 45
— semideschis, 45
— compact, 45
— parțial al unei diviziuni, 308
— n-dimensional, 366
interval (disc) de convergență, 430
izometrie ,112
izomorfism, 30

L

lege de compoziție, 28
— aditivă, 29
— asociativă, 29
— comutativă, 29
— multiplicativă, 29
limita unei funcții, 148
limita la dreapta, stînga a unei funcții, 159
limita radială, 435
limita inferioară, superioară a unui șir, 65
limita unghiulară, 435
lungimea unui interval, 45
lungimea unei curbe, 369
lungimea unui grafic, 370

M

majorant, minorant, 21
margine a unei mulțimi, 21
margine inferioară ,superioară a unei mulțimi. 21
margine inferioară ,supericarăa unei funcții, 123
margine inferioară , superioară a unui șir, 26
matrice infinită, 56
— triunghiulară, 56
maxim, minim, local al unei funcții, 123
maxim, minim local în sens strict, 124
media aritmetică, 40
media armonică, 40
media geometrică. 40
mulțime, 14
— a numerelor naturale, 22
— a punctelor limită, 65
— cel mult numerabilă, 25
— conexă, neconexă, 142
— convexă, 45
— cît printr-o relație, 21
— compactă. 143
— elementară, 366
— densă în sensul ordinii, 35

mulțime densă în sens topologic, 138
— derivată, 132
— de măsură Jordan nulă, 319
— de puncte intermediare, 308
— de convergență, 422
— echipotentă cu altă mulțime, 25
— finită, 15
— închisă, 136
— închisă relativ, 136
— infinită, 25
— măsurabilă (Jordan), 366
— majorată, minorată, 21
— mărginită, 21
— neglijabilă (de măsură Lebesgue nulă), 319
— numerabilă, 25
— ordonată, 20
— preordonată, 20
— relativ compactă, 144
— relativ secvențial compactă, 146
— simetrică, 122

N

nedeterminare, 216
norma unei diviziuni, 308
norma uniformă (a unei funcții), 126
număr, 41
— algebric, 129
— complex, 71
— prim, 32
— real, 29
— transcedent, 129

O

oscilația unei funcții, 165
oscilația punctată a unei funcții, 151

P

permutare, 18
polinom (de grad n), 129
— constant, 129
— de două variabile, 279
— de interpolare, 479
— de interpolare Lagrange, 480
— de interpolare Newton, 483
— nul, 129
perioadă (minimă) a unei funcții, 123
prelungire a unei funcții, 16
prelungire prin continuitate, 172
prim element, 21
primitivă a unei funcții, 260
primitivă generalizată, 363
produs cartezian, 15
produs convolutiv de serii, 94
produs infinit, 102
— absolut convergent, 103
— convergent, 103
— divergent, 103
— semiconvergent, 103
produs parțial, 103
proprietatea Darboux, 120
punct de acumulare, 133
punct de acumulare din dreapta (stînga), 134
punct de inflexiune, 233
punct de interpolare (nod), 479
punct de maxim, minim, 124
punct frontieră (al unei mulțimi), 136
punct fix, 128
punct interior, 139
punct izolat, 139
punct limită al unui șir, 65

R

rază de convergență, 430
rază de curbură, 258
radical algebric, 74
radical de ordin n, 37
rădăcină de ordin k, 129
relație (binară), 15
— antisimetrică, 20
— ireflexivă, 20
— reflexivă, 20
— simetrică, 20
— totală, 20
— tranzitivă, 20
— de echivalență, 20
— de (pre)ordine, 20
reprezentare carteziană, 257
reprezentare în coordonate polare, 257
reprezentare parametrică, 257
reprezentare trigonometrică, 72
restricție (a unei aplicații), 16
restul de rang n (al unei serii), 76
restul Taylor, 221
reuniune de mulțimi, 14, 15

S

secțiune la dreapta (stînga) a unui șir, 65
semivecinătate a unui punct, 134
serie de numere, 76
— convergentă, 76
— comutativ (necondiționat) convergentă, 92
— de termen general a_n, 76
— divergentă, 76
— echivalentă, cu o altă serie, 32
— geometrică, 79
— majorată, minorată, 82
— semiconvergentă, 92
serie de funcții, 422
— absolut convergentă, 422
— echivalentă cu o altă serie, 422
— majorată, 422
— normal convergentă, 422
— simplu convergentă, 422
— uniform convergentă, 422
serie de puteri, 430
serie Taylor, 438
subacoperire finită, 143
subfamilie de mulțimi, 15
sumă parțială a unei serii, 76
suma unei serii de numere, 76
suma unei serii de funcții, 422
subcorp, 30
subșir, 25
sumă Darboux inferioară, superioară, 311
sumă Riemann, 369
șir (de elemente), 25
— ascendent, descendent (de mulțimi), 26
— constant, 25

șir convergent, 46
— cu limită, 48
— cu limită infinită, 48
— crescător, 27
— de coeficienți (ai unei serii), 430
— de mulțimi, 26
— de suport finit, 128
— descrescător, 27
— finit de elemente, 25
— fundamental (Cauchy), 46
— majorat, minorat, 26
— monoton (strict monoton), 27
— mărginit, 26
— periodic, 25
— Rolle, 460
— staționar, 25
— Sturm, 462
șir de funcții, 410
șir de funcții simplu (punctual) conv.
— uniform Cauchy, 410
— uniform convergent, 410
gent, 410

T

termen de rang n (al unei serii), 76
termenii unui produs infinit, 102
termenii unei serii, 76

V

valoare aproximativă, 453
— prin interpolare (extrapolare), 482
vecinătate a unui punct, 132
vecinătate punctată, 133

Bibliografie

[1] *Банах С.* Дифференциальное, и интегральное исчисление (trad. din limba polonă), Издательство „Наука", Москва 1972.
[2] *Bechenbach E.* and *Bellman R.*, Inequalities, Springer-Verlag, Berlin, 1961.
[3] *Bourbaki N.* Fonctions d'une variable rèelle (Théorie élémentaire), Paris, Hermann, 1961.
[4] *Colojoară I.*, Analiză matematică, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1983.
[5] *Dieudonné J.*, Calcul infinitésimal, Hermann, Paris, Collection Méthodes, 1968.
[6] *Dieudonné J.*, Éléments d'analyse, Tome I, Gauthier-Villars, Paris, 1969.
[7] *Garnir H. G.*, Fonctions des variables réelles, Paris, Gauthier-Villars, 1963—1965.
[8] *Gelbaum B. Olmsted J.M.H.*, Counterexemples in analysis, Holden-Day, San Francisco, London, 1964.
[9] *Гребенча М. К.* и *Новоселов С. И.*, Курс математического анализа, Части I — II, Госсуд. Изгательство „Высщая школа", Москва, 1961
[10] *Gussi Gh.*, Itinerar în analiza matematică, Editura Albatros, Bucureşti, 1970.
[11] *Hardy G. H.*, *Littlewood J. E.*, *Polya G.*, Inequalities, Cambridge, University Press, 1967.
[12] *Knopp K.*, Infinite Sequences and Series, New-York, Dover Publications, Inc. 1956.
[13] *Коровкин П. П.*, Математический анализ, Издательсво „Просвещение" Москва 1972
[14] *Lelong-Ferrand J.*, *Arnandiès J. — M.*, Analyse, Dunod, Paris, 1972.
[15] *Marinescu Gh.*, Tratat de analiză matematică, vol. I, Editura Academiei, Bucureşti, 1983.
[16] *Nicolescu M.*, *Dinculeanu N.*, *Marcus S.*, Analiză matematică vol. I—II, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1971.
[17] *Никольский С. М.* Курс математического анализа, Том I—II, Издательство „Наука", Москва, 1973
[18] *Pólya G.*, *Szegö* G., Problems and theorems in Analysis, vol. I, Springer-Verlag, Berlin, 1972.
[19] *Rudin W.*, Principles of Mathematical Analysis, Second Edition, McGraw-Hill Company, New-York, 1964.
[20] *Stănăşilă O.*, Analiză matematică, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti 1981.
[21] *Sireţchi Gh.* Analiză matematică, vol. I (Noţiuni şi Exerciţii introductive de Calcul diferenţial şi integral real), ed. IV-a. C.M.U.B. (Centrul de Multiplicare al Universităţii din Bucureşti), 1978.
[22] *Sireţchi Gh.*, Analiză matematică, vol. II (Exerciţii avansate de Calcul diferenţial şi integral real), ed. II , C.M.U.B., 1982.
[23] *Sireţchi Gh.* Analiză matematică, vol. III Fasc. 1 (Teoria mulţimilor. Numere reale. Serii de numere. Funcţii elementare), ed. III^a, C.M.U.B., 1984.
[24] *Sireţchi Gh.*, Analiză matematică, vol. III Fasc. 3 (Calcul diferenţial), ed. II^a, C.M.U.B. 1983.
[25] *Sireţchi Gh.*, Topologie generală, C.M.U.B. 1983.
[26] *Sireţchi Gh.*, Asupra unor noţiuni de analiză matematică pg. (199—209), Lucrările Simpozionului Naţional „Gh. Ţiţeica" — Craiova 1978.
[27] *Thompson R. C.*, Elementary modern algebra, Scott, Foresman and Co., Brighton, England, 1974.
[28] *** American Math. Monthly vol. 54 (1948)-vol. 86 (1979).

Redactor: ION MIHAI
Tehnoredactor: MARILENA DAMASCHINOPOL

Coli de tipar: 31,50
Bun de tipar: 8.11.1985

c. 234 I. P. Informația
str. Brezoianu nr. 23—25
București